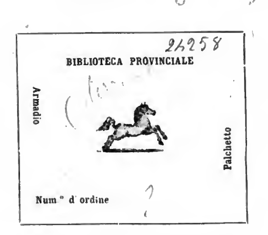



24258
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine

# DÉVELOPPEMENTS

DE

# GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.





PARIS.—IMPRIMERIE DE PAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

# DÉVELOPPEMENTS

DE

# GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PAR M. THÉODORE OLIVIER,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET ANCIEN OFFICIER D'ARTILLERIE, DOCTEUR ÈS-SCIENCES DE LA FACULTÉ DE PARIS
PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE ROYAL DES ARTS ET MÉTIERS,
PROFESSEUR-FONDATEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE DE PARIS ET DU COMITÉ DES ARTS MÉCANIQUES DE LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT POUR L'INDUSTRIE NATIONALE
MEMBRE ÉTRANGER DES DEUX ACADÉMIES ROYALES DES SCIENCES ET DES SCIENCES MILITAIRES DE STOCKHOLM,
DES ACADÉMIES DE METZ, DIJON ET LYON,
CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR ET DE L'ORDRE ROYAL DE L'ÉTOILE POLAIRE DE SUÈDE.






PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1843





# AVANT-PROPOS.

J'ai donné à cet ouvrage le titre de *Développements de géométrie descriptive*, parce que j'y examine et discute diverses questions, et que j'y donne la solution de divers problèmes dont les auteurs des traités de géométrie descriptive n'ont point parlé.

Cet ouvrage est donc destiné à servir de *complément* aux divers traités de géométrie descriptive publiés jusqu'à ce jour.

J'ai divisé cet ouvrage en sept chapitres; dans chaque chapitre j'ai groupé les questions et les problèmes qui avaient quelque analogie entre eux.

J'aurais pu augmenter cet ouvrage de plusieurs autres chapitres; mais comme je me propose de réunir et de classer entre eux les divers mémoires que j'ai publiés sur la géométrie descriptive, dans le Journal de l'École polytechnique, dans le Bulletin de la société philomatique, dans la Correspondance mathématique et physique rédigée par M. Quetelet de Bruxelles, et dans le Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par M. Liouville, et de former ainsi un volume qui, avec celui que je publie aujourd'hui, formera un *complément de géométrie descriptive*, c'est dans cette seconde publication que je placerai diverses notes sur des recherches géométriques non encore publiées.

Dans le premier chapitre de cet ouvrage, que je soumets au jugement des savants et des ingénieurs qui aiment et cultivent la géométrie descriptive, je traite des propriétés des hélicoïdes coniques, et je démontre les analogies qui existent entre ces surfaces et les surfaces hélicoïdes cylindriques.

Dans le second chapitre, je démontre les propriétés des trois spirales d'Archimède, logarithmique et hyperbolique, en les regardant comme la projection sur un certain plan de trois spirales à double courbure; et je crois

que les propriétés de ces courbes à double courbure n'avaient point encore été étudiées.

Dans le troisième chapitre, j'essaye d'énumérer les courbes coniques du troisième et du quatrième degré et de les classer par leurs points singuliers. Je résous ensuite un certain nombre de problèmes nouveaux au moyen des courbes d'erreur.

Dans le quatrième chapitre, je m'occupe du problème des éclipses; la solution que je donne n'est point *astronomique*, mais si les trois corps avaient des dimensions moindres et étaient à des distances moindres les uns des autres, la solution graphique que j'expose résoudrait complétement la question. C'est donc seulement comme *exercice* de géométrie descriptive que je m'occupe dans ce chapitre du problème des éclipses.

Dans le cinquième chapitre, je traite d'une courbe nouvelle et encore non étudiée, de l'épicycloïde annulaire, courbe à double courbure engendrée par un point d'un cercle roulant angulairement sur un autre cercle.

Cette courbe se présente dans les applications et ainsi dans les chemins de fer et dans les engrenages. Je crois que jusqu'à présent personne n'en a fait mention et que cette courbe est une nouveauté en géométrie.

Dans le sixième chapitre, je cherche le centre et le rayon d'une sphère satisfaisant à quatre conditions, ces conditions étant de passer par des points ou d'être tangente à des droites ou d'être tangente à des plans. Dans les traités de géométrie descriptive publiés jusqu'à ce jour on ne donne la solution que des deux problèmes suivants: 1° sphère passant par quatre points; 2° sphère tangente à quatre plans.

Je termine ce chapitre par des questions relatives aux engrenages, en cherchant la surface lieu des points de l'espace dont les distances à deux axes fixes sont dans un rapport constant.

Dans le septième chapitre, je développe la théorie des infiniment petits en géométrie descriptive, et je résous diverses questions et divers problèmes en me servant de cette théorie que je crois nouvelle en plusieurs points et dont il me semble que la rigueur ne peut être contestée.

# DE LA NOTATION

## EMPLOYÉE DANS CET OUVRAGE.

Il est nécessaire d'expliquer la notation adoptée dans cet ouvrage, et d'en faire ressortir les avantages.

1° Un point de l'espace est représenté par une petite lettre (lettre minuscule) et ainsi par $m$, ou $n$, ou $a$, ou $b$, ou $x$, etc., et ses projections par la même lettre accompagnée de l'indice $v$ ou $h$, suivant que la projection du point est sur le plan vertical ou sur le plan horizontal.

Ainsi $m^v$ ou $n^v$ ou $x^v$, etc., désigne la projection verticale du point $m$ ou du point $n$ ou du point $x$, etc. situé dans l'espace.

Ainsi $m^h$ ou $n^h$ ou $x^h$, etc., désigne la projection horizontale du même point $m$ ou du même point $n$ ou du même point $x$, etc. de l'espace.

2° Une droite est désignée par une grande lettre (lettre majuscule) ou une lettre grecque, ainsi on dit : la droite A, ou D, ou Y, ou $\beta$, ou $\gamma$, ou $\delta$, etc., et ses projections prennent les indices $v$ ou $h$, et ainsi on a : $D^h$ et $D^v$, projections horizontale et verticale de la droite D située dans l'espace, etc.

3° Une courbe est toujours désignée par une grande lettre ou une lettre grecque, et ses projections portent les indices $v$ et $h$ comme pour la droite.

4° Un plan est désigné par une grande lettre, ainsi on dit : le plan P, on le plan Q, ou le plan X, etc., et ses traces sont désignées, la trace horizontale par H et la trace verticale par V, et de plus ces lettres H et V prennent pour indice le nom du plan dont elles désignent les traces, ainsi $H^p$ et $V^p$ désignent les traces horizontale et verticale du plan P, etc.

Il y a bientôt quinze ans que j'ai adopté cette notation dans mes cours de géométrie descriptive et j'ai lieu de m'en applaudir, car les élèves peuvent, au moyen de cette notation, sténographier sur la figure même et à mesure qu'ils la construisent, les raisonnements géométriques qui les conduisent à faire telle ou telle construction graphique.

On remarquera sans peine que cette notation a le grand avantage de pouvoir *démontrer dans l'espace*, car on peut parler du point $m$, de la droite D, du plan P, et l'élève lit sur l'*épure* le point $m$ dont les points $m^v$ et $m^h$ sont les projections, la droite D dont les droites $D^v$ et $D^h$ sont les projections, le plan P dont les droites $H^p$ et $V^p$ sont les traces, etc.

Par ce moyen l'*épure* se trouve intimement liée à la démonstration *orale* et la complète, et la démonstration est plus *brève* et de plus peut être donnée de manière à ce que (suivant une expression admise) en parlant dans l'espace, l'élève apprend à *lire dans l'espace*. Par l'emploi de cette notation, l'élève parvient en peu de temps à voir comment seront les projections d'un système de l'espace et ainsi apprend l'*art de projeter* un système de l'espace, et en même temps il acquiert l'habitude de concevoir les relations de position qui existent entre les points, les lignes, les plans qui composent un système de l'espace, en regardant sur une *épure* les projections horizontales et verticales de ces

divers points et de ces diverses lignes, et les traces horizontales et verticales de ces divers plans.

Les figures qui composent les planches annexées à cet ouvrage, sont de deux sortes.

Les premières sont des figures *en perspective* représentant à peu près les relations de position qui doivent exister entre les points et les lignes dont on parle. Ces figures ne servent qu'à aider l'esprit du lecteur et à lui permettre de mieux concevoir la forme véritable du système de l'espace dont on s'occupe et dont on cherche les propriétés géométriques.

Les secondes sont des *épures*, ces figures sont construites rigoureusement à la règle et au compas; les résultats graphiques auxquels on est conduit par leur construction, sont ensuite traduits en langage géométrique dans le texte.

Les *épures* sont faciles à reconnaître parmi les figures tracées sur chacune des planches de cet ouvrage, parce que l'on y voit toujours une *ligne de terre* désignée par les lettres L et T; et pour mieux distinguer cette ligne de terre des autres droites tracées sur l'*épure*, on a eu le soin d'y faire graver en dessous une suite de petites hachures.

Entre la *géométrie descriptive* ou *langue graphique*, et l'*analyse* ou *langue algébrique* il y a un point de ressemblance qu'il est bon d'indiquer.

Ainsi, étant donné un système (de l'espace) composé de points, de lignes, de plans, de surfaces, on commence en *analyse* par écrire les *équations* qui représentent ces points, ces lignes, ces plans, ces surfaces, et c'est ce qu'on appelle *mettre le problème en équation*; ensuite on combine ces équations entre elles (d'après les règles de l'*analyse*), et l'on arrive à un résultat exprimé par une formule algébrique que l'on traduit en *langage ordinaire*.

En *géométrie descriptive* on *trace* sur l'*épure* les projections des points et des lignes, les traces des plans, les projections des lignes qui déterminent chacune des surfaces données, ces lignes étant choisies en vertu du mode de génération de chaque surface donnée.

Ce premier travail est en langue graphique l'analogue de la mise en équation dans la langue algébrique; ensuite on combine les projections des points, les projections des lignes, les traces des plans, les projections des lignes qui représentent les surfaces, d'après les règles *graphiques*, et on arrive à un *résultat graphique* que l'on traduit en *langage ordinaire*.

C'est ainsi, qu'ayant mis un problème en équation, si par la combinaison des équations du problème on arrive aux trois équations finales (1) $y = ax + p'$, (2) $y = a'x + q$ et (3) $aa' + 1 = 0$, on traduit le résultat analytique en *langage ordinaire* en disant :

Les deux droites représentées par les équations (1) et (2) sont rectangulaires entre elles en vertu de l'équation (3) de condition.

Et c'est ainsi, que par la combinaison des lignes tracées sur une *épure*, étant arrivé aux traces $H^p$ et $V^p$ d'un plan P, si la droite $H^p$ est perpendiculaire à la ligne de terre, on traduit ce résultat *graphique* en *langage ordinaire*, en disant : le plan P dont on vient de construire les traces est perpendiculaire au plan vertical de projection; ou bien étant arrivé par une série de constructions graphiques aux projections $A^h$, $A^v$ et $B^h$, $B^v$ (de deux droites A et B) telles que la droite $A^v$ soit parallèle à la ligne de terre et que les droites $B^h$ et $A^h$ soient rectangulaires entre elles, on traduit ce *résultat graphique* en *langage ordinaire* en disant, la droite A est horizontale et les deux droites A et B (situées dans l'espace) se coupent à angle droit.

Au reste, en examinant de près de quelle manière procèdent la géométrie descriptive et l'analyse dans la solution des questions de géométrie, on est conduit à reconnaître divers autres points de ressemblance, entre les deux langues graphique et algébrique, non point quant aux *méthodes*, mais dans les *moyens* de solution.

# DÉVELOPPEMENTS

DE

# GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.



## CHAPITRE PREMIER.

DES SURFACES HÉLICOÏDALES CYLINDRIQUES ET CONIQUES ; DES DÉVELOPPANTES PLANES ET SPHÉRIQUES, RALLONGÉES ET RACCOURCIES.

### § Ier.

*Des développantes planes rallongées et raccourcies.*

Étant donné sur un plan un cercle C du rayon R, on sait que si l'on enroule un fil sur ce cercle et qu'on le déroule ensuite, un des points de ce fil décrit sur le plan du cercle une courbe $\delta$ qui a reçu le nom de *développante plane et circulaire*, et l'on sait que les tangentes au cercle C sont normales à la courbe $\delta$.

Nous donnerons à la courbe $\delta$ le nom de *développante plane et parfaite* du cercle C, pour la distinguer des développantes rallongées ou raccourcies, qui seront dites *imparfaites*.

Si l'on prend sur le cercle C (*fig.* 1) une suite de points $m$, $m'$, $m''$..... équidistants entre eux, et si l'on mène en chacun de ces points les tangentes au cercle C, savoir : $t$, $t'$, $t''$..... ces tangentes couperont la courbe $\delta$ (développante parfaite du cercle C) en les points $n$, $n'$, $n''$.....

Si sur $t$ on porte à partir du point $n$ une longueur égale à $l$, on placera sur $t$ un point $x_1$; si sur $t'$ à partir du point $n'$ on porte une longueur égale à $2l$, on placera sur $t'$ un point $x'_1$; en opérant de même pour $t''$, et portant dès lors $3l$ de $n''$ en $x''_1$, on aura une suite de points $x_1$, $x'_1$, $x''_1$..... (les longueurs $l$, $2l$, $3l$..... ayant été portées dans le même sens) qui détermineront une courbe qui sera dite *développante imparfaite* du cercle C.

La *développante imparfaite* sera une *développante rallongée* $\delta'$ si les points $x_1$, $x'_1$,

$x''_{,}$..... sont placés au delà de la courbe $\delta$ par rapport au cercle C, et elle sera une *développante raccourcie* $\mathfrak{S}$; si au contraire les points $x_{,}$, $x'_{,}$, $x''_{,}$..... sont placés ainsi que les points $x$, $x'$, $x''$..... entre le cercle C et la courbe $\delta$.

Cela posé :

Le premier problème dont la solution doit être proposée est celui-ci :

Une développante imparfaite $\mathfrak{S}$ *raccourcie* ou $\mathfrak{S}'$ *rallongée* étant donnée par la construction géométrique précédente de ses divers points, construire la tangente en un point $x$ de $\mathfrak{S}$ ou $x_{,}$ de $\mathfrak{S}'$.

Nous allons résoudre le problème de la construction de la tangente en un point de la développante circulaire *rallongée* ou *raccourcie*, en nous servant de diverses propriétés des surfaces *hélicoïdes* gauche ou développable, et en même temps nous montrerons comment la *spirale* d'Archimède et les développantes parfaites et imparfaites du cercle se trouvent liées les unes aux autres sous le point de vue *de la génération géométrique*.

Plus loin nous montrerons que la spirale d'Archimède est accompagnée de deux spirales du même genre auxquelles on doit donner le nom de *spirales imparfaites* d'Archimède, l'une étant *rallongée* et l'autre *raccourcie*.

Concevons un cylindre B (vertical et de révolution), ayant pour axe une droite A et pour section droite un cercle C du rayon R.

Traçons sur le cylindre B une hélice E coupant les génératrices de ce cylindre B sous l'angle constant $\alpha$.

Concevons, par un point $y$ de la courbe E, trois droites : l'une $\theta$ tangente à l'hélice E et faisant dès lors avec la génératrice G du cylindre B (laquelle droite passe par le point $y$) un angle $\alpha$, l'autre D faisant avec $\mathfrak{S}$ un angle $\gamma$ plus grand que $\alpha$; et enfin, une troisième droite D' faisant avec G un angle $\gamma'$ plus petit que $\alpha$.

Concevons que les trois droites $\theta$, D, D', sont situées d'un même côté par rapport à la génératrice G et toutes trois dans le plan T tangent au cylindre B suivant G, et que dès lors les angles $\alpha$, $\gamma$, $\gamma'$ sont aigus.

Cela posé :

Si l'on fait mouvoir les trois droites $\theta$, D, D', sur l'hélice E de manière à faire toujours le même angle avec l'axe A, et à être en chacune de leurs positions D parallèle à l'une des génératrices d'un cône S de révolution ayant A pour axe et ayant son demi-angle au sommet égal à $\gamma$; $\theta$ parallèle à l'une des génératrices d'un cône $\Sigma$ de révolution ayant A pour axe et son demi-angle au sommet égal à $\alpha$; D' parallèle à la génératrice d'un cône S' de révolution ayant A pour axe et son demi-angle au sommet égal à $\gamma'$; ces trois droites engendreront trois surfaces *hélicoïdes* $D_{,}$, $\theta_{,}$, $D'_{,}$.

Les hélicoïdes D, et D', seront *gauches* et l'hélicoïde θ, sera *développable*, l'arête de rebroussement de θ, étant l'hélice E.

Cela posé :

Si l'on coupe ces trois surfaces par un plan P perpendiculaire à l'axe A, on obtiendra trois courbes $\sigma$ sur D., $\sigma'$ sur D', et $\delta$ sur θ, qui seront : $\sigma$ et $\sigma'$ des développantes *imparfaites* du cercle C section du cylindre B par le plan P, la première $\sigma$ étant une développante *rallongée* et la seconde une développante *raccourcie*, et $\delta$ sera une développante *parfaite* du même cercle C.

Et en effet :

Si par la génératrice G on mène le plan T tangent au cylindre B et que l'on développe ce cylindre B sur le plan T, l'hélice E se transformera en sa tangente θ; de sorte qu'après le développement, les trois droites D, D' et θ passeront par le point $y$.

Dès lors $pq$ (*fig.* 2) sera la longueur qu'il faudra porter sur $t$ (*fig.* 1) tangente au cercle C au point $m$ et de $m$ en $n$ pour avoir le point $n$ de la courbe $\delta$; et de même en portant $pv$ (*fig.* 2) de $m$ en $x$ (*fig.* 1), on aura un point $x$ de la courbe $\sigma'$; et en portant $pk$ (*fig.* 2) de $m$ en $x_{,}$ (*fig.* 1) on aura un point $x_{,}$ de la courbe $\sigma$.

Et de même, en considérant la tangente $t'$ au point $m'$ du cercle C (*fig.* 1), l'on aura l'arc $mm'$ rectifié égal à la droite $pp'$ (*fig.* 2), et dès lors on devra porter $p'q$ (*fig.* 2) sur $t'$ (*fig.* 1) de $m'$ en $n'$ ; $p'v'$ (*fig.* 2) de $m'$ en $x'$ (*fig.* 1) et $p'k'$ (*fig.* 2) de $m'$ en $x'_{,}$ (*fig.* 1), et l'on aura un nouveau point $n'$ de $\delta$, $x'$ de $\sigma'$ et $x'_{,}$ de $\sigma$.

La construction des trois courbes $\delta$, $\sigma$, $\sigma'$ (*fig.* 1) étant bien comprise, par ce qui vient d'être dit, il est évident, par la *fig.* 2, que si :

1° $\overline{p'q}=2.\overline{pq}$ on aura $\overline{qv'}=2.\overline{qv}$ et $\overline{qk'}=2.\overline{qk}$,

2° $\overline{p''q}=3.\overline{pq}$ on aura $\overline{qv''}=2.\overline{qv}$ et $\overline{qk''}=3.\overline{qk}$.

Par conséquent, les courbes-sections faites dans les hélicoïdes D, et D', par le plan P sont bien des développantes *rallongée* et *raccourcie* du cercle C.

*Construction de la tangente à la développante plane rallongée ou raccourcie.*

D'après ce qui précède, il sera facile de résoudre le problème proposé, savoir : Construire la tangente en un point $x$ de la développante *rallongée* $\sigma'$ ou $x_{,}$ de la développante *raccourcie* $\sigma$.

Et en effet :

Il suffira de construire au point $x$ de l'*hélicoïde* D', ou au point $x_{,}$ de l'hélicoïde D, le plan tangent Θ, lequel coupera le plan P suivant la tangente demandée.

Or, on sait construire ce plan tangent Θ.

Car il suffit de concevoir une hélice cylindrique H′ tracée sur l'hélicoïde D′, et passant par le point $x$. Cette hélice H′ aura même *pas* que l'hélice E et son rayon sera égal à la distance du point $x$ à l'axe A.

On connaîtra donc l'inclinaison de cette hélice H′ sur l'axe A et par suite sa tangente $\lambda'$ au point $x$.

Cela posé :

Si l'on considère un paraboloïde hyperbolique I′ ayant pour directrices droites, les tangentes, $\theta$ à l'hélice E au point $y$ et $\lambda'$ à l'hélice H′ au point $x$, et pour plan directeur le plan $\Delta$ tangent au cône S′ et mené à ce cône suivant la génératrice $d'$ parallèle à la droite D′ génératrice de la surface *hélicoïde* D′, laquelle génératrice passe par les points $x$ et $y$; ce paraboloïde I′ sera tangent à la surface D′, tout le long de D′, par conséquent son plan tangent en $x$ sera tangent à D′, et ne sera autre que $\Theta$.

Il suffira donc pour déterminer le plan $\Theta$, de faire passer un plan par les droites D′ et $\lambda'$; et ce plan $\Theta$ coupera le plan P, suivant la tangente au point $x$ à la développante *imparfaite* $6'$.

Le problème proposé est donc complétement résolu (*).

*Remarque.* Au sujet de la construction du plan tangent à l'hélicoïde D′, je ferai la remarque suivante.

La surface hélicoïde a été donnée, comme engendrée par une droite se mouvant dans l'espace :

1° En s'appuyant sur une courbe ;

2° En restant tangente à la surface qui contient cette courbe;

3° En restant parallèle aux diverses génératrices d'un cône.

En vertu de ces trois conditions le mouvement de la droite est complétement déterminé, et la surface engendrée est complétement définie.

Il faudrait pouvoir, en vertu de ce mode de génération, construire le plan tangent en un point de la surface.

Jusqu'à présent la géométrie descriptive n'a pu, en ne s'appuyant que sur c mode de génération, résoudre ce problème.

On est toujours obligé de chercher sur la surface une seconde courbe passant par le point donné et à laquelle on sache construire une tangente.

---

(*) Dans l'ouvrage que j'ai publié sur les engrenages et qui a pour titre : *Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes situés ou non dans un même plan*, imprimé en 1842 par Bachelier, j'ai donné la construction de la tangente en un point de la développante hyperboloïdique du cercle, en admettant que l'on savait construire la tangente à une développante plane, rallongée ou raccourcie du cercle.

Ainsi, pour l'hélicoïde $D'_1$, on peut se procurer une hélice cylindrique $H'$ et passant par le point $x$; et l'on se procure cette courbe $H'$ sans laquelle la solution du problème serait impossible, parce que le mode de génération de tout hélicoïde cylindrique nous permet de reconnaître que tout cylindre concentrique au cylindre B coupe des hélicoïdes tels que $D_1$, $\theta_1$, $D'_1$ *gauches* ou *développables* suivant des hélices ayant même *pas* que l'hélice directrice E.

Mais, je le repète, pour la plupart des surfaces gauches ayant le mode de génération indiquée ci-dessus, le problème du plan tangent reste insoluble, à moins que l'on ne parvienne à découvrir une courbe qui, tracée sur la surface donnée, soit telle qu'on sache lui construire la tangente en un quelconque de ses points.

Je regarde le problème du plan tangent à une surface gauche engendrée comme il a été dit précédemment, comme devant *probablement* rester insoluble par les méthodes de la géométrie descriptive. Ce problème ne peut être résolu complétement et dans tous les cas et avec tous les modes de génération, que par l'*analyse*; en un mot, le problème est toujours soluble par l'*analyse* lorsque l'on a l'*équation* de la surface; il ne l'est que dans des cas très-particuliers, par les méthodes graphiques ou la *géométrie descriptive*, lorsque la surface est définie par le mode précédent de génération.

### *De la spirale d'Archimède.*

Le cylindre B peut se réduire à son axe A; dès lors l'hélice E se réduit à cet axe A.

Les trois hélicoïdes $D_1$, $\theta_1$, $D'_1$ deviennent alors trois hélicoïdes gauches engendrées par trois droites D, $\theta$, $D'$ coupant constamment l'axe A, la première sous l'angle $\gamma$, la seconde sous l'angle $\alpha$ et la troisième sous l'angle $\gamma'$ et restant dès lors, pendant leur mouvement de rotation, D parallèle au cône S, $\theta$ parallèle au cône $\Sigma$ et $D'$ parallèle au cône $S'$; de plus, ces trois droites se meuvent (puisque l'hélice E s'est transformée en la droite A, ou en d'autres termes que l'axe A doit être considéré comme une hélice cylindrique dont le rayon est nul) de telle manière que les espaces parcourus sur l'axe A sont proportionnels aux angles de rotation autour de cet axe A.

Il est dès lors évident que tout plan P perpendiculaire à l'axe A coupera la surface $\theta_1$ suivant une spirale d'Archimède *parfaite*, et chacune des surfaces $D_1$ et $D'_1$ suivant une spirale d'Archimède *imparfaite*.

La section faite dans la surface $D_1$ par le plan P sera une spirale d'Archimède *rallongée*, et celle faite dans la surface $D'_1$ sera une spirale d'Archimède *raccourcie*.

*Construction de la tangente à la spirale d'Archimède parfaite ou imparfaite.*

Le problème que l'on doit se proposer tout d'abord est celui-ci : Construire la tangente en un point d'une spirale d'Archimède *parfaite* ou *imparfaite*.

Pour résoudre ce problème, il suffira de construire l'hélicoïde gauche qui a pour trace la courbe donnée et ensuite le plan tangent à cette surface pour le point donné sur la courbe.

Or, 1° étant donnée une spirale d'Archimède *parfaite* $\delta$, on connaît, je suppose, l'origine $o$ de cette courbe, on peut donc par ce point $o$ élever un axe A perpendiculaire au plan P de la courbe $\delta$. Cela fait, on fera mouvoir une droite $\theta$ sur l'axe A et la courbe $\delta$ de manière à ce qu'elle coupe constamment cet axe A sous un angle constant, mais arbitraire $\alpha$; on aura dès lors la surface gauche $\theta_1$.

Cela posé :

Par le point $x$ de la courbe $\delta$ l'on fera passer sur la surface $\theta_1$ une hélice cylindrique H, dont on connaîtra le *pas* puisque l'angle $\alpha$ est donné, et le rayon puisqu'il est égal à la distance du point $x$ à l'axe A, et par suite on connaîtra la tangente $\lambda$ au point $x$ de H. Le plan tangent $\Theta$ au point $x$ de la surface $\theta_1$ passera donc par $\lambda$ et $\theta$, et ce plan $\Theta$ coupera le plan P suivant la tangente demandée.

Or, 2° étant donnée une spirale d'Archimède *imparfaite* $\delta$, on pourra toujours concevoir la surface hélicoïde D, engendrée par une droite D, se mouvant sur $\delta$ et sur l'axe A, et de manière que cette droite D coupe, sous un angle constant et arbitraire $\gamma$, l'axe A.

On pourra toujours tracer sur la surface D, une hélice cylindrique H' dont on connaîtra le *pas* puisque l'angle $\gamma$ est donné, et le rayon puisqu'il est égal à la distance du point $x_1$ à l'axe A ; par suite on connaîtra la tangente $\lambda'$ à l'hélice H' pour le point $x_1$.

Le plan tangent $\Theta_1$ au point $x_1$ de la surface D, passera donc par $\lambda'$ et D, et ce plan coupera le plan P suivant la tangente demandée.

On voit donc par ce qui précède que les deux courbes, spirale d'Archimède parfaite et développante parfaite d'un cercle, tout comme leurs dérivées, spirale d'Archimède imparfaite et développante circulaire imparfaite, proviennent de l'intersection d'un plan perpendiculaire à l'axe A et de surfaces hélicoïdes gauches ou développables, et que la tangente en un des points de ces courbes se construit de la même manière et par le même procédé graphique, au moyen d'un plan tangent à une surface hélicoïdale.

**Résolvons maintenant le problème suivant :**

*Par deux hélices cylindriques et circulaires et concentriques et ayant même pas, et rampant sur les cylindres dans le même sens, on peut toujours faire passer une infinité de surfaces hélicoïdales gauches et une seule surface hélicoïde développable.*

Concevons (*fig.* 3) deux cercles concentriques ; ils représenteront sur un plan horizontal P, et perpendiculaire à l'axe A, les sections droites des deux cylindres de révolution sur lesquels sont tracés les deux hélices de même *pas* E et E′.

Ces deux cercles représenteront aussi les projections orthogonales $E^h$ et $E'^h$ des deux hélices données.

Supposons que le plan horizontal P coupe l'hélice E au point $a$ et l'hélice E′ au point $a'$.

Menons une droite $D^h$ dirigée arbitrairement dans le plan P, elle coupera le cercle $E^h$ au point $m^h$ et le cercle $E'^h$ au point $m'^h$.

Ces deux points seront les projections sur le plan P des points $m$ et $m'$, en laquelle la droite D, dont $D^h$ est la projection, s'appuie sur les courbes E et E′.

Et comme on connaît le *pas* $h$ des deux hélices E et E′, il sera facile, par une construction graphique (au moyen des procédés de la géométrie descriptive), de connaître la position de la droite D dans l'espace.

Et en effet, il sera facile d'avoir les hauteurs des deux points $m$ et $m'$ au-dessus du plan horizontal P,

Car désignant par R et R′ les rayons des cercles $E^h$ et $E'^h$, il faudra (*fig.* 4) tracer la droite indéfinie TB, élever en B la perpendiculaire Bc et prendre Bc égal à $h$ ou au *pas* des hélices données ;

Puis prendre BT égal à $2\pi R$ et BT′ égal à $2\pi R'$ ;

Joindre le point C aux points T et T′, et, cela fait,

Porter l'arc rectifié (*fig.* 3) $am^h$ de T en M (*fig* 4) et l'arc rectifié (*fig.* 3) $a'm'^h$ de T′ en M′ (*fig.* 4) ; les deux ordonnées MQ et M′Q′ donneront les hauteurs des points $m$ et $m'$ au-dessus du plan horizontal P.

Cela fait :

Si l'on abaisse du point $o$, centre commun aux deux cercles $E^h$ et $E'^h$, une perpendiculaire $op^h$ sur $D^h$, on aura, en traçant le cercle $E''^h$ avec le rayon $op^h$ et du point $o$ comme centre, la projection sur le plan P de l'hélice E″ tracé sur le cylindre B″ auquel la droite D restera tangente pendant son mouvement de rotation, et cette hélice E″ aura même *pas* $h$ que les hélices E et E′ et sera de plus le lieu des points de contact $p$ de la droite D et du cylindre B″.

La droite D engendrera donc, en s'appuyant sur les deux hélices E et E′ données et le cylindre B″, une surface hélicoïde *gauche* ; si cette droite D coupe

l'hélice E″, et au contraire une surface hélicoïde *développable*, si cette droite D est tangente à l'hélice E″.

Or, si l'on se rappelle que la droite $D^h$ a été tracée arbitrairement sur le plan P, ce qu'on vient de dire aura lieu pour toute autre droite D′ ayant $D'^h$ pour projection ; par conséquent on doit conclure : que l'on peut engendrer une infinité de surfaces hélicoïdes gauches au moyen d'une droite s'appuyant sur deux hélices données, ayant même *pas* et même *axe*.

Démontrons maintenant que parmi ces hélicoïdes gauches il peut en exister un qui soit développable.

Si la surface hélicoïde était développable, la droite D serait tangente à l'hélice E″ et au point $p$, et dès lors les tangentes $t$ en $m$ à l'hélice E et $t'$ en $m'$ à l'hélice E′ seraient avec la génératrice D dans un même plan T, tangent à la surface developpable tout le long de la génératrice D.

Les deux tangentes $t$ et $t'$ étant supposées dans un même plan T, se couperont dès lors en un point $b$ dont la projection $b^h$ serait à l'intersection des projections $t^h$ et $t'^h$ des deux tangentes.

Or, si par ce point $b$ on fait passer un plan horizontal Q, il coupera :

1° L'hélicoïde developpable qui a l'hélice E″ pour arête de rebroussement suivant une développante K″ du cercle $E''^h$.

2° L'hélicoïde développable qui a l'hélice E pour arête de rebroussement suivant une développante K du cercle $E^h$.

3° L'hélicoïde développable qui a l'hélice E′ pour arête de rebroussement suivant une développante K′ du cercle $E'^h$.

Et il est évident que les deux développantes K et K′ se couperont au point $b$.

Si donc on décrit sur le plan P :

1° La développante K, qui a pour origine le point $a$ de l'hélice E, point situé sur le plan P;

2° La développante K′, qui a pour origine le point $a'$ de l'hélice E′, point situé sur le plan P; ces deux courbes K et K′ se couperont en un point $b$, duquel on mènera les deux tangentes $t'^h$ et $t^h$ aux cercles $E'^h$ et $E^h$.

La droite $D^h$, passant par les points $m'^h$ et $m^h$, qui sont les points de contact des cercles et des tangentes, sera la projection de la génératrice droite D de la surface hélicoïde développable demandée, et l'on pourra, par ce qui a été dit plus haut, construire l'hélice E″, arête de rebroussement de cette surface développable.

D'après ce que nous venons de dire, on voit que :

1°. Toute surface hélicoïde gauche, engendrée par une droite s'appuyant sur es hélices données E et E′ et sur un cylindre directeur B‴ plus petit quo le

cylindre B″ qui contient l'hélice E″, sera coupée par un plan P horizontal, ou, en d'autres termes, perpendiculaire à l'axe A, suivant une développante *raccourcie* du cercle qui sert de base au cylindre directeur B‴.

2° Et toute surface hélicoïde gauche, engendrée par une droite s'appuyant sur les hélices données E et E′ et sur un cylindre directeur B‴ plus grand que le cylindre B″ qui contient l'hélice E″, sera coupée par le même plan P, suivant une développante *rallongée* du cercle qui sert de base au cylindre directeur B‴.

3° Et que la surface hélicoïde, engendrée par une droite s'appuyant sur les hélices données E et E′ et ayant pour cylindre directeur le cylindre B″, sera la seule qui soit développable et coupée dès lors par le même plan P, suivant une développante *parfaite* du cercle qui sert de base au cylindre directeur B″.

Démontrons maintenant qu'il n'existe jamais, lorsqu'elle existe, qu'une seule surface hélicoïde développable, passant par les deux hélices E et E′, ces hélices ayant même *pas* $h$ et même axe A, et étant d'ailleurs dirigées dans le même sens; et montrons en même temps qu'il peut arriver, suivant les positions respectives des deux hélices E et E′, que la surface hélicoïde développable n'existe pas.

Les deux cercles concentriques $E^h$ et $E'^h$ (*fig.* 5) représentant les projections horizontales des deux hélices E et E′, lesquelles ont même *pas* et rampent du même côté l'une et l'autre sur leur cylindre respectif (le sens de la rotation étant indiqué par la flèche $z$), construisons la développante complète ($\delta$, $\delta'$) du cercle $E^h$, l'origine ou point de rebroussement de cette développante étant en $a$; cette courbe coupera le cercle $E'^h$ en deux points $b$ et $b'$.

Or, il est évident que si l'hélice E′ a son origine sur le plan horizontal P placée en $d$ de telle manière que ce point soit situé entre les points $b$ et $b'$, les deux branches $\varphi$ et $\varphi'$ de la développante du cercle $E'^h$, dont l'origine ou point de rebroussement sera en $d$, ne rencontreront pas, soit la branche $\delta$, soit la branche $\delta'$ de la développante du cercle $E^h$.

Pour que cela ait lieu, il faut que l'origine de l'hélice E sur le plan horizontal P, soit en $b$ ou $b'$, ou bien en un point $k$ placé au delà de $b$ ou en un point $k'$ situé en deçà de $b'$.

Alors la branche $\varphi$ de la développante de $E'^h$ (l'origine de l'hélice E′ étant en $k$ sur le plan P) coupera la branche $\delta$ en un point $p$; ou la branche $\varphi'$ de la développante de $E'^h$ (l'origine de l'hélice E′ étant en $k'$ sur le plan P) coupera la branche $\delta'$ en un point $p'$.

On voit donc très-clairement, que tant que l'origine de l'hélice E′ sera située en un point de l'arc $bb'$, il sera impossible de placer les deux hélices E et E sur une surface développable; mais que pour toutes les autres positions de l'origine

de l'hélice E', on trouvera une surface développable, et une seule, passant par les deux hélices E et E'.

Remarquons que lorsque l'origine de l'hélice E' sera en $b$ ou $b'$, l'hélice E sera l'arête de rebroussement de la surface développable cherchée, et que si l'origine de l'hélice E' est située en $k$ ou $k'$, l'arête de rebroussement de la surface développable cherchée sera une hélice qui se projettera sur le plan P, suivant un cercle d'un rayon plus petit que celui du cercle $E^h$.

Et dès lors, si l'origine de l'hélice E' étant placée comme en $d$, la surface développable cherchée pouvait exister, son arête de rebroussement serait une hélice dont la projection sur le plan P serait un cercle d'un rayon plus grand que celui du cercle $E^h$, en sorte que l'hélice E ne pourrait évidemment être située sur cette surface développable en même temps que l'hélice E'.

*Remarque.* La solution du problème précédent peut trouver son application dans la *coupe des pierres*, lorsqu'il s'agit de *douelles rampantes*.

Ainsi, dans le cas d'une vis St.-Gilles, où la douelle est une surface annulaire rampante, et où les arêtes de douelle sont des hélices cylindriques de même *pas* et tracées sur des cylindres concentriques de rayons différents, on peut préférer employer pour surface de joint une surface développable à une surface gauche.

Il faut donc, dès lors, savoir faire passer par deux hélices cylindriques de même *pas* et dirigées dans le même sens, une surface hélicoïde développable, et reconnaître si le problème est possible avec les *données*.

Et comme en coupe des pierres, il vaut mieux employer des surfaces de *joints* développables que des surfaces gauches, parce que la taille des pierres est plus précise et qu'il est important pour la solidité des voûtes que les *joints* soient taillés avec soin, on voit que le problème précédent n'est pas sans intérêt pour la *pratique*.

### *Des développantes rallongées et raccourcies à double courbure.*

Nous avons vu ci-dessus, qu'outre la développante *parfaite* d'un cercle, il existait une infinité de développantes *imparfaites* de ce même cercle, ces développantes *rallongées* ou *raccourcies* étant planes, étant tracées sur le plan du cercle.

Mais si l'on considère la développante du cercle comme étant la développante d'une hélice cylindrique, alors on peut arriver à des développantes *imparfaites* de l'hélice cylindrique, courbes qui pourront être *rallongées* ou *raccourcies* et qui seront à double courbure.

Et en effet :

On sait qu'une courbe plane a une infinité de développées qui sont des hélices, tracées sur le cylindre ayant pour section droite la développée plane de

cette courbe $\delta$. Si donc nous considérons la courbe $\delta$ développante parfaite d'un cercle C, toutes les développées de $\delta$ seront des hélices E, E', E'',..... tracées sur le cylindre B ayant le cercle C pour section droite.

Considérons une de ces hélices et ainsi l'hélice E par exemple.

Les points $m$, $m'$, $m''$,..... de l'hélice E (*fig.* 1), équidistants entre eux sur cette hélice, se projetteront orthogonalement en $m$, $m'$, $m''$..... sur le cercle C, projection orthogonale de l'hélice E, et ces points $m$, $m'$, $m''$,..... seront aussi équidistants entre eux.

Les génératrices G, G', G''..... de l'hélicoïde développable $\Sigma$ ayant la courbe E pour arête de rebroussement se projetteront suivant les tangentes au cercle C, savoir : en $mt$, $m't'$, $m''t''$..... et si l'on conçoit par la développante imparfaite et raccourcie et plane $\mathfrak{G}$ un cylindre vertical, il coupera la surface $\Sigma$ suivant une courbe $\gamma$ à laquelle nous donnerons le nom de développante imparfaite et raccourcie de l'hélice E.

De même, si l'on conçoit par la développante imparfaite et rallongée et plane $\mathfrak{G}'$ un cylindre vertical, il coupera la surface $\Sigma$ suivant une courbe $\gamma'$ à laquelle nous donnerons le nom de développante imparfaite et rallongée de l'hélice E.

Et il est évident que les courbes $\gamma$ et $\gamma'$ seront des courbes à double courbure.

Cela posé :

Il est évident que si l'on désigne par $y$, $y'$, $y''$..... les points de la courbe $\gamma$ qui se projettent en $x$, $x'$, $x''$... sur la courbe $\mathfrak{G}$, on aura (*fig.* 1) :

$$\frac{nm}{xm} = \frac{nm}{ym}, \quad \text{et} \quad \frac{n'm'}{x'm'} = \frac{n'm'}{y'm'},$$

et ainsi de suite.

En sorte que la construction de la courbe $\gamma$ ou $\gamma'$ sera la même sur la surface $\Sigma$ que celle employée sur le plan horizontal P, pour obtenir les courbes $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$.

C'est ici le lieu d'entrer dans quelques nouveaux détails touchant la génération de ces courbes $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$, $\gamma$ et $\gamma'$.

Concevons deux cylindres B et B' de révolution tangents l'un à l'autre suivant une génératrice L, et ayant pour section droite, le premier un cercle C du rayon R, et le second un cercle C' du rayon R'.

Enroulons sur le cercle C un fil $f$ et sur le cercle C' un fil $f'$.

Supposons que ces deux fils sont fixés, le premier au cercle C par une de ses extrémités, et le deuxième au cercle C' et aussi par une des ses extrémités, et de manière à ce que les deux bouts libres se confondent et soient dirigés dans le plan des deux cercles suivant la tangente commune à ces deux cercles.

Supposons que les cercles C et C' restent fixes, et que le cylindre B tourne

autour de son axe, le fil $f$ s'enroulera ou se déroulera de dessus le cercle C, et un de ses points décrira sur le plan P une développante parfaite du cercle C, en supposant que ce plan P tourne autour de l'axe du cylindre B, et en sens inverse et avec la même vitesse de rotation imprimée au cylindre B.

Supposons maintenant que les deux fils sont noués et que le nœud soit le point du fil $f$, qui décrive sur le plan P la courbe demandée.

Si les deux cylindres B et B' tournent en sens inverse (en les supposant extérieurs l'un à l'autre) et que leurs vitesses soient dans un rapport inverse des rayons R et R', les deux fils $f$ et $f'$ s'enrouleront ou se dérouleront en restant juxtaposés, et le nœud décrira la développante parfaite du cercle C, si l'on suppose que le plan P tourne en sens inverse du cylindre B et autour de son axe avec la vitesse imprimée au cylindre B.

Mais si, tout restant dans les mêmes conditions, on imprime au cylindre B une vitesse plus petite ou plus grande, soit dans le même sens, soit en sens inverse, alors le nœud sera forcé de décrire une courbe différente.

En définitive, tout peut se réduire à ceci :

Supposer que le cylindre B tourne d'un angle $\alpha$ et dans un temps $t$, de droite à gauche, puis, que dans le même temps $t$, il tourne d'un angle $\alpha_1$ de gauche à droite; un point $m$ du fil $f$ décrira les développantes diverses du cercle C.

Le point $m$ décrira une développante parfaite si $\alpha_1 = 0$, une développante imparfaite si $\alpha_1$ est $> 0$. La développante imparfaite sera rallongée si l'angle $\alpha_1$ est décrit en sens inverse de l'angle $\alpha$; la développante imparfaite sera raccourcie si l'angle $\alpha_1$ est décrit dans le même sens que l'angle $\alpha$.

Dès lors on voit que l'on devra avoir $\alpha = m\alpha_1$.

D'où l'on déduit $\frac{\alpha + \alpha_1}{\alpha_1} =$ constante $= K$ et $\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_1} =$ constante $= K_1$ (*).

Ce qui vient d'être dit nous servira lorsque nous examinerons les développantes sphériques.

D'après ce qui a été dit plus haut, il est facile de reconnaître que si l'on coupe l'hélicoïde développable par une suite de plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe du cylindre sur lequel rampe l'hélice arête de rebroussement de la surface, toutes les sections seront des développantes parfaites et circulaires, et que si l'on coupe les hélicoïdes gauches par des plans perpendiculaires à l'axe de

(*) Ou plus simplement : supposons que le cercle C tourne autour de son centre $o$ avec une vitesse uniforme $v$, et que son plan P tourne en sens inverse autour du même point $o$, et avec une vitesse uniforme $v'$; un point $m$ du fil $f$ enroulé sur le cercle C décrira sur le plan P une développante *parfaite* si l'on a $v = v'$, *rallongée* si l'on a $v < v'$ et *raccourcie* si l'on a $v > v'$; le point $m$ se mouvant sur la ligne $f$ qui a une direction invariable et qui est tangente au cercle C.

ce cylindre les sections seront des développantes imparfaites, et qui seront rallongées ou raccourcies suivant l'angle sous lequel les génératrices de l'hélicoïde couperont les génératrices de ce cylindre.

Ainsi, l'on peut dire :

1° Si l'on se donne deux plans parallèles P et P', et sur l'un P la développante parfaite $\delta$ d'un cercle C, et que l'on fasse mouvoir une droite d'une longueur constante D de telle manière qu'elle soit toujours, pendant son mouvement, tangente au cylindre B qui a pour section droite le cercle C, l'une de ses extrémités décrivant sur le plan P la courbe $\delta$, l'autre extrémité décrira sur le plan P' une développante parfaite $\delta_,$ identique à $\delta$; et la courbe, lieu des contacts de la droite D et du cylindre B, sera une hélice E à laquelle cette droite D sera constamment tangente.

2° Si l'on se donne deux plans P et P' parallèles, et sur l'un P la développante imparfaite, raccourcie $\epsilon$ ou rallongée $\epsilon'$ d'un cercle C, et que l'on fasse mouvoir une droite d'une longueur constante D, de telle manière qu'elle soit toujours, pendant son mouvement, tangente au cylindre B qui a pour section droite le cercle C, l'une de ses extrémités décrivant sur le plan P la courbe $\epsilon$ ou la courbe $\epsilon'$, l'autre extrémité décrira sur le plan P' une développante imparfaite, raccourcie $\epsilon_,$ ou rallongée $\epsilon'_,$, identiques, la première à $\epsilon$ et la seconde à $\epsilon'$; et la courbe, lieu des contacts de la droite D et du cylindre B, sera une hélice E, que la droite mobile coupera sous un angle constant.

3° Si sur un hélicoïde développable $\Sigma$, on trace une développante parfaite $\delta$ de l'hélice E, arête de rebroussement de la surface $\Sigma$, et si l'on porte sur les diverses génératrices droites de cette surface $\Sigma$ une longueur constante à partir des divers points de la courbe $\delta$, on tracera sur la surface $\Sigma$ une développante parfaite $\delta_,$ identique à $\delta$.

4° Si sur cette même surface développable $\Sigma$ on trace une développante imparfaite à double courbure, raccourcie $\gamma$ ou rallongée $\gamma'$, et que l'on porte sur les diverses génératrices droites de la surface $\Sigma$ une longueur constante à partir des divers points de la courbe $\gamma$ ou de la courbe $\gamma'$, on tracera sur cette surface développable $\Sigma$ une développante imparfaite à double courbure, raccourcie $\gamma_,$ identique à la courbe $\gamma$, ou rallongée $\gamma'_,$ identique à la courbe $\gamma'$.

Tout ce qui précède peut être généralisé, car il est évident que tout ce que nous venons de décrire aurait lieu, quelle que fût la section droite du cylindre B; mais alors les sections $\delta$ et $\delta_,$, $\gamma$ et $\gamma_,$; $\gamma'$ et $\gamma'_,$, $\epsilon$ et $\epsilon_,$, $\epsilon'$ et $\epsilon'_,$ ne seraient plus des courbes identiques, parce que le cercle est la seule courbe plane, et l'hélice cylindrique circulaire est la seule courbe à double courbure, pour

lesquelles les développantes sont toutes identiques, quelle que soit la position de l'origine de la développante sur sa développée.

*Remarque.* Dans l'engrenage de force, destiné à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans le même plan, on retrouve les développantes imparfaites à double courbure, celles qui sont raccourcies. (Voir le modèle fonctionnant de cet engrenage, que j'ai fait exécuter pour les collections de l'École polytechnique et du Conservatoire des Arts et Métiers.) (*)

On sait que dans cet engrenage :

1° La dent d'une des roues est terminée par une surface cylindrique B ayant pour section droite une développante parfaite d'un cercle; et que la dent de l'autre roue est terminée par une surface hélicoïde développable Σ.

2° Ces deux surfaces B et Σ se mettent successivement en contact par leurs génératrices droites.

Pendant le mouvement de rotation, la section droite du cylindre B laisse pour trace sur la surface hélicoïde Σ, une développante raccourcie à double courbure.

*Des spirales imparfaites d'Archimède.*

Tout ce que nous avons dit plus haut sur les développantes parfaites et imparfaites du cercle, s'applique, mot à mot, aux spirales d'Archimède parfaites et imparfaites.

Ainsi nous pouvons énoncer ce qui suit :

1° Outre la spirale parfaite d'Archimède, il y a deux espèces de spirales imparfaites, l'une rallongée et l'autre raccourcie et toutes deux planes; elles se construisent de la même manière que les développantes imparfaites du cercle.

2° Si l'on fait mouvoir une droite D sur une spirale parfaite d'Archimède $\delta$ et sur un axe A perpendiculaire au plan P de la courbe $\delta$ (la droite D coupant l'axe A sous un angle constant) on engendre une surface hélicoïde gauche Σ; et la spirale à double courbure rallongée ou raccourcie tracée sur la surface Σ, aura pour projection, sur le plan P, une spirale plane d'Archimède rallongée ou raccourcie.

3° Si l'on a deux plans P et P' perpendiculaires à l'axe A, et que l'on fasse

(*) On peut lire à ce sujet le chapitre II de la *Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes situés ou non situés dans un même plan*, que j'ai publiée en 1842.

mouvoir une droite d'une longueur constante D sur l'axe A, l'une de ses extrémités décrivant une spirale parfaite d'Archimède $\delta$, tracée sur le plan P, l'autre extrémité de la droite D décrira sur le plan P′ une seconde spirale parfaite d'Archimède $\delta_{,}$, et les deux courbes $\delta$ et $\delta_{,}$ seront identiques; de plus, pendant le mouvement, la droite D coupera l'axe A sous un angle constant.

4° Si l'on a deux plans P et P′ perpendiculaires à l'axe A, et que l'on fasse mouvoir sur l'axe A une droite d'une longueur constante D, l'une de ses extrémités décrivant sur le plan P une spirale d'Archimède imparfaite rallongée $\epsilon$ ou raccourcie $\epsilon'$; l'autre extrémité de cette droite D décrira sur le plan P′ une seconde spirale imparfaite d'Archimède rallongée $\epsilon_{,}$ ou raccourcie $\epsilon'_{,}$, et les courbes $\epsilon$ et $\epsilon_{,}$, $\epsilon'$ et $\epsilon'_{,}$ seront identiques; et de plus, pendant le mouvement, la droite D coupera l'axe A sous un angle constant.

5° Si l'on porte sur chaque génératrice droite de l'hélicoïde gauche $\Sigma$ qui a pour trace sur un plan perpendiculaire à l'axe A une spirale parfaite d'Archimède, et à partir de chaque point d'une spirale imparfaite d'Archimède et à double courbure, rallongée $\gamma$ ou raccourcie $\gamma'$, tracée sur cette surface $\Sigma$; si l'on porte, dis-je, une longueur constante D, on tracera sur la surface $\Sigma$ une nouvelle spirale imparfaite d'Archimède à double courbure, rallongée $\gamma_{,}$ ou raccourcie $\gamma'_{,}$, et les courbures $\gamma$ et $\gamma_{,}$, $\gamma'$ et $\gamma'_{,}$ seront des courbes identiques.

*Construction de la tangente à la développante imparfaite à double courbure et à la spirale d'Archimède imparfaite à double courbure.*

Il nous reste à donner la construction de la tangente en un point d'une développante imparfaite à double courbure et en un point d'une spirale imparfaite d'Archimède à double courbure.

1° *De la tangente à la développante imparfaite à double courbure.*

Désignant par $\gamma$ la développante imparfaite à double courbure, et nous rappelant que cette courbe est tracée sur une surface hélicoïde développable, et qu'elle a pour projection une développante imparfaite $\epsilon$ du cercle qui est la section droite du cylindre sur lequel est tracée l'arête de rebroussement de la surface hélicoïde, nous construirons le plan tangent T à la surface hélicoïde; puis nous le couperons par un plan vertical Q passant par la tangente à la courbe $\epsilon$, tangente que nous avons appris à construire au commencement de ce chapitre, et l'intersection des deux plans T et Q sera la tangente demandée.

2° *De la tangente à la spirale imparfaite d'Archimède à double courbure.*

Désignant par $\gamma$ la spirale imparfaite à double courbure, et nous rappelant que

cette courbure est tracée sur une surface hélicoïde gauche ayant l'axe A pour directrice, et que cette courbe $\gamma$ a pour projection une spirale plane et imparfaite d'Archimède $\mathfrak{G}$, et que l'on sait construire la tangente en un point de cette courbe $\mathfrak{G}$, ainsi qu'on l'a dit au commencement de ce chapitre, nous construirons à la surface hélicoïde le plan tangent T pour le point considéré sur la courbe $\gamma$; puis menant un plan vertical Q par la tangente à la courbe $\mathfrak{G}$, l'intersection des deux plans T et Q sera la tangente demandée (*).

Passons maintenant aux développantes sphériques rallongées et raccourcies, et établissons les *analogies géométriques* qui existent entre ces courbes et celles que nous venons d'étudier.

## § II.

### *Des développantes sphériques rallongées et raccourcies.*

Dans le mémoire sur les *épicycloïdes sphériques* que j'ai publié dans le 23ᵉ *cahier du Journal de l'École polytechnique*, j'ai donné la génération de la développante sphérique, en considérant cette courbe comme une épicycloïde particulière; et en vertu de ce mode de génération j'ai démontré que l'enveloppe des plans normaux de cette courbe était une surface conique de révolution ayant son sommet au centre de la sphère sur laquelle la courbe était tracée et pour base le cercle fixe sur lequel roulait un grand cercle de la sphère, un point de ce grand cerle engendrant la développante sphérique.

Mais il est facile de reconnaître que la développante sphérique peut être engendrée d'une autre manière.

Et en effet :

On se rappelle que, *Monge* a démontré que toute courbe à double courbure C avait une infinité de développées qui étaient toutes des hélices tracées sur la surface développable enveloppe de l'espace parcouru par le plan normal à cette courbe C.

---

(*) On doit comprendre que lorsque nous considérons trois spirales d'Archimède, l'une intermédiaire dite *parfaite* et les deux autres dites *imparfaites*, ces trois spirales ne doivent être considérées, deux d'entre elles comme imparfaites par rapport à la troisième occupant la position intermédiaire, que par *analogie géométrique*; car ces trois courbes, considérées séparément, sont trois spirales ayant la même équation, savoir : $\rho = a\omega$, dans laquelle le coefficient $a$ prend une valeur particulière pour chacune des trois courbes spirales.

Dès lors, on voit que si, par un point de la développante sphérique C, on mène une doite K quelconque, mais tangente au cône D enveloppe des plans normaux de la courbe C, et qu'on plie librement cette tangente K sur ce cône D, on formera une hélice conique E qui sera la développée de la courbe C.

Ainsi, si l'on considère la surface développable Σ formée par toutes les tangentes K à une hélice conique E (le cône sur lequel cette hélice E est tracée étant de révolution), toute courbe C tracée sur cette surface Σ et coupant ses génératrices K sous l'angle droit sera une développante sphérique.

*Tracé mécanique de la développante sphérique sur la surface concave d'une sphère.*

Ce qui précède nous permet de tracer sur la surface concave d'une sphère une développante sphérique, par un mouvement continu et d'une manière très-simple et très-commode pour la pratique.

Et en effet:

Imaginons une demi-sphère creuse S et un cône solide de révolution B, ayant son apothème égal en longueur au rayon de la sphère, et pour base un cercle d'un rayon arbitraire.

Plaçons le cône B dans la demi-sphère creuse S, de manière que son cercle-base s'applique exactement sur la surface concave de la sphère; dès lors le centre de la sphère et le sommet du cône coïncideront.

Cela fait, plions sur le cône B une bande de parchemin, cette bande s'enroulera sur le cône sans *déchirure* ni *duplicature*, et chacun de ses bords tracera sur le cône une hélice conique; et si l'on s'arrange de manière à ce que l'extrémité du parchemin vienne aboutir précisément en un point du cercle-base du cône; en dépliant le parchemin et le tendant, cette extrémité décrira sur la sphère creuse une développante sphérique.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, on peut facilement déduire ce qui suit:

1° Si l'on a un cône de révolution B et si on le coupe par une suite de plans perpendiculaires à son axe, on obtiendra une suite de cercles V, V′, V″.... dont les rayons seront entre eux comme les distances du sommet du cône aux centres de ces cercles, ou, en d'autres termes, comme les parties de l'apothème comprises entre le sommet du cône et les différents plans sécants.

Désignant donc le sommet du cône par *a*, et par *b*, *b′*, *b″*.... les points en lesquels l'apothème G du cône B se trouve respectivement coupé par les plans

des cercles V, V′, V″..... et désignant par R, R′, R″..... les rayons de ces cercles, on aura :

$$\frac{R}{ab} = \frac{R'}{ab'} = \frac{R''}{ab''} = \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cela posé :

Concevons le plan T tangent au cône B suivant l'apothème ou génératrice G, et traçons dans ce plan T une suite de cercles ayant le sommet $a$ pour centre commun et pour rayon les droites $ab$, $ab'$, $ab''$..... et désignons ces cercles par Q, Q′, Q″.....

On voit de suite que les cercles V et Q sont en contact par le point $b$; que les cercles V′ et Q′ sont en contact par le point $b'$, et ainsi de suite.

Maintenant, si l'on suppose que tous les cercles Q, Q′, Q″ roulent ensemble et en même temps sur les cercles V, V′, V″..... les points $b$, $b'$, $b''$..... décriront chacun une développante sphérique.

Et ainsi, le point $b$ décrira la développante $\gamma$ qui sera située sur la sphère S ayant $ab$ pour rayon et le point $a$ pour centre.

Le point $b'$ décrira la développante $\gamma'$ qui sera située sur la sphère S′ ayant $ab'$ pour rayon et le point $a$ pour centre, et ainsi de suite.

Et comme, en même temps que le cercle Q roule sur le cercle V, les autres cercles Q′, Q″..... roulent sur les cercles V′, V″..... en décrivant autour de l'axe du cône B le même angle en vertu des équations (1), on voit que toutes les développantes $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$..... seront placées sur un cône épicycloïdal ayant le point $a$ pour sommet.

On peut donc énoncer ce qui suit :

I. Lorsque l'on a une suite de développantes sphériques $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$,..... ayant une même surface conique B pour enveloppe de leurs plans normaux, et coupant cette surface conique B en des points $b$, $b'$, $b''$,..... situés sur une même génératrice G de ce cône B, toutes ces courbes $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$,..... sont situées sur un même cône U, qui a pour sommet le sommet du cône B.

*Analogie géométrique.* Si l'on suppose que le cône B devienne un cylindre de révolution $B_1$, alors les courbes à double courbure $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ deviennent des développantes planes $\gamma_1$, $\gamma'_1$, $\gamma''_1$. Et comme, dans ce cas, on a : $ab = ab' = ab'' =$ *l'infini*, et que $R = R' = R'' =$ *constante*, dès lors, les développantes planes $\gamma_1$, $\gamma'_1$, $\gamma''_1$ sont des courbes identiques et situées dans des plans parallèles et elles percent le cylindre $B_1$ en des points $b_1$, $b'_1$, $b''_1$ qui sont situés sur une même génératrice $G_1$ de ce cylindre $B_1$; et le cône épicycloïdal U devient un cylindre $U_1$ sur lequel se trouvent situées toutes les développantes planes et circulaires $\gamma_1$, $\gamma'_1$, $\gamma''_1$.

On peut encore déduire ce qui suit :

2° Étant donné un cône de révolution B, ayant tracé sur ce cône une hélice E, et ayant construit la surface développable Σ formée par les diverses tangentes K,..... de l'hélice E; si l'on coupe la surface Σ par une suite de sphères concentriques S, S′, S″, ayant pour centre commun le sommet *a* du cône B, les courbes de sections obtenues $\gamma, \gamma', \gamma''$, seront des développantes sphériques; et l'hélice E sera coupée par la courbe $\gamma$ en un point *d*, par la courbe $\gamma'$ en un point *d′* et ainsi de suite; ces points *d*, *d′*,..... étant les points de rebroussement ou les origines des courbes $\gamma, \gamma', \gamma''$.

On peut donc énoncer ce qui suit :

II. Si l'on a une suite de développantes sphériques $\gamma, \gamma', \gamma''$, ayant une même surface conique de révolution B pour enveloppe de leurs plans normaux; si ces courbes coupent le cône B en des points *d*, *d′*, *d″*, situés sur une hélice E tracée sur ce cône B; toutes les courbes $\gamma, \gamma', \gamma''$ seront situées sur une surface développable Σ, ayant l'hélice E pour arête de rebroussement.

*Analogie géométrique*. Et si l'on suppose que le cône B devienne un cylindre de révolution B, alors les courbes à double courbure $\gamma, \gamma', \gamma''$ deviennent des développantes planes et circulaires; et les points *d*, *d′*, *d″*, sont situés sur une hélice E, tracée sur le cylindre B,; et la surface Σ devient un héliçoïde développable Σ, ayant l'hélice E, pour arête de rebroussement. Dans ce cas, les sphères S, S′, S″, deviennent des plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe du cylindre B, (*).

Examinons maintenant les développantes sphériques rallongées et raccourcies.

Concevons le cône de révolution B, enveloppe des plans normaux d'une développante sphérique; la base de ce cône étant le cercle C, son sommet étant au point *a*, son axe étant la droite *oa* qui unit le sommet *a* et le centre *o* du cercle-base C (*fig.* 6).

Imaginons le plan T, tangent au cône B suivant une de ses génératrices *ab*; et dans ce plan T, traçons le cercle L tangent en *b* au cercle C, ayant son centre au sommet *a*, et ayant dès lors pour rayon la droite *ab*.

Cela fait :

Concevons que le point *m* du cercle C est l'origine de la développante

(*) Car un plan est rigoureusement une sphère de rayon infini; car une suite de sphères concentriques se transforment en une suite de plans parallèles, lorsqu'on suppose que leur centre commun est transporté à l'infini; et comme les sphères concentriques coupaient sous l'angle droit l'axe du cône B, il faut que les plans parallèles coupent aussi sous l'angle droit l'axe du cylindre B,, si *l'analogie géométrique* existe; et c'est ce qui a lieu en effet.

sphérique $\delta$, dès lors si, sur le cercle L, on prend un point $x$ tel que l'on ait :

Arc rectifié $bm$ = arc rectifié $bx$,

Le point $x$ appartiendra à la développante sphérique $\delta$.

Supposons maintenant trois positions du plan T, et par suite trois positions du cercle L (en supposant que le cercle L a roulé sur le cercle C, pour passer successivement en chacune de ces trois positions).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nous aurons le plan | T | tangent au cône B suivant | $ab$ |
| — | T′ | — | $ab'$ |
| — | T″ | — | $ab''$ ; |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nous aurons dans le plan | T | le cercle | L | tangent au cercle C au point | $b$ |
| — | T′ | | L′ | — | $b'$ |
| — | T″ | | L″ | — | $b''$. |

Supposons que les arcs $bb'$, $b'b''$ du cercle C sont égaux entre eux; dès lors les plans T et T′, T′ et T″ feront entre eux des angles dièdres égaux; dès lors aussi les génératrices $ab$ et $ab'$, $ab'$ et $ab''$ comprendront entre elles des angles égaux.

Cela posé :

Si sur le cercle L′ on prend : arc rectifié $b'x'$ = arc rectifié $b'm$;

Si sur le cercle L″ on prend : arc rectifié $b''x''$ = arc rectifié $b''m$, on placera sur le cercle L′ un point $x'$, et sur le cercle L″ un point $x''$, tels que ces points appartiendront à la développante sphérique $\delta$.

Si maintenant je prends, sur le cercle L, un point $y$ tel que l'on ait : $\frac{\text{arc } bx}{\text{arc } by} =$ une constante K;

sur le cercle L′, un point $y'$ tel que l'on ait : $\frac{\text{arc } b'x'}{\text{arc } b'y'} = \text{K}$;

et sur le cercle L″, un point $y''$ tel que l'on ait : $\frac{\text{arc } b''x''}{\text{arc } b''y''} = \text{K}$;

tous les points $y$, $y'$, $y''$ formeront une courbe $\varphi$ tracée sur la sphère S, qui a son centre au point $a$ et $ab$ pour rayon; et cette courbe $\varphi$ qui aura son origine ou son point de rebroussement situé en $m$ sur le cercle C, sera une *développante sphérique imparfaite*.

Si K est $> 1$, les points $y$, $y'$, $y''$ seront placés respectivement entre les points $x$ et $b$, $x'$ et $b'$, $x''$ et $b''$, et la courbe $\varphi$ sera dite *développante sphérique raccourcie*.

Si K est $< 1$, les points $y$, $y'$, $y''$ seront placés au delà des points $x$, $x'$, $x''$, par rapport aux points $b$, $b'$, $b''$, et la courbe $\varphi$ sera dite *développante sphérique rallongée*.

Si K = 1, alors les points $x$ et $y$, $x'$ et $y'$, $x''$ et $y''$ se confondent, et les

deux courbes $\varphi$ et $\vartheta$ ne forment plus qu'une seule et même courbe qui est la *développante sphérique parfaite*.

On voit de suite l'analogie qui existe entre la construction des *développantes sphériques imparfaites* et celle des *développantes planes imparfaites*, les droites $xm$, $x'm'$ (*fig.* 1) sont remplacées par les arcs $yb$, $y'b'$ (*fig.* 6).

Maintenant, si par le point $x$ et dans le plan tangent T on mène une droite arbitraire $xp$ et coupant la génératrice $ab$ au point $p$, et si l'on plie librement cette droite sur le cône B, on aura l'hélice conique E qui passera par le point $m$ du cercle C, et qui coupera les génératrices $ab'$ au point $p'$, $ab''$ au point $p''$; et les droites $px$, $p'x'$, $p''x''$ seront des tangentes à l'hélice E, aux points $p$, $p'$, $p''$.

Si l'on unit le sommet $a$ aux points $y$, $y'$, $y''$, les droites $ay$, $ay'$, $ay''$ couperont respectivement les droites $px$, $p'x'$, $p''x''$ aux points $z$, $z'$, $z''$ qui formeront une courbe $\gamma$ tracée sur la surface hélicoïde développable $\Sigma$ ayant l'hélice E pour arête de rebroussement, et cette courbe $\gamma$ aura son origine ou son point de rebroussement situé en $m$ sur le cercle C.

Nous donnerons à cette courbe $\gamma$ le nom de *développante hélico-sphérique imparfaite*.

Il y aura des développantes hélico-sphériques *rallongées* ou *raccourcies*, suivant que la courbe $\gamma$ sera l'intersection de la surface hélicoïde $\Sigma$ par un cône ayant pour directrice une développante sphérique *rallongée* ou *raccourcie*, et pour sommet le point $a$ (sommet du cône B).

On voit de suite *l'analogie géométrique* qui existe entre la construction des développantes *hélico-sphériques imparfaites* et celle des développantes *imparfaites à double courbure* : les premières se projettent coniquement et orthogonalement sur la sphère S, suivant des développantes *sphériques imparfaites*, tout comme les secondes se projettent cylindriquement et orthogonalement sur le plan de section droite du cylindre $B_1$, suivant des développantes *planes imparfaites*.

Cela étant établi :

Décrivons dans les plans tangents T, T', T'' des cercles $L_1$, $L'_1$, $L''_1$ du point $a$ comme centre, et avec $az$, $az'$, $az''$ pour rayons.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Le cercle | $L_1$ coupera la droite | $ax$ au point | $l_1$ et la droite | $ab$ au point | $v_1$ |
| — | $L'_1$ — | $ax'$ — | $l'_1$ — | $ab'$ — | $v'_1$ |
| — | $L''_1$ — | $ax''$ — | $l''_1$ — | $ab''$ — | $v''_1$ |

Et comme les cercles L et $L_1$, L' et $L'_1$, L'' et $L''_1$ sont deux à deux dans un même plan et sont concentriques, on aura évidemment :

$$\frac{\text{arc } bx}{\text{arc } by} = \frac{\text{arc } v_1 l_1}{\text{arc } v_1 z} = \frac{\text{arc } v'_1 l'_1}{\text{arc } v'_1 z'} = \frac{\text{arc } v''_1 l''_1}{\text{arc } v''_1 z''} = \text{etc.} = K$$

On peut donc conclure ce qui suit :

III. 1° Si du point $a$ sommet du cône B, comme centre, on décrit une suite de sphères S, S', S" coupant la courbe $\gamma$ (développante hélico-sphérique imparfaite) en les points $z$, $z'$, $z''$;

2° Si l'on mène par les points $z$, $z'$, $z''$ des plans T, T', T" tangents au cône B, lesquels toucheront ce cône suivant les génératrices H, H', H", et lesquels couperont, savoir :

Le plan T, la sphère S suivant un cercle L, du rayon $az$;
Le plan T', la sphère S' suivant un cercle L', du rayon $az'$;
Le plan T", la sphère S" suivant un cercle L", du rayon $az''$;

3° Si on trace sur la sphère S la développante sphérique $\delta$ passant par le point $z$; sur la sphère S', la développante $\delta'$ passant par $z'$; et sur la sphère S", la développante $\delta''$ passant par $z''$,

Ces développantes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ viendront couper le cône B en des points $l$, $l'$, $l''$, qui seront en ligne droite.

Ces points $l$, $l'$, $l''$ seront les origines ou points de rebroussement des courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$.

On peut de suite reconnaître les nouvelles *analogies géométriques* qui existent entre les développantes *hélico-sphériques rallongées* ou *raccourcies* et les développantes *à double courbure rallongée* ou *raccourcie*.

*Analogies géométriques.*

Et en effet :

Lorsque le cône B devient un cylindre $B_1$, les sphères S, S', S" deviennent des plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe de ce cylindre $B_1$.

Les cercles L, L', L" deviennent des droites parallèles entre elles et perpendiculaires à l'axe du cylindre $B_1$, et les développantes sphériques $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ deviennent des développantes planes ayant leurs origines ou leurs points de rebroussement placés en ligne droite et sur une génératrice droite du cylindre $B_1$.

Étant donné un cône de révolution B dont le demi-angle, au sommet, est égal à $\omega$, menons par son axe A un plan sécant Y, ce plan coupera le cône suivant deux génératrices G et G, qui comprendront entre elles un angle égal à $2\omega$.

Imaginons le plan T tangent au cône B suivant la génératrice G, et plaçons dans ce plan T une droite K perpendiculaire à G et la coupant en un point $p$ distant du sommet $a$ du cône B d'une quantité égale à $\lambda$.

Si nous plions librement la droite K sur le cône B, nous obtiendrons une hélice

conique E, dont les arcs de droite et de gauche, par rapport au point $p$, viendront se croiser en un point $p_1$ de la génératrice G, pour continuer à serpenter à droite et à gauche de cette génératrice G, sur le cône B.

Le point $p$ est dit *sommet* de l'hélice conique; la distance du point $p_1$ au sommet $a$ du cône B est dite *pas* de la première circonvolution de l'hélice; et la distance $ap$ est dite *rayon* de l'hélice.

Or, il est évident que lorsque l'on connaîtra l'angle $\omega$ du cône B et le *rayon* de l'hélice conique, cette courbe sera complétement déterminée.

Imaginons l'hélice E et ses diverses tangentes K; je dis que toutes les droites K sont tangentes à une sphère S, décrite du sommet $a$ du cône B comme centre, et ayant pour rayon le rayon de l'hélice E.

En effet :

Si l'on conçoit une suite de plans tangents T, T′, T″ au cône B, chacun de ces plans contiendra une tangente K, K′, K″ de l'hélice E; et lorsque l'on développera le cône B sur le plan T, l'hélice E se transformera en sa tangente K; de même, si l'on développe le cône B sur le plan T′, l'hélice E se transformera en sa tangente K′ et ainsi de suite. Et il est bien évident que si l'on abaisse, dans le développement du cône sur un de ses plans tangents et du sommet $a$ de ce cône, une perpendiculaire sur K, puis sur K′ et ainsi de suite, toutes ces perpendiculaires seront égales entre elles.

Ainsi, si l'on conçoit la sphère S, le plan T coupera cette sphère suivant un grand cercle D qui sera tangent à K; le plan T′ coupera cette sphère suivant un grand cercle D′ qui sera tangent à K′; et ainsi de suite.

Cela posé :

Comme on sait que le plan osculateur en un point $x$ d'une hélice E est perpendiculaire au plan tangent T à la surface développable $\Sigma$ sur laquelle cette hélice E est tracée (ce plan T étant construit pour le point $x$), on en conclut que la droite K sera tangente à la sphère S; car le plan osculateur de l'hélice E, lequel est mené par la tangente K, étant perpendiculaire au plan tangent T, sera tangent à la sphère S et au point où la droite K touche le cercle D.

Ainsi on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème : *Toutes les génératrices droites d'une surface hélicoïde développable, ayant une hélice conique* E *pour arête de rebroussement, sont tangentes à une sphère ayant pour rayon celui de l'hélice* E, *et pour centre le sommet du cône* B *de révolution sur lequel l'hélice* E *se trouve placée.*

Le théorème précédent est général, en ce sens qu'il est vrai quelle que soit la base ou courbe directrice du cône B.

De ce qui précède on peut déduire ce qui suit :

1° Étant donné un cône de révolution B et deux sphères S et S′ ayant pour centre commun le sommet $a$ du cône B, si l'on trace sur la sphère S une développante sphérique $\delta$, pour laquelle l'enveloppe de ses plans normaux sera le cône B et si l'on fait mouvoir une droite K s'appuyant : 1° sur la développante sphérique $\delta$; 2° tangentiellement au cône B; et 3° tangentiellement à la sphère S′; les diverses droites K seront coupées par la sphère S en des points qui formeront une seconde développante sphérique $\delta_1$, et les parties interceptées par la sphère S, sur les diverses droites K, seront toutes égales entre elles.

2° Si l'on fait mouvoir tangentiellement à une hélice conique E tracée sur un cône B de révolution, une droite d'une longueur constante K, l'une des extrémités de cette droite K décrivant une développante $\delta$ de l'hélice E, l'autre extrémité de cette droite K décrira une seconde développante $\delta_1$ de l'hélice E, et les deux courbes $\delta$ et $\delta_1$ seront situées sur une sphère S ayant son centre au sommet du cône B.

3° Si l'on fait mouvoir une droite G, s'appuyant tangentiellement sur un cône de révolution B et sur une sphère S′ ayant pour centre le sommet du cône B, si l'une des extrémités de cette droite G décrit une développante sphérique rallongée $\varphi'$ ou raccourcie $\varphi$ tracée sur une sphère S concentrique à la sphère S′, la surface gauche décrite par G sera coupée par la sphère S et par toutes les sphères concentriques à S et S′, suivant une développante rallongée $\varphi_1$ ou raccourcie $\varphi'_1$. Les points de contact de la droite mobile G et du cône B formeront une courbe E, dont il faut déterminer la nature géométrique.

Je dis que la courbe E n'est autre qu'une hélice tracée sur le cône B.

Et en effet :

L'équation de la droite A (*fig.* 7) est en coordonnées rectangulaires :

$$y = -m \cdot x + b \qquad (2)$$

Pour avoir l'équation polaire de la droite A (prenant l'origine des coordonnées rectangulaires pour *pôle* et l'axe des $x$ pour l'origine des angles $\alpha$), il faudra remplacer dans l'équation (2)

$$y \text{ par } (\rho \sin \alpha), \text{ et } x \text{ par } (\rho \cos \alpha),$$

et l'on aura :

$$\rho(\sin \alpha + m \cos \alpha) = b \qquad (3)$$

pour l'équation polaire de la droite A.

Cela posé :

La sphère S (*fig.* 8) dont le centre est au sommet du cône B étant coupée, par le plan T tangent au cône B, suivant un grand cercle D; la génératrice de contact du plan T et du cône B étant $ab$; le point $x$ situé sur le cercle L tracé dans le plan T, étant un point de la développante sphérique parfaite $\delta$ et le point $y$ étant un point de la développante sphérique raccourcie ou rallongée $\varphi_1$; si par le point $y$ on mène la droite $yq$ tangente en $q$ au cercle D, cette droite coupera la génératrice $ab$ en un point $p$ qui sera un point de la courbe de contact cherchée E.

Représentons :

par $\chi$ l'angle $\widehat{yaq}$;
par $\xi$ l'angle $\widehat{yab}$;
par $\lambda$ l'angle $\widehat{qab}$;
par $\alpha$ l'angle $\widehat{xab}$;
par $\rho$ le rayon vecteur $ap$;
par R le rayon du cercle D ou de la sphère S.

Le triangle rectangle $paq$ nous donne :

$$\rho \cos \lambda = R \qquad (4)$$

Or

$$\widehat{paq} = \widehat{yaq} - \widehat{yab}$$

Ou

$$\lambda = \chi - \xi$$

Remarquons que, pour tous les points de la courbe E, le triangle $paq$ est constant; donc l'angle $\chi$ est constant.

Et l'équation (4) deviendra :

$$\rho \cos (\chi - \xi) = R \qquad (5)$$

Mais comme le point $q$ appartient à une développante sphérique raccourcie ou rallongée, on a :

$$\frac{\text{arc } xb}{\text{arc } by} = \text{constante.}$$

Donc on peut poser :

$$\xi = \frac{\alpha}{n}$$

Dès lors l'équation (5) deviendra :

$$\rho \cos\left(\chi - \frac{\alpha}{n}\right) = R$$

Ou

$$\rho\left(\cos\chi . \cos\frac{\alpha}{n} + \sin\chi . \sin\frac{\alpha}{n}\right) = R \qquad (6)$$

Et comme l'angle $\chi$ est constant, d'après ce qui a été dit plus haut, on peut représenter cos $\chi$ par une constante M, et sin $\chi$ par une constante N; et l'on aura :

$$\rho\left(\sin\frac{\alpha}{n} + \frac{M}{N}\cos\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{R}{N} \qquad (7)$$

On voit de suite que l'équation (7) est de même forme que l'équation (3).

Ainsi l'équation (7) est l'équation polaire d'une droite; ainsi la courbe *lieu* des points $p$ (après le développement du cône B sur son plan tangent T) est une droite. La courbe E, *lieu* des points de l'espace, est donc une hélice conique.

Si dans l'équation (7) on fait varier la quantité $n$, on fera varier le rapport $\frac{\text{arc } xb}{\text{arc } yb'}$; et la courbe E, tout en restant une hélice conique, changera de place sur le cône B.

Or, si l'on fait varier $n$, on voit de suite que chacune des droites *lieu* des points $p$, passera par le point $x$, ou, en d'autres termes, que toutes les hélices coniques E couperont le cercle C, base du cône B (*fig.* 6), en un même point. Car, si dans l'équation (7) on fait $\frac{\alpha}{n} = 0$, on aura :

$$\rho = \frac{R}{M} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{R}{\cos\omega}$$

Et quelle que soit la valeur que l'on attribue à la quantité $n$, dans l'expression $\frac{\alpha}{n}$ et dans l'équation (7), on aura toujours une équation de la forme $\rho$ ($\sin\alpha + m.\cos\alpha) = b$; et quelles que soient les valeurs attribuées à $m$ et à $b$ dans cette équation, on aura toujours $\frac{b}{m}$ égale à une quantité constante, puisque ce point $x$ (*fig.* 8) sera un point fixe par lequel passeront toutes les droites représentées par cette équation.

On voit aussi que les sommets $q$ (*fig.* 8) des diverses hélices coniques E, que l'on obtiendra en faisant varier $n$, sont distribués sur la courbe *lieu* des centres de courbure de la développante sphérique $\delta$ décrite par le point $x$, courbe qui (ainsi que nous le savons) se transforme en un cercle tracé sur $ax$, comme diamètre, lorsque le cône B est développé sur son plan tangent T.

Remarquons encore que, suivant que $n$ sera $> 1$ ou $< 1$, la développante imparfaite décrite par le point $y$ sera *raccourcie* ou *rallongée*, et l'on voit dès lors qu'en attribuant à $n$ toutes les valeurs possibles, l'on obtiendra toutes les développantes sphériques rallongées ou raccourcies de la développante sphérique parfaite $\delta$, décrite par le point $x$ (*fig.* 8).

En vertu de ce qui précède, on peut énoncer les théorèmes suivants :

Théorème A. (*fig.* 9) Étant donné un cercle D; ayant mené par son centre $a$ une droite X, ayant ensuite mené une droite Y tangente à ce cercle D, si l'on mène deux droites, l'une X′ par le point $a$ faisant avec la droite X un angle $\alpha$, et l'autre Y′ tangente au cercle D et faisant avec la droite Y un angle $\varphi$, ces deux droites se couperont en un point $p$ et tous les points $p$, ainsi déterminés, seront en ligne droite, si les angles $\alpha$ et $\varphi$ sont liés entre eux par l'équation :

$$\alpha = m\varphi$$

Théorème B. (*fig.* 10) Étant donnés un cercle D et une droite L; ayant mené par le centre $a$ du cercle D une droite X coupant la droite L au point $q$; ayant mené par le point $q$ une droite Y tangente au cercle D; si par les points $q'$, $q''$,..... de la droite L, on mène les droites X′, X″,..... tendant au centre $a$, et les droites Y′, Y″, tangentes au cercle D, on aura :

$$\frac{\widehat{XX'}}{\widehat{YY'}} = \frac{\widehat{XX''}}{\widehat{YY''}} = \text{etc.} = \text{constante M.}$$

Ce théorème est le réciproque du *théorème* (A).

Théorème C. (*fig.* 11) Étant donnés un cercle D et une droite L; on sait, en vertu du théorème (A), que si l'on mène par le centre $a$ les droites X, X′,..... coupant la droite L aux points $p$, $q$,..... et si par les points $p$ et $q$ on mène les droites Y, Y′, tangentes au cercle D, en désignant par $\alpha$ l'angle XX′, et par $\varphi$ l'angle YY′, on aura $\alpha = M\varphi$, quelle que soit la position des droites X′ et Y′, par rapport aux droites fixes X et Y.

Si maintenant on mène par le centre $a$ une droite X, faisant avec la droite

X un angle $\gamma$ arbitraire ; et que l'on suppose que cette droite $X_1$ soit l'origine des angles $\alpha$, on aura, en vertu de l'équation de condition $\alpha = M\varphi$, une droite $L_1$ qui sera tangente au cercle C, cercle auquel la droite L était tangente.

Théorème D. (*fig.* 12) Étant donnés un cercle D et une droite L, si l'on mène par le centre $a$ la droite X coupant L au point $p$, si par les points $q$ de la droite L on mène les droites X' tendant au centre $a$ ; si l'on mène les droites $X'_1$ tendant au centre $a$, et telles que l'on ait l'équation de condition $\alpha_1 = N\varphi_1$, tandis que l'on avait, pour la droite L, l'équation de condition $\alpha = M\varphi$, on obtiendra une droite $L_1$ passant par le point $p$.

Et la droite $L_1$ se construira en portant $aq$, situé sur X', de $a$ en $q_1$ sur $X'_1$ ; les points $q_1$ seront sur la droite cherchée $L_1$.

Ainsi, le théorème (C) nous dit : si l'on suppose que l'on a $\alpha = M\varphi$ et que l'on change l'axe X, à partir duquel on compte les angles $\alpha$, pour le placer en $X_1$, la droite L passera en $L_1$ en tournant autour du centre $a$ d'un angle égal à l'angle $\gamma$, que les axes X et $X_1$ font entre eux.

Ainsi ; le théorème (D) nous dit : si l'on ne change pas l'axe X, origine des angles $\alpha$, mais que l'on fasse varier le rapport M qui existe entre les angles $\alpha$ et $\varphi$, on obtient diverses droites L, $L_1$, ...... se coupant en un même point sur l'axe X.

J'ai cru devoir entrer dans tous ces détails, parce que les *théorèmes* A, B, C, D, sont les théorèmes fondamentaux de toute la théorie des courbes hélices coniques et des surfaces hélicoïdes coniques.

Et par suite de tout ce qui vient d'être dit on peut énoncer ce qui suit :

I. Étant donnés un cône de révolution B et une hélice conique E tracée sur ce cône, désignant par R la distance du sommet du cône B au sommet de la courbe E, si l'on décrit une sphère S du sommet du cône B comme centre et avec un rayon $R_1$, et que l'on fasse mouvoir une droite G tangentiellement au cône B et à la sphère S, et de telle manière que cette droite G s'appuie sur l'hélice E, on formera une surface hélicoïde $\Sigma$, telle que toute sphère S' concentrique à la sphère S coupera cette surface $\Sigma$.

1° Suivant une développante sphérique parfaite $\delta$, si l'on a $R_1 = R$.

2° Suivant une développante sphérique imparfaite $\varphi$, si $R_1$ est plus grand ou plus petit que R.

3° La développante imparfaite sera *raccourcie* si l'on a $R_1 < R$, et elle sera *rallongée* si l'on a au contraire $R_1 > R$.

II. Etant donnés un cône B de révolution et une hélice conique E tracée sur ce cône, et la développante sphérique parfaite $\delta$ tracée sur une sphère S' et

ayant pour développée l'hélice E; si l'on conçoit sur la sphère S' la développante sphérique imparfaite, rallongée ou raccourcie φ, et que l'on fasse mouvoir une droite G,

1° Sur la courbe φ et sur la courbe E et tangentiellement au cône B; on formera une surface hélicoïde gauche Δ;

2° Sur la courbe δ et tangentiellement à l'hélice E, on formera une surface hélicoïde développable Σ.

Les surfaces Δ et Σ seront respectivement tangentes à deux sphères, $S_1$ et S, ayant pour centre commun le sommet du cône B; le rayon de la sphère S sera égal au *rayon* R de l'hélice E, et le rayon $R_1$ de la sphère Δ sera plus grand que R si la courbe φ est une développante rallongée, et il sera plus petit que R si la courbe φ est une développante raccourcie.

De plus, la surface Δ touchera la sphère $S_1$ suivant une développante sphérique imparfaite, rallongée si l'on a $R_1 > R$, et raccourcie si l'on a $R_1 < R$.

Et la surface Σ touchera la sphère S suivant une développante sphérique parfaite.

*Tracé mécanique de la développante sphérique sur la surface convexe d'une sphère.*

Ce qui précède nous permettra de tracer, par un mouvement continu sur la surface convexe d'une sphère, une développante sphérique parfaite.

Et en effet :

Étant donnée une sphère pleine S, sur la surface convexe de laquelle on veut tracer une développante sphérique, on prendra un tronc de cône solide et de révolution; on l'évidera de manière à ce que la sphère pleine puisse reposer sur le petit cercle du tronc solide; ce tronc aura été construit de manière à ce que se trouvant en contact avec la sphère par son petit cercle, le centre de la sphère et le sommet du cône coïncideraient, si l'on supposait le tronc de cône prolongé.

Cela fait :

On enroulera sur le tronc de cône une bande de parchemin dont l'une des extrémités viendra aboutir en un point du petit cercle; en déroulant la bande de parchemin, cette extrémité décrira, sur la sphère, la développante sphérique et parfaite demandée.

Pour compléter les *analogies géométriques* qui existent entre les courbes *hélices* et les surfaces *hélicoïdes* soit cylindriques soit coniques, résolvons la question suivante.

*Une surface héliçoïde conique développable ou gauche est toujours coupée par un cône de révolution ayant même axe et même sommet que le cône de révolution sur lequel est tracée l'hélice conique, qui est l'arête de rebroussement de la surface développable ou l'hélice conique directrice de la surface gauche, suivant une hélice conique.*

1° Rappelons-nous que les tangentes à l'hélice tracée sur un cône forment la surface dite *héliçoïde conique développable*, et que toutes ces tangentes à l'hélice sont en même temps tangentes à une sphère ayant son centre au sommet du cône, et pour rayon la distance du sommet du cône au sommet de l'hélice, et que l'hélice conique est *l'arête de rebroussement* de la surface.

2° Rappelons-nous que, si l'on a un cône de révolution et une hélice tracée sur ce cône, et une sphère dont le centre soit placé au sommet du cône, et dont le rayon soit plus grand ou plus petit que la distance du sommet du cône au sommet de l'hélice, si l'on fait mouvoir une droite tangentiellement au cône et à la sphère et en s'appuyant sur l'hélice, on engendre une surface dite *héliçoïde conique gauche*, et que l'hélice est dite *directrice* de la surface.

3° Rappelons-nous les théorèmes (A) et (B).

Cela posé :

Traçons sur un cône B de révolution une hélice conique E, et imaginons une sphère S du rayon R et ayant son centre au sommet *a* du cône B; faisons glisser une droite G tangentiellement au cône B et à la sphère D, et de manière à ce que, pendant son mouvement, cette droite s'appuie sur l'hélice E; cette droite G engendrera une surface héliçoïde conique qui sera gauche ou développable suivant la grandeur du rayon R.

Cela fait :

Remarquons que si l'on conçoit :

1° Le plan tangent T au cône B suivant la génératrice H, ce plan coupera, suivant une génératrice H', le cône de révolution B' qui aura même sommet *a* et même axe X que le cône B.

2° Le plan tangent $T_1$ au cône B suivant la génératrice $H_1$, ce plan coupera le cône B' suivant une génératrice $H'_1$.

Par conséquent, les plans tangents $T'$ et $T'_1$, menés au cône B' suivant les génératrices H' et $H'_1$, feront entre eux le même angle que les plans T et $T_1$ tangents au cône B.

On aura donc :

$$\widehat{T', T'_1} = \widehat{T, T_1}$$

3° Et si l'on considère une suite de plans T, $T_1$, $T_2$, $T_3$,..... tangents au cône

B et suivant des génératrices $H$, $H_1$, $H_2$, $H_3$,..... faisant entre elles des angles égaux, et qu'ainsi on ait :

$$\widehat{H,H_1} = \widehat{H_1,H_2} = \widehat{H_2,H_3} = \text{etc.},$$

on aura une suite de plans $T'$, $T'_1$, $T'_2$, $T'_3$,..... tangents au cône B' et suivant des génératrices $H'$, $H'_1$, $H'_2$, $H'_3$,..... qui feront aussi entre elles des angles égaux, et l'on aura :

$$\widehat{H',H'_1} = \widehat{H'_1,H'_2} = \widehat{H'_2,H'_3} = \text{etc.}$$

4° Les droites $H$ et $H'$, $H_1$ et $H'_1$, $H_2$ et $H'_2$, etc., font entre elles des angles égaux.

Ainsi on a :

$$\widehat{H,H'} = \widehat{H_1,H'_1} = \widehat{H_2,H'_2} = \text{etc.}$$

5° Les angles dièdres $\widehat{T,T_1}$ et $\widehat{(X,H),(X,H_1)}$ (*) sont égaux ; on aura donc :

$$\widehat{T,T_1} = \widehat{T_1,T_2} = \widehat{T_2,T_3} = \text{etc.} = \widehat{(X,H),(X,H_1)} = \widehat{(X,H_1),(X,H_2)} = \text{etc.}$$

Et aussi :

$$\widehat{T',T'_1} = \widehat{T'_1,T'_2} = \widehat{T'_2,T'_3} = \text{etc.} = \widehat{(X,H'),(X,H'_1)} = \widehat{(X,H'_1),(X,H'_2)} = \text{etc.}$$

6° Remarquons enfin que les angles dièdres,

$$\widehat{T,T_1} \text{ et } \widehat{T',T'_1} ; \widehat{(X,H),(X,H_1)} \text{ et } \widehat{(X,H'),(X,H'_1)}$$

sont tous les quatre égaux entre eux ; mais que les angles que font entre elles les génératrices $H$, $H_1$ du cône B et $H'$, $H'_1$ du cône B', ne sont pas égaux entre eux ; de sorte que lorsque l'on développera le cône B sur son plan tangent T, les droites $H$ et $H_1$ prendront les positions $K$ et $K_1$, et lorsque l'on développera le cône B' sur son

(*) En désignant par (X, H) le plan méridien du cône B, qui passe par l'axe X de ce cône B et par sa génératrice H ; et par (X, H') le plan méridien du cône B', passant par son axe X et par sa génératrice H', etc.

plan tangent T', les génératrices H' et $H'_1$ prendront les positions K' et $K'_1$, et les angles $\widehat{K, K_1}$ et $\widehat{K', K'_1}$ ne seront pas égaux entre eux.

Cela posé :

Traçons sur le cône B une hélice conique E; menons une suite de génératrices H, $H_1$, $H_2$, du cône B, équiangulaires entre elles et coupant E aux points $m$, $m_1$, $m_2$; par les points $m$, $m_1$, $m_2$, menons des droites G, $G_1$, $G_2$ tangentes au cône B et à une sphère S décrite du point $a$, sommet du cône B, comme centre et avec un rayon R.

Imaginons le cône B' ayant son sommet en $a$, et pour axe l'axe X du cône B; les droites G, $G_1$, $G_2$ perceront le cône B' en les points $p$, $p_1$, $p_2$,....., je dis que la courbe E', *lieu* des points $p$, $p_1$, $p_2$, est une hélice sur le cône B'.

Et en effet :

Par les points $p$, $p_1$, $p_2$, passeront les génératrices H', $H'_1$, $H'_2$ du cône B'; ces droites seront équiangulaires entre elles.

Si donc je développe le cône B' sur son plan tangent T', les droites H', $H'_1$, $H'_2$ prendront les positions K', $K'_1$, $K'_2$ équiangulaires entre elles; et les droites G, $G_1$, $G_2$ prendront les positions G', $G'_1$, $G'_2$ tangentes au cercle D tracé du point $a$ comme centre et avec R pour rayon (ce cercle D n'étant autre que la section faite dans la sphère S par le plan T'). Les droites G', $G'_1$, $G'_2$ seront aussi équiangulaires entre elles, et les points $p'$, $p'_1$, $p'_2$ en lesquels viennent se placer, après le développement, les points $p$, $p_1$, $p_2$, seront donc en ligne droite, en vertu du théorème (A); la courbe E' est donc une *hélice* tracée sur le cône B'.

Il nous reste à trouver la longueur du *rayon* de l'hélice E'.

Désignons, par L, le cercle suivant lequel la sphère S' du rayon R' est coupée par le plan T tangent au cône B; et par L', le cercle suivant lequel la même sphère S' est coupée par le plan T' tangent au cône B'.

Les deux cercles L et L' auront même rayon R', et pour centre commun le sommet $a$, et leurs plans se couperont suivant la génératrice H' du cône B'.

Après le développement du cône B sur le plan T, les droites K, $K_1$, $K_2$, $K_3$ couperont le cercle L en les points $k$, $k_1$, $k_2$, $k_3$; les droites G', $G'_1$, $G'_2$, $G'_3$ couperont le cercle L en les points $g'$, $g'_1$, $g'_2$, $g'_3$,...... L'hélice E se transformera suivant une droite U qui coupera le cercle L au point $x$; et l'on aura :

$$\frac{\text{arc}\,.\,xk}{\text{arc}\,.\,g'k} = \frac{\text{arc}\ xk_1}{\text{arc}\,g'_1k_1} = \frac{\text{arc}\ xk_2}{\text{arc}\,g'_2k_2} = \text{etc.} = \text{constante} = l_1.$$

ou, en désignant l'arc variable $xk$ par $\mu$ et l'arc variable $g'k$ par $\gamma$, on aura :

L'équation de condition $\mu = l.\gamma$.

Equation qui est satisfaite puisque la courbe E est une hélice.

Les génératrices $H'$, $H'_1$, $H'_2$, $H'_3$ du cône $B'$, font des angles égaux avec les génératrices $H$, $H_1$, $H_2$, $H_3$ du cône B ; en supposant donc que ces génératrices $H'$, $H'_1$, $H'_2$, $H'_3$ suivent le développement du cône B, elles viendront se placer sur le plan T, en les positions $K'$, $K'_1$, $K'_2$, $K'_3$, et elles feront entre elles des angles égaux entre eux et à ceux que font entre elles les droites $K$, $K_1$, $K_2$, $K_3$. Désignant donc, par $k'$, $k'_1$, $k'_2$, $k'_3$, les points en lesquels le cercle L est coupé par ces droites $K'$, $K'_1$, $K'_2$, $K'_3$,..... et par $n$, $n_1$, $n_2$, $n_3$, les points en lesquels les droites $G'$ et $K'$, $G'_1$ et $K'_1$, $G'_2$ et $K'_2$, se coupent, on voit de suite, en vertu du théorème (A), que les points $n$, $n_1$, $n_2$, $n_3$ seront sur une droite $U'$, laquelle coupera le cercle L en un point $x'$.

Et l'on aura dès lors :

$$\frac{\text{arc } x'k'}{\text{arc } g'k'} = \frac{\text{arc } x'k'_1}{\text{arc } g'_1k'_1} = \frac{\text{arc } x'k'_2}{\text{arc } g'_2k'_2} = \text{etc.} = \text{constante} = l;$$

ou, en d'autres termes, l'équation

$$\mu = l.\gamma$$

sera encore satisfaite ; de sorte que la droite $U'$ sera tangente au cercle, auquel la droite U, transformée de l'hélice E, était elle-même tangente, en vertu du théorème (C).

Ainsi, par ce mode de transformation, l'hélice E' située sur le cône B', devient une droite sur le développement du cône B.

Cela établi :

Développons le cône B' sur son plan tangent T'.

Les génératrices $G$, $G_1$, $G_2$, $G_3$, se transformeront en les droites $G''$, $G''_1$, $G''_2$, $G''_3$, tangentes au cercle D, tracé dans le plan T', et qui est la section faite dans la sphère S par ce plan T'.

Les génératrices $H'$, $H'_1$, $H'_2$, $H'_3$,..... se transformeront en les droites $K''$, $K''_1$, $K''_2$; les droites $G''$, $G''_1$, $G''_2$, seront équiangulaires entre elles, ainsi que les droites $K''$, $K''_1$, $K''_2$,..... et les droites $G''$, $G''_1$, $G''_2$, couperont le cercle L' en les points $g''$, $g''_1$, $g''_2$,..... et les droites $K''$, $K''_1$, $K''_2$, couperont le cercle L' en les points $k''$, $k''_1$, $k''_2$,..... Les points $p$, $p_1$, $p_2$, de la courbe E', deviendront les points $p'$,

$p'_1$, $p'_2$ de la droite U″ transformée de l'hélice E′; et cette droite U″ coupera le cercle L′ en un point $x'$, et l'on aura :

$$\frac{\text{arc } x'k''}{\text{arc } g''k''} = \frac{\text{arc } x'k''_1}{\text{arc } g''_1k''_1} = \frac{\text{arc } x'k''_2}{\text{arc } g''_2k''_2} = \text{etc.} = \text{constante } l'.$$

Et désignant par $\mu'$ l'arc variable $x'k''$; et par $\gamma'$ l'arc variable $g''k''$, l'équation de condition

$$\mu' = l'.\gamma'$$

sera satisfaite.

Or, lorsque l'on développe le cône B sur son plan tangent, les deux génératrices H et $H_1$ prennent les positions K et $K_1$, et comprennent entre elles un angle qui est mesuré sur le cercle L, par l'arc $kk_1$; et les deux génératrices H et $H_1$ comprenaient sur le cercle C, base du cône B, un arc $hh_1$.

Si nous désignons par $\rho$ le rayon du cercle C, nous aurons :

$$\text{arc } kk_1 = \text{arc } hh_1,$$

et comme on peut poser $(\text{arc } hh_1) = \frac{2\pi\rho}{n}$, et $(\text{arc } kk_1) = \frac{2\pi R'}{m}$, on aura :

$$\frac{\rho}{n} = \frac{R'}{m}$$

Si nous désignons par $\rho'$ le rayon du cercle C′, base du cône B′, les deux génératrices H′ et $H'_1$ comprendront, sur le cercle C′, un arc $h'h'_1$; et les droites K″ et $K''_1$, en lesquelles ces génératrices se transforment sur le développement du cône B′, comprendront, sur le cercle L′, un arc $k''k''_1$, et l'on aura :

$$\text{arc } k''k''_1 = \text{arc } h'h'_1.$$

Et comme on devra poser $(\text{arc. } h'h'_1) = \frac{2\pi\rho'}{n}$ (*); et $(\text{arc } k''k''_1) = \frac{2\pi R'}{m'}$ (**),

(*) Puisque les angles dièdres des plans méridiens $\widehat{(X, H), (X, H_1)}$ et $\widehat{(X, H'), (X, H'_1)}$ sont égaux.

(**) $m'$ étant différent de $m$, puis que les angles compris entre les droites K et $K_1$, K″ et $K''_1$ sur les développements respectifs des cônes B et B′ ne sont pas égaux.

on aura :

$$\frac{\rho'}{n} = \frac{R'}{m'}$$

on aura donc :

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{m'}{m}$$

Ainsi, les angles développés ($H$, $H_1$) et ($H'$, $H'_1$), sont entre eux dans le rapport inverse des rayons $\rho$ et $\rho'$ des cercles C et C', qui sont les cerclès-bases des cônes B et B'.

D'après ce qui vient d'être dit,
on aura :

$$\frac{\text{arc } xk}{\text{arc } x'k''} = \frac{\rho'}{\rho}$$

et, comme nous avons représenté l'arc $xk$ par $\mu$ et l'arc $x'k''$ par $\mu'$, on aura :

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Et comme nous avons posé précédemment

$$\mu = l.\gamma \text{ et } \mu' = l'.\gamma'$$

on en déduit :

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{l'.\rho'}{l.\rho}$$

Si l'on suppose donc deux cercles concentriques C et C', et que l'on mène par le centre $a$ commun à ces deux cercles une droite X, coupant le cercle C' au point $x$, puis deux droites Y et $Y_1$ tangentes au cercle C et coupant, la première le cercle C' au point $y$, et la seconde coupant le même cercle C' au point $y_1$.

Si l'on suppose que les arcs $\mu$ et $\mu'$, comptés sur le cercle C', partent du point $x$ et sont dès lors égaux entre eux, les arcs $\gamma$ et $\gamma'$ comptés sur le cercle C, les premiers du point $y$ et les seconds du point $y_1$, ne seront égaux entre eux qu'autant que l'on aura $l = l'$; et dans ce cas les deux droites construites en vertu des conditions $\mu = l\gamma$ et $\mu' = l'\gamma'$, seront toutes deux tangentes à un même cercle D et se superposeront. Mais, si $l'$ n'est pas égal à $l$, alors les deux droites seront distinctes et tangentes l'une à un cercle D, l'autre à un cercle D', ces deux cercles étant concentriques aux cercles C et C' et ayant des rayons différents.

Or, si $l' = l$ on en conclut que $\rho = \rho'$; et comme dans la question qui nous occupe les deux cônes B et B' sont distincts, et que dès lors $\rho$ et $\rho'$ ne peuvent être égaux, on en conclut que $l'$ ne peut être égal à $l$; et dès lors on doit en conclure que l'hélice conique E' ne peut avoir même rayon que l'hélice E. Au reste, on peut démontrer d'une manière très-simple et au moyen de considérations purement géométriques, que les hélices E et E' ne peuvent avoir même rayon, en résolvant le problème suivant.

Problème. *Construire le lieu des sommets des diverses hélices coniques E', E'', E''', intersections d'une surface hélicoïde conique gauche ou développable Σ, par une suite de cônes de révolution B', B'', B''' concentriques au cône de révolution B sur lequel se trouve tracée l'hélice conique E, directrice de la surface Σ.*

Étant donné un cône de révolution B et une sphère S du rayon R ayant son centre au sommet $a$ du cône B et une hélice E tracée sur le cône B, en faisant glisser une droite G tangentiellement au cône B et à la sphère et s'appuyant sur l'hélice E, on engendre la surface hélicoïde conique gauche ou développable Σ. Si l'on coupe la surface Σ par un cône de révolution B' concentrique au cône B, c'est-à-dire ayant même sommet $a$ et même axe X que le cône B, nous avons démontré que la courbe d'intersection était une hélice conique; plus loin nous ferons voir que cette courbe peut se composer de plusieurs hélices coniques, la surface Σ étant gauche ou étant développable.

Mais en ce moment, admettons que la surface Σ soit gauche et que la sphère S ait un rayon R plus petit que le rayon de l'hélice E (*).

Chaque génératrice G de la surface Σ coupera l'hélice E si Σ est gauche, et sera tangente à l'hélice E si Σ est développable; on devra donc considérer deux parties sur chacune des génératrices G, savoir : la partie inférieure et la partie supérieure;

Nous ne considérerons d'abord comme courbe d'intersection du cône B' et de la surface Σ, que la courbe formée par la rencontre des parties des génératrices G dirigées dans le même sens;

Le cône B' est composé de deux nappes, nous ne considérerons d'abord que la nappe qui enveloppe la nappe du cône B, sur laquelle l'hélice E se trouve tracée.

Cela posé :

Remarquons que chaque génératrice G de la surface Σ fait avec la généra-

---

(*) Les mêmes raisonnements s'appliqueront à l'hélicoïde développable; seulement, dans ce cas, le rayon R de la sphère S sera égal au rayon de l'hélice E.

trice du cône B un angle qui va en diminuant, depuis le point $e$, sommet de l'hélice E, jusqu'aux deux points situés à l'infini sur l'hélice E; le demi-angle au sommet du cône B' étant donné, il sera facile de trouver sur le cône B deux génératrices $V_1$ et $V_2$ situées à droite et à gauche du point $e$ et à égale distance angulaire de ce point $e$, et telles que les génératrices $G_1$ et $G_2$ de la surface $\Sigma$ correspondant à ces génératrices, seront parallèles à deux génératrices $K_1$ et $K_2$ du cône B'. Dès lors toutes les génératrices G de la surface $\Sigma$, comprises entre $G_1$ et $G_2$, couperont la nappe inférieure du cône B', et la courbe obtenue sera une hélice complète E' puisqu'elle aura ses deux points situés à l'infini, placés sur $G_1$ et $G_2$ ou $K_1$ et $K_2$.

Il est facile de construire le sommet de cette hélice conique complète E'.

Et en effet,

Menons un plan T tangent au cône B suivant une génératrice V, laquelle coupera l'hélice E en un point $x$; par ce point $x$ passera une génératrice G de la surface $\Sigma$, et cette génératrice G sera dans le plan T et tangente au cercle D ayant son centre au point $a$, sommet du cône B, et ayant pour rayon le rayon de la sphère S, puisque ce cercle D sera évidemment un grand cercle de cette sphère S.

Le plan T coupera le cône B' suivant deux génératrices K et K' et la droite G coupera K et K' en les points $y$ et $y'$; or, si l'on suppose que le cercle D a un rayon plus petit que le rayon de l'hélice E, le point $y$ sera plus éloigné du sommet $a$ que le point $y'$; ce sera ce point $y$ qui appartiendra à l'hélice E'. Et dès lors on voit que plus le point $x$ sera près du point $a$, plus le point $y$ sera près de ce même point $a$, puisque pour tous les plans tangents, les droites analogues de V et de K font le même angle.

Dès lors, au point $e$ de l'hélice E correspondra le point $e'$ de l'hélice E', ce point $e'$ étant le sommet de la courbe E', tout comme le point $e$ est le sommet de l'hélice E.

On peut donc dire que : *les sommets des hélices coniques, intersections de la surface $\Sigma$ et des cônes B', B'', B''', concentriques au cône B, sont situés sur la génératrice G de la surface $\Sigma$ qui passe par le sommet $e$ de l'hélice E.*

Et dès lors il est évident que l'hélice E' n'a pas même rayon que l'hélice E.

Maintenant remarquons :

Que les cônes B', B'', B''' ont des ouvertures différentes, que leur demi-angle au sommet augmente jusqu'à l'angle droit, auquel cas le dernier cône concentrique à B devient un plan Q passant par le sommet $a$ et perpendiculaire à l'axe X de ce cône B.

Dès lors la courbe E' peut bien ne pas exister pour certains de ces cônes concentriques, et en effet :

La génératrice G de la surface Σ qui passe par le sommet $e$ de l'hélice E, fait, avec la génératrice du cône B correspondant à ce point $e$, le plus grand angle que puisse faire une génératrice de cette surface Σ avec la génératrice qui lui correspond sur le cône B (désignant par génératrices correspondantes celles qui se coupent en un point situé sur l'hélice E). Si donc on mène un plan tangent au cône B par la droite G; et que dans ce plan et par le point $a$ on mène une droite U parallèle à G; et que l'on fasse mouvoir la droite U autour de l'axe X, cette droite engendrera un cône B, qui ne coupera aucune des parties inférieures des diverses génératrices G de la surface Σ. Dès lors la courbe E' n'existera plus, et à plus forte raison elle n'existera pas pour tout cône dont le demi-angle au sommet sera plus grand que celui du cône B, et par conséquent elle n'existera pas pour le plan Q, limite des cônes concentriques et sécants.

Admettant toujours que le rayon R de la sphère S est plus petit que le rayon de l'hélice E, ou, en d'autres termes, que la droite qui unit le sommet $a$ du cône B au sommet $e$ de l'hélice E, cherchons toutes les courbes dont se compose l'intersection de la surface hélicoïde conique gauche Σ et le cône B' concentrique à B.

Nous devons dès lors considérer les parties supérieure et inférieure de chaque génératrice G de la surface Σ, et en même temps les deux nappes du cône B'.

*De l'intersection complète de l'hélicoïde conique gauche Σ et d'un cône B' concentrique au cône B sur lequel est tracée l'hélice conique E directrice de la surface Σ.*

Imaginons la génératrice H du cône B passant par le sommet $e$ de l'hélice E, construisons le plan T tangent au cône B suivant H; traçons dans le plan T la droite G qui, passant par le point $e$, est tangente au cercle D, section faite par le plan T dans la sphère S; menons dans le plan T et par le point $a$ sommet du cône B une droite U coupant en un point $y$ la partie inférieure de G, de telle sorte que ce point $y$ se trouve au delà du point $e$ par rapport au cercle D; faisons tourner U autour de l'axe X du cône B, cette droite engendrera un cône B', lequel coupera la surface Σ suivant une courbe Z composée de plusieurs branches qu'il s'agit d'étudier.

Et d'abord, en vertu de ce qui a été démontré, si la courbe Z se compose de plusieurs branches, chacune de ses branches sera une hélice conique ou au moins une portion d'hélice conique.

Cela posé :

Puisque les droites U et G se coupent, on pourra toujours prendre sur l'hélice E deux points $x$ et $x'$ également distants du sommet $e$ pour lesquels les plans tangents Θ et Θ' au cône B couperont le cône B', savoir : le plan Θ suivant les géné-

ratrices K et $K_1$ et le plan $\Theta'$ suivant les droites $K'$ et $K'_1$ ; les plans $\Theta$ et $\Theta'$ seront tangents au cône B suivant les droites V et V', et la droite V divisera en deux parties égales l'angle $\widehat{KK_1}$ et la droite V' divisera aussi en deux parties égales l'angle $\widehat{K'K'_1}$, et d'ailleurs les angles $\widehat{KK_1}$ et $\widehat{K'K'_1}$ seront égaux.

Les droites K et K' rencontreront les parties inférieures des génératrices $G_1$ et $G_2$ de la surface $\Sigma$, lesquelles passent, savoir : $G_1$ par le point $x$ et $G_2$ par le point $x'$ ; et les droites $K_1$ et $K'_1$ rencontreront aussi les parties supérieures des droites $G_1$ et $G_2$.

Or, on voit de suite que les points $x$ et $x'$ peuvent être tels que les droites K et $G_1$, $K_1$ et $G_2$ se trouvent parallèles, et il sera facile de fixer les positions des points $x$ et $x'$ pour que cela ait lieu.

Dès lors on voit :

Que toutes les génératrices G de la surface $\Sigma$ comprises entre les points $x$ et $x'$ de l'hélice E perceront la nappe inférieure du cône B' en deux points ; que les génératrices $G_1$ et $G_2$ parallèles au cône B' ne perceront la nappe inférieure de ce cône B' qu'en un seul point ; que toutes les génératrices G de la surface $\Sigma$ passant par les points de l'hélice E situés au delà des points $x$ et $x'$ jusqu'aux deux points de E situés à l'infini, couperont les deux nappes de la surface B', chacune d'elles perçant la nappe inférieure et la nappe supérieure de ce cône B' et perçant chaque nappe en un seul point.

On voit donc :

Que toutes les génératrices G de la surface $\Sigma$ comprises entre $G_1$ et $G_2$ donnent trois hélices coniques sur la nappe inférieure du cône B', : la première E' située sur les génératrices de ce cône B' comprises entre K et $K_1$, et qui est complète, puisqu'elle a deux points situés à l'infini, l'un sur K et l'autre sur $K_1$ ; la deuxième $E'_1$ qui est située sur les génératrices comprises entre K' et une certaine génératrice U' du cône B' (dont nous déterminons plus loin la position), et la troisième $E'_2$ qui est située sur les génératrices comprises entre U' et $K'_1$.

Mais ces courbes $E'_1$ et $E'_2$ ne sont que des arcs d'hélices coniques, puisque aucun de leurs points ne se trouve situé à l'infini.

Ces deux hélices $E'_1$ et $E'_2$ se coupent au point en lequel la génératrice U' perce la surface $\Sigma$. Cette génératrice U' s'obtient de la manière suivante : le plan T' tangent au cône B suivant la génératrice H passant par le point $e_1$, sommet de l'hélice E, coupe le cône B' suivant deux génératrices U et U' dont l'angle $\widehat{U, U'}$ est divisé en deux parties égales par H ; la droite U contient le sommet $e'$ de l'hélice E', et la droite U' contient le point $k$, en lequel les arcs d'hélices $E'_1$ et $E'_2$ se croisent.

Les génératrices $G_1$ et $G_2$ percent le cône B' en les points $g_1$ et $g_2$, et l'arc $E'_1$ va

du point $g_1$ au point $h$, l'arc $E_2'$ allant du point $h$ au point $g_2$; il est d'ailleurs évident que le point $h$ est plus éloigné du sommet $a$ que les points $g_1$ et $g_2$; ces deux derniers étant d'ailleurs à égale distance de ce même sommet $a$.

Les courbes tracées sur la nappe inférieure du cône B′ étant trouvées, cherchons celles qui existent sur la nappe supérieure de ce cône.

Toutes les génératrices G situées au delà de $G_1$ et de $G_2$, en marchant des points $x$ et $x'$ vers les points infinis de E, perceront la nappe inférieure du cône B′ en un seul point, et continueront dès lors les arcs $E_1'$ et $E_2'$. Et si nous désignons par $H_1$ et $H_2$ les génératrices du cône B qui contiennent les points infinis de E, on voit que si l'on mène parallèlement à $H_1$ et $H_2$, et tangentiellement au cône B et à la sphère S deux droites $G_1'$ et $G_2'$, ces droites seront les génératrices extrêmes de la surface Σ, lesquelles perceront la nappe inférieure du cône B′ en les points $g_1'$ et $g_2'$, et la nappe supérieure du cône B′ en les points $h_1'$ et $h_2'$.

Dès lors les arcs d'hélices $E_1'$ et $E_2'$ iront respectivement du point $h$ aux points $g_1'$ et $g_2'$, et ces points $g_1'$ et $g_2'$ seront les points de ces arcs les plus rapprochés et également distants du sommet $a$ du cône B′.

Revenons maintenant aux hélices situées sur la nappe supérieure du cône B′.

Nous avons vu que les génératrices $G_1$ et $G_2$ de Σ étaient parallèles aux génératrices K et $K_1$; par conséquent, ces génératrices K et $K_1$ contiennent les points situés à l'infini des courbes $E_3$ et $E_4$ placées sur la nappe supérieure. On a donc des arcs d'hélices coniques non finis, mais infinis dans un sens, sur la nappe supérieure.

La courbe $E_3'$ va de la génératrice K au point $h_1'$, et la courbe $E_4'$ va de la génératrice $K_1$ au point $h_2'$; les points $h_1'$ et $h_2'$ sont également distants du sommet $a$ du cône B′.

Les cinq courbes E′, $E_1'$, $E_2'$ sur la nappe inférieure et $E_3'$, $E_4'$ sur la nappe supérieure du cône B′ sont donc maintenant complétement définies et déterminées.

Lorsque l'angle au sommet du cône B′ sera tel que la droite G qui passe par le sommet $e$ de l'hélice E ne coupera ce cône B′ qu'en un seul point, alors la courbe E′ disparaîtra.

Et lorsque l'angle au sommet du cône B′, augmentant successivement, aura atteint une amplitude telle que la droite G percera la nappe inférieure et la nappe supérieure du cône B′, alors la courbe E′ n'existera plus; mais alors les arcs d'hélices $E_3'$ et $E_4'$ ne seront plus infinis et chacun dans un sens, car alors ils viendront s'arrêter angulairement en un point qui sera celui en lequel la droite G perce la nappe supérieure du cône B′. En sorte que les arcs $E_3'$ et $E_4'$ offriront la même disposition sur la nappe supérieure, que présentent les arcs $E_1'$ et $E_2'$ sur la nappe inférieure.

Enfin, lorsque le demi-angle au sommet du cône B′ sera droit, ce cône B′ deviendra un plan Q, et alors les nappes coniques se superposent et se confondent, et les arcs $E_1'$ et $E_2'$, $E_3'$ et $E_4'$ se superposent et se confondent. On aura donc, dans ce cas, deux arcs d'hélices s'arrêtant angulairement deux à deux ; et comme une hélice conique sur un plan ne peut être qu'une droite (*), on voit que l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème : *Une surface hélicoïde conique gauche* Σ *est coupée par un plan* Q *passant par le sommet* a *et perpendiculaire à l'axe* X *d'un cône* B *sur lequel est tracée l'hélice conique* E *de la surface* Σ, *suivant deux portions finies de droite, s'arrêtant angulairement à un même point.*

Examinons la forme que doivent présenter les deux portions de droite formant l'intersection de la surface Σ par le plan Q.

Toutes les parties supérieures des génératrices G de la surface Σ sont seules coupées par le plan Q ; et toutes les génératrices G sont coupées par le plan Q. Par conséquent, si l'on considère les deux génératrices $H_1$ et $H_2$ du cône B qui contiennent les points situés à l'infini de l'hélice E, et si l'on mène les plans $\Delta_1$ et $\Delta_2$ respectivement tangents au cône B et suivant les génératrices $H_1$ et $H_2$, ces plans couperont la sphère S suivant deux grands cercles, l'un $D_1$ et l'autre $D_2$.

Et les tangentes à ces cercles qui seront parallèles aux génératrices $H_1$ et $H_2$, perceront le plan Q en deux points $q_1$ et $q_2$.

La droite G se mouvant sur l'hélice E percera le plan Q en divers points à partir du point $q_1$ jusqu'au point $p$ en lequel sera percé ce plan Q par la génératrice G passant par le sommet $e$ de l'hélice E, et tous ces points formeront une droite $q_1p$.

Le point $p$ sera plus loin du point $a$, sommet du cône B, que le point $q_1$ ; à partir du point $p$, la droite G, continuant à se mouvoir sur l'hélice E, percera le plan Q en des points qui se rapprocheront du point $a$, jusqu'à ce que enfin elle prenne la dernière position en laquelle étant tangente au cercle $D_2$ elle percera le plan Q au point $q_2$, et ces points formeront une droite $pq_2$ ; on voit donc que la droite brisée $q_1pq_2$ forme un angle dont le sommet $p$ est plus éloigné du point $a$ que les extrémités $q_1$ et $q_2$ de ses deux côtés.

(*) Un plan peut avoir deux modes de générations : 1° la *génération cylindrique*, alors il est engendré par une droite se mouvant parallèlement à elle-même, en s'appuyant sur une droite fixe ; 2° la *génération conique*, alors il est engendré par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur une droite fixe ; et si l'on suppose un cercle C et une droite passant par le centre de ce centre C et s'appuyant sur ce cercle, on aura la génération d'un plan, limite des cônes de révolution ; le plan Q peut donc être considéré rigoureusement comme un cône de révolution appartenant à la *série* des cônes concentriques B′, B″, B‴.

Ce que nous venons de dire permettra, dans tous les cas, de construire l'intersection d'une surface hélicoïde conique gauche $\Sigma$ et du plan Q.

*De l'intersection complète d'une surface hélicoïde conique développable $\Sigma$ par un cône B' concentrique au cône B sur lequel est tracée l'hélice E, arête de rebroussement de la surface $\Sigma$.*

Lorsque la sphère S a un rayon R plus petit que la distance du sommet *a* du cône B au sommet *e* de l'hélice E tracée sur le cône B, on peut faire mouvoir de deux manières différentes une droite G, cette droite étant assujettie pendant son mouvement à s'appuyer sur l'hélice E et à être tangente en même temps et à la sphère S et au cône B.

Car ayant construit un plan T tangent au cône B suivant une génératrice H de ce cône, laquelle coupe l'hélice E au point $x$, on peut mener par ce point $x$ et dans le plan T deux droites G et M tangentes au grand cercle D, section de la sphère S par le plan T.

On formera donc avec toutes les tangentes G situées à droite du cercle D une surface hélicoïde conique gauche $\Sigma$; et avec toutes les tangentes M situées à gauche du cercle D, une seconde surface hélicoïde conique gauche $\Sigma_1$.

Il est évident que les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ sont symétriques l'une à l'autre par rapport au plan P passant par l'axe X du cône B et le sommet *e* de l'hélice E.

Mais si le rayon R de la sphère S augmente, aussitôt qu'il sera égal à $\overline{ae}$ (distance du sommet *a* du cône B au sommet *e* de l'hélice E), en d'autres termes, aussitôt que R sera égal au rayon de l'hélice E, les deux surfaces gauches $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ne se confondront pas en une seule et même surface, qui ne sera autre que la surface hélicoïde conique développable ayant l'hélice E pour arête de rebroussement; l'une de ces surfaces $\Sigma$, par exemple, deviendra la surface développable, et l'autre surface $\Sigma_1$ restera gauche, et la surface développable $\Sigma$ sera symétrique par rapport au plan P.

Cela dit, considérons la surface hélicoïde conique développable $\Sigma$ ayant l'hélice conique E pour arête de rebroussement, et coupons cette surface $\Sigma$ par un cône B' concentrique au cône B.

Désignons par $H_1$ et $H_2$ les génératrices du cône B qui contiennent les points situés à l'infini de l'hélice E, et désignons par $z_1$ et $z_2$ ces points de l'hélice E.

Toutes les génératrices de la surface hélicoïde développable $\Sigma$ sont tangentes à l'hélice E et tangentes en même temps à la sphère S dont le rayon est égal au rayon de l'hélice E; par conséquent, si je construis les plans $\Delta_1$ et $\Delta_2$ tangents au cône B suivant les génératrices $H_1$ et $H_2$, ces plans couperont la sphère S suivant les grands cercles $D_1$ et $D_2$; et si l'on mène la droite G, tangente au cercle $D_1$, mais

*à droite* ou *à gauche* du sommet $e$ de l'hélice E, en un mot dans le sens convenable pour que la surface $\Sigma$ soit développable et parallèlement à la génératrice $H_1$, et la droite $G_2$ tangente au cercle $D_2$, mais aussi *à droite* ou *à gauche* du sommet $e$ de l'hélice E et dirigée dans le même sens que $G_1$ et parallèlement à $H_2$, ces deux droites $G_1$ et $G_2$ seront les tangentes de l'hélice E pour les points situés à l'infini $z_1$ et $z_2$.

Ces droites $G_1$ et $G_2$ font des angles nuls avec les génératrices $H_1$ et $H_2$ du cône B et la droite G tangente à l'hélice E au sommet $e$ coupe sous l'angle droit la génératrice H du cône B passant par ce sommet $e$.

Cela posé :

On voit que chaque génératrice G de la surface $\Sigma$ fait avec la génératrice H du cône B, qui lui correspond, des angles qui vont de l'angle droit à l'angle nul, à mesure que l'on marche sur l'hélice E du point $e$ au point $z_1$, ou du point $e$ au point $z_2$.

Par conséquent, le demi-angle au sommet du cône B' concentrique au cône B étant donné, il existera toujours deux points $x$ et $x'$ situés sur l'hélice E et à égale distance du sommet $e$ pour lesquels les génératrices $G_1'$ et $G_2'$ de la surface $\Sigma$ seront parallèles à deux génératrices $K_1$ et $K_2'$ du cône sécant B'. Ces génératrices $K_1$ et $K_2'$ du cône B' étant déterminées, de position, ainsi qu'il suit :

Par les points $x$ et $x'$ passent les génératrices $H_1'$ et $H_2'$ du cône B; menant suivant ces génératrices les plans $\Theta$ et $\Theta'$, tangents au cône B, ces plans couperont le cône B', savoir : le plan $\Theta$ suivant les droites $K_1$ et $K_1'$ et le plan $\Theta'$ suivant les droites $K_2$ et $K_2'$.

Les droites $H_1'$ et $H_2'$ diviseront respectivement en deux parties égales les angles $\widehat{K_1K_1'}$ et $\widehat{K_2K_2'}$; or, comme la surface $\Sigma$ est symétrique par rapport au plan P qui passe par l'axe X du cône B et le point $e$, sommet de l'hélice E, il est évident que la génératrice $G_1'$ sera parallèle à $K_1$ et que la génératrice $G_2'$ sera parallèle à $K_2'$, les génératrices $G_1'$ et $G_2'$ venant d'ailleurs se couper en un même point sur le plan de symétrie P.

Cela posé :

1° En marchant sur l'hélice E, depuis le point $x$ jusqu'au point situé à l'infini $z_1$, toutes les génératrices de l'hélicoïde $\Sigma$ perceront le cône B', et les points obtenus formeront une hélice conique $E_1'$ telle qu'elle s'arrêtera brusquement au point $g_1$, en lequel le cône B' est percé par la génératrice $G_1$, cette hélice $E_1'$ ayant d'ailleurs un point situé à l'infini sur la génératrice $K_1$.

2° En marchant sur l'hélice E, depuis le point $x'$ jusqu'au point situé à l'infini $z_2$, toutes les génératrices de l'hélicoïde $\Sigma$ perceront le cône B', et les points obtenus formeront une hélice $E_2'$ telle qu'elle s'arrêtera brusquement au point $g_2$,

en lequel le cône B′ est percé par la génératrice $G_1$, cette hélice $E_4'$ ayant d'ailleurs un point situé à l'infini sur la génératrice $K_4'$.

D'après ce qui a été dit précédemment, les points $e_1'$ et $e_2'$, en lesquels le cône B′ est percé par la génératrice G passant par le sommet $e$ de l'hélice E, seront : le point $e'$ le sommet de l'hélice $E_1'$ et le point $e_2'$ le sommet de l'hélice $E_2'$. D'ailleurs, ces deux courbes $E_1'$ et $E_2'$ seront symétriquement placées sur le cône B′ par rapport au plan de symétrie P.

Toutes les génératrices comprises entre $G_1'$ et $G_2'$ percent en deux points la nappe inférieure du cône B′, mais les génératrices comprises entre $G_1$ et $G_1'$, $G_2$ et $G_2'$, percent en même temps et la nappe inférieure et la nappe supérieure du cône B′ et chacune de ces nappes en un point.

On voit donc que l'on obtiendra sur la nappe supérieure du cône B′ deux nouvelles hélices $E_3'$ et $E_4'$ s'arrêtant brusquement, savoir : l'hélice $E_3'$ au point $g_3$, en lequel la nappe supérieure de B est percée par $G_1$ et l'hélice $E_4'$ au point $g_4$, en lequel la nappe supérieure de B′ est percée par $G_2$, et d'ailleurs la courbe $E_3'$ aura un point situé à l'infini sur $G_1'$, et la courbe $E_4'$ aura un point situé à l'infini sur $G_2'$.

Les quatre courbes $E_1'$, $E_2'$, $E_3'$, $E_4'$ ne seront donc point des hélices coniques complètes, mais des arcs (infinis dans un sens seulement) d'hélices coniques.

Et tout ce que nous venons de dire aura lieu, quel que soit le demi-angle, au sommet du cône sécant et concentrique B′.

Et lorsque cet angle sera droit, le cône B′ deviendra le plan Q, lequel, passant par le sommet $a$ et perpendiculairement à l'axe X du cône B, coupera la surface hélicoïde développable Σ suivant deux droites infinies dans un sens, s'arrêtant brusquement, l'une au point $h_1$ en lequel ce plan Q est percé par $G_1$, et l'autre au point $h_2$ en lequel ce même plan Q est percé par $G_2$.

D'ailleurs, ces deux droites seront symétriquement placées par rapport au plan de symétrie P, et se couperont en un point $y$ situé sur ce plan, ce point $y$ étant plus éloigné du sommet $a$ du cône B que les points $h_1$ et $h_2$, lesquels seront à égale distance de ce point $a$.

Ce que nous venons de dire permettra, dans tous les cas, de construire l'intersection d'une surface hélicoïde conique développable Σ et du plan Q.

*De l'intersection de la surface hélicoïde conique gauche Σ lorsque le rayon de la sphère S est plus grand que le rayon de l'hélice E.*

La génératrice G, qui engendre la surface Σ en s'appuyant sur l'hélice E et se mouvant tangentiellement au cône B et à la sphère S, ne pourra pas parcourir

toute l'hélice E ; cette génératrice G ne pourra pas s'appuyer sur l'arc de l'hélice E intercepté par la sphère S.

Il est évident que cette surface Σ sera composée de deux nappes distinctes et séparées et non symétriquement placées par rapport au plan P, lequel passe par l'axe X du cône B et le sommet *e* de l'hélice E.

Il est évident aussi que cette surface hélicoïde conique gauche n'aura pas, comme l'hélicoïde conique développable, une ligne de *striction* située sur le plan P (*), puisque le plan P n'est pas un plan de symétrie par rapport à l'une et à l'autre des deux nappes de la surface hélicoïdale gauche Σ ; dès lors, les génératrices de la surface gauche Σ ne se couperont pas deux à deux sur ce plan P.

Au reste, pour mettre ce qui précède hors de doute, menons par une génératrice H du cône B un plan T tangent à ce cône B et coupant la sphère S suivant un grand cercle D ; la droite H coupera l'hélice E en un point $x$ situé hors du cercle D, par ce point on pourra mener deux tangentes G et G′ à ce cercle. Si l'on prend une génératrice $H_1$ sur le cône B et coupant l'hélice E en un point $x'$ tel que les points $x$ et $x'$ soient également distants du sommet *e* de l'hélice E, on aura aussi un plan tangent $T_1$ et un cercle $D_1$, et par le point $x'$ on pourra mener deux tangentes $G_1$ et $G_1'$ au cercle $D_1$. Or, si les tangentes G et $G_1$ sont construites à gauche par rapport aux cercles D et $D_1$, les génératrices G′ et $G_1'$ seront construites à droite par rapport à ces mêmes cercles. Toutes les génératrices G, $G_1$... formeront une surface Σ, et toutes les génératrices G′, $G_1'$... formeront une seconde surface Σ′.

Les génératrices G et G′, $G_1$ et $G_1'$..... seront symétriquement placées à droite et à gauche du plan P, et dès lors les deux surfaces Σ et Σ′ s'entrecouperont sur ce plan P.

Tout ce que nous venons de dire s'applique à la surface hélicoïde conique gauche, que le rayon de la sphère S soit plus grand ou plus petit que le rayon de l'hélice E.

Dans tous les cas, on aura deux surfaces gauches Σ et Σ′ ; mais lorsque l'on considère la courbe E comme arête de rebroussement, l'une des surfaces hélicoïdes Σ ou Σ′ devient développable, et dans ce cas le rayon de la sphère S est égal au rayon de l'hélice E.

Il sera facile, en vertu de tout ce qui a été développé précédemment, lorsque

---

(*) On appelle ligne de *striction* d'une surface réglée, la courbe dont les points sont donnés par l'intersection d'une suite de *couples* de génératrices droites situées à des distances finies, l'une par rapport à l'autre. Ainsi, le conoïde engendré par une droite se mouvant parallèlement à un plan $x$ en s'appuyant sur une droite D et sur un cercle C, a pour ligne de *striction* la droite D.

nous avons supposé que le rayon de la sphère S était plus petit que le rayon de l'hélice E, de reconnaître la position et l'étendue des arcs d'hélices coniques dont se composera la courbe intersection de la surface gauche $\Sigma$ avec un cône sécant et concentrique B′, quelle que soit la grandeur du demi-angle au sommet de ce cône B′; et il sera facile aussi de construire les droites, intersection de cette surface $\Sigma$, avec le plan Q. Il est inutile, je pense, d'entrer dans plus de détails sur ce sujet (*).

Je vais maintenant donner une démonstration directe du théorème que j'ai déduit par *analogie*, savoir :

*Toute surface hélicoïde conique gauche ou développable $\Sigma$ est coupée par un plan* Q *passant par le sommet* a *et perpendiculairement à l'axe* X *du cône* B *sur lequel est tracée l'hélice conique* E *directrice de la surface $\Sigma$, suivant des lignes droites.*

Imaginons le cône de révolution B et son axe X; le plan Q perpendiculaire à l'axe X et passant par le sommet $a$ du cône B; traçons sur le cône B l'hélice E; menons sur le cône B une suite de génératrices équidistantes entre elles H, H′, H″, H‴..... et coupant l'hélice E en les points $x$, $x'$, $x''$, $x'''$.....; construisons les plans T, T′, T″, T‴ respectivement tangents au cône B suivant chacune des génératrices H, H′, H″, H‴; ces plans couperont le plan Q suivant les droites Y, Y′, Y″, Y‴ qui seront respectivement perpendiculaires aux génératrices H, H′, H″, H‴.

Les angles $\widehat{HH'}$, $\widehat{H'H''}$, $\widehat{H''H'''}$ seront égaux entre eux, et je désigne cet angle par $\mathfrak{b}$.

Les angles $\widehat{YY'}$, $\widehat{Y'Y''}$, $\widehat{Y''Y'''}$ seront aussi égaux entre eux, et je désigne cet angle par $\gamma$.

Développons le cône B sur son plan tangent T, alors les génératrices prendront les positions H, $H_1$, $H_2$, $H_3$, et les angles $\widehat{HH_1}$, $\widehat{H_1H_2}$, $\widehat{H_2H_3}$ seront égaux entre eux et à $\mathfrak{b}'$.

Les droites Y, Y′, Y″, Y‴ prendront les positions Y, $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, et l'on aura les

(*) On remarquera sans peine que dans l'*article* où nous avons supposé le rayon de la sphère S plus petit que le rayon de l'hélice E, nous avons insisté sur la forme de l'intersection du cône B′ et de la surface $\Sigma$, parce que cette discussion convenait aussi au cas où le rayon de la sphère S était plus grand que le rayon de l'hélice E; et au contraire, dans l'*article* où nous avons supposé le rayon de la sphère S plus grand que celui de l'hélice E, nous nous sommes occupés principalement du nombre des surfaces gauches qui passaient par cette hélice E; et des relations de position qui existaient entre elles, parce que cette discussion convenait aussi au cas où le rayon de la sphère S était plus petit que le rayon de l'hélice E.

droites $Y_1$ et $H_1$, $Y_2$ et $H_2$, $Y_3$ et $H_3$ perpendiculaires entre elles, et les angles $\widehat{YY_1}$, $\widehat{Y_1Y_2}$, $\widehat{Y_2Y_3}$ seront égaux entre eux et à $\gamma$.

L'hélice E se transformera en une droite L, et les points $x$, $x'$, $x''$, $x'''$ viendront prendre sur L les positions $x$, $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Le plan T coupera la sphère S dont le centre est au point $a$ sommet du cône B suivant un grand cercle D.

Les diverses génératrices G, G', G'', G''' de la surface hélicoïde conique gauche ou développable $\Sigma$, lesquelles passaient par les points $x$, $x'$, $x''$, $x'''$ de l'hélice E, prendront sur le développement les positions G, $G_1$, $G_2$, $G_3$, ces dernières droites passent respectivement par les points $x$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ de la droite L, et seront tangentes au cercle D, et comme les angles $\widehat{GG'}$, $\widehat{G'G''}$, $\widehat{G''G'''}$ étaient égaux entre eux, les angles $\widehat{GG_1}$, $\widehat{G_1G_2}$, $\widehat{G_2G_3}$ seront aussi égaux entre eux.

En vertu du théorème (A), les droites G et Y, $G_1$ et $Y_1$, $G_2$ et $Y_2$, $G_3$ et $Y_3$ se couperont en les points $z$, $z_1$, $z_2$, $z_3$ qui seront en ligne droite, je désigne cette droite par J.

Cela posé, lorsqu'on enroulera le plan T sur le cône B, les droites $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ viendront prendre les positions Y', Y'', Y''', et les points $z_1$, $z_2$, $z_3$ viendront se placer en les points $z'$, $z''$, $z'''$.

Je dis que le lieu des points $z'$, $z''$, $z'''$ est une droite J'.

Et en effet :

L'angle $\sigma'$ est plus grand que $\sigma$. Dès lors, l'angle $\gamma$ ne sera pas égal à $\sigma'$.

Si donc sur le développement on prend la droite Y pour origine des angles $\gamma$ et $\sigma'$, et que l'on mène par le point $a$ une suite de droites $Y_1'$, $Y_2''$, $Y_3'''$ faisant entre elles des angles égaux à $\gamma$, et que du point $a$ on porte sur $Y_1'$ la longueur $az_1$, on aura le point $z'$, sur $Y_2''$ la longueur $az_2$ on aura le point $z''$, sur $Y_3'''$ la longueur $az_3$ on aura le point $z'''$, et tous les points $z'$, $z''$, $z'''$ seront en ligne droite en vertu du théorème (D). Il est donc démontré que le plan Q coupe la surface $\Sigma$ suivant une droite J'.

On trouvera les diverses droites dont se compose la section complète du plan Q et de la surface $\Sigma$, en examinant la manière d'être des nappes de cette surface $\Sigma$ par rapport au plan Q.

Occupons-nous maintenant de la construction de la tangente en un point de la développante sphérique rallongée ou raccourcie.

1° *De la construction de la tangente en un point de la développante sphérique.*

Dans le mémoire publié dans le 23e *cahier du Journal de l'École polytechnique*, et qui a pour titre : *Construction des centres de courbure des épicycloïdes planes et sphé-*

*riques*, j'ai donné la construction de la tangente en un point de la développante sphérique, en considérant cette courbe comme une épicycloïde sphérique. On peut trouver une autre construction de cette tangente, en considérant la développante sphérique comme ayant pour développée une hélice conique.

Et en effet :

Étant donnés la développante sphérique $\delta$ et le cône B de révolution enveloppe des plans normaux de cette courbe, pour construire la tangente $\theta$ au point $m$ de $\delta$, on exécutera les constructions suivantes :

1° On mènera par le point $m$ une droite K tangente au cône B en un point $p$ ; on mènera en $p$ le plan T au cône B ; on fera passer par la droite K un plan $\Delta$ perpendiculaire au plan T, ce plan $\Delta$ sera le plan osculateur en $p$ de l'hélice conique E, développée de la courbe $\delta$, et il sera tangent tout le long de K à la surface hélicoïdale $\Sigma$ ayant l'hélice E pour arête de rebroussement ;

2° On mènera en $m$ un plan $\Theta$ perpendiculaire à la droite $\overline{am}$, laquelle unit le point $m$ et le point $a$ sommet du cône B ; ce plan $\Theta$ sera tangent en $m$ à la sphère S sur laquelle la courbe $\delta$ se trouve tracée.

L'intersection des plans T et $\Theta$ donnera la tangente $\theta$ demandée, puisque la développante sphérique $\delta$ est l'intersection des deux surfaces hélicoïdale $\Sigma$ et sphérique S.

2° *De la construction de la tangente en un point de la développante sphérique rallongée ou raccourcie.*

Étant donnés la développante sphérique rallongée ou raccourcie $\delta_1$ et le cône B enveloppe des plans normaux de la développante sphérique parfaite $\delta$ dont $\delta_1$ est la courbe rallongée ou raccourcie, pour construire en un point $m$ de $\delta_1$ la tangente $\theta$, on exécutera les constructions suivantes :

1° Du point $a$ sommet du cône B, avec un rayon arbitraire R, on décrira une sphère S ; par le point $m$ et un autre point $m'_1$ situé à distance finie par rapport au point $m$ donné (ces deux points $m$ et $m'$ appartenant à la courbe $\delta_1$), on mènera deux droites K et K' tangentes au cône B et à la sphère S.

On construira trois cônes B', B'', B''' concentriques au cône B et coupant la droite K en les points $m$, $n$ et $p$, et la droite K' en les points $m'_1$, $n'$ et $p'$. En développant ces cônes, on aura l'inclinaison des hélices coniques E', E'', E''', intersections de ces cônes avec la surface hélicoïdale gauche $\Sigma$ dont K et K' sont deux génératrices, car ces courbes E', E'', E''' passent respectivement par les points $m$ et $m'_1$, $n$ et $n'$, $p$ et $p'$.

Les trois tangentes $t'$, $t''$, $t'''$ étant déterminées, on connaîtra l'hyperboloïde $\Sigma_1$

à une nappe et tangent à la surface hélicoïdale $\Sigma$ tout le long de K. On pourra donc construire le plan T tangent au point $m$ à la surface $\Sigma$.

2° On construira le plan $\Theta$ perpendiculaire à la droite $\overline{am}$ qui unit le point $m$ de $\delta_1$ au sommet $a$ du cône B, ce plan sera tangent à la sphère S' dont le centre est en $a$ et dont le rayon est $\overline{am}$, et l'on sait que cette sphère S' contient la courbe $\delta_1$.

La tangente $\theta$ demandée sera donc l'intersection des deux plans T et $\Theta$, puisque la développante sphérique rallongée ou raccourcie $\delta_1$ est l'intersection des deux surfaces hélicoïdale $\Sigma$ et sphérique S'.

3° *De la construction de la tangente en un point de la développante hélico-sphérique rallongée ou raccourcie.*

Étant donnée la développante hélico-sphérique rallongée ou raccourcie $\delta'$ et la surface hélicoïde conique développable $\Sigma$ sur laquelle cette courbe est tracée, et le cône B contenant l'hélice E, arête de rebroussement de la surface $\Sigma$, pour construire en un point $m$ de $\delta'$ la tangente $\theta$, il faudra exécuter les constructions suivantes :

1° Construire le plan T tangent en $m$ à la surface développable $\Sigma$, ce plan sera le plan osculateur de l'hélice E;

2° Construire le cône B' ayant son sommet au point $a$, sommet du cône B, et pour directrice la courbe $\delta'$ donnée;

3° Construire la sphère S ayant son centre au point $a$ et un rayon d'une longueur arbitraire; cette sphère S sera coupée par le cône B' suivant une développante sphérique rallongée ou raccourcie $\delta_1$;

4° On construira la tangente $\theta_1$ à la courbe $\delta_1$ pour le point $m_1$ en lequel la génératrice $\overline{am}$ du cône B' perce la sphère S;

5° Par la tangente $\theta_1$ et le point $a$, on fera passer un plan $\Theta$ qui sera tangent au cône B' au point $m$.

La tangente $\theta$ demandée sera l'intersection des deux plans T et $\Theta$, puisque la courbe donnée $\delta'$ est l'intersection des deux surfaces hélicoïde développable $\Sigma$ et conique B'.

En terminant ce chapitre, résolvons le problème suivant :

Problème : *Par deux hélices coniques, faire passer une surface hélicoïdale.*

Concevons deux cônes B et B' de révolution et concentriques; et ayant dès lors même axe X et même sommet $a$.

Traçons sur ces deux cônes deux hélices, l'une E sur le cône B, et l'autre E' sur le cône B'.

Désignons par H la génératrice du cône B qui coupe rectangulairement en le point $e$ l'hélice E, et par H' la génératrice du cône B' qui coupe aussi rectangulairement en le point $e'$ l'hélice E'.

Les points $e$ et $e'$ seront dès lors les sommets respectifs des courbes E et E'.

Désignons par $\delta$ le demi-angle au sommet du cône B, et par $\delta'$ le demi-angle au sommet du cône B', et supposons $\delta < \delta'$.

Cela posé :

L'hélice E étant placée sur la nappe inférieure du cône B, l'hélice E' pourra avoir deux positions et être placée ou 1° sur la nappe inférieure du cône B', ou 2° sur la nappe supérieure de ce cône B'.

Nous avons donc deux cas à examiner.

Premier cas. *Les deux hélices E et E' étant supposées tracées sur les nappes inférieures des cônes B et B'.*

On pourra toujours unir les sommets $e$ et $e'$ par une droite G et abaisser du point $a$, sommet commun des deux cônes, une perpendiculaire sur G et coupant cette droite en un point $g$.

Si du point $a$ comme centre et avec $\overline{ag}$ comme rayon, on décrit une sphère S, la surface engendrée par la droite G se mouvant sur les courbes E et E' et tangentiellement à la sphère S engendrera une surface hélicoïde conique gauche ou développable Σ.

Cette surface Σ sera gauche si la droite G, qui unit les points $e$ et $e'$, n'est pas dirigée perpendiculairement à l'axe X; cette surface Σ sera au contraire développable si la droite G, qui unit les points $e$ et $e'$, est dirigée perpendiculairement à l'axe X.

Le sommet $e'$ de l'hélice E' peut être plus près ou plus éloigné du sommet $a$ des deux cônes que le sommet $e$ de l'hélice E; la construction que nous venons d'exposer donne la solution du problème toutes les fois que les points $e$ et $e'$ seront situés d'un même côté par rapport au point $g$; mais si ce point $g$ est situé entre les sommets $e$ et $e'$, la construction précédente ne sera plus exacte, car on se rappelle que dans ce cas l'hélicoïde gauche coupée par deux cônes concentriques B' et B'' donne sur chacun d'eux deux courbes dont les sommets ne sont pas situés sur la droite qui passe par le sommet de l'hélice directrice.

Dans ce cas, il faudrait imaginer un cône $B_1$ ayant même sommet $a$ et même axe X que les cônes donnés B et B', et dont le demi-angle au sommet $\delta_1$ serait plus petit que l'angle $\delta$. On ferait mouvoir une droite G sur les hélices E et E' et tangentiellement au cône $B_1$, la surface engendrée Σ ne sera une hélicoïde gauche qu'autant que les perpendiculaires abaissées du point $a$ sur deux génératrices G

et G seront égales (et si ces deux perpendiculaires sont égales, toutes les génératrices G seront tangentes à une même sphère).

Il faudra donc construire deux génératrices G et G' et les perpendiculaires à ces génératrices; si ces perpendiculaires ne sont pas égales, on fera varier le demi-angle $\epsilon_1$ du cône $B_1$; pour chaque valeur de $\epsilon_1$, on construira deux nouvelles génératrices et leurs perpendiculaires, jusqu'à ce que l'on tombe sur une valeur de $\epsilon_1$, telles que ces perpendiculaires soient égales; la solution ne pourra donc être donnée qu'au moyen d'une courbe d'erreur.

Deuxième cas. *Les deux hélices E et E' étant tracées, l'une sur la nappe inférieure du cône B et l'autre sur la nappe supérieure du cône B'.*

La construction à employer sera encore celle que nous avons indiquée dans le premier cas, celle où l'on est obligé d'avoir recours à une courbe d'erreur.

Remarquons cependant que si, quelle que soit la position des hélices E et E' sur les cônes B et B', on veut savoir s'il est possible de faire passer par les deux courbes données une surface hélicoïde développable, la construction suivante résoudra toujours la question.

Du point $a'$, sommet des cônes B et B' comme centre, et avec un rayon R assez grand, on décrira une sphère S qui coupera : 1° le cône B suivant deux cercles C et $C_1$ de rayons égaux et que je désigne par $\rho$; 2° le cône B' suivant deux cercles C' et $C_1'$ de rayons égaux et que je désigne par $\rho'$.

Cette sphère S coupera : 1° l'hélice E en deux points $h$ et $h_1$ situés tous les deux sur le cercle C ou sur le cercle $C_1$, et 2° l'hélice E' en deux points $h'$ et $h_1'$ situés tous les deux sur le cercle C' ou sur le cercle $C_1'$.

On tracera sur la sphère S : 1° les deux développantes $\delta$ et $\delta_1$ ayant l'hélice E pour développée, la première $\delta$ ayant son origine ou point de rebroussement en $h$, et la seconde $\delta_1$ ayant son origine ou point de rebroussement en $h_1$; 2° les deux développantes $\delta'$ et $\delta_1'$ ayant l'hélice E' pour développée, la première $\delta'$ ayant son origine ou point de rebroussement en $h'$, et la seconde $\delta_1'$ ayant son origine ou point de rebroussement en $h_1'$.

Cela posé :

La courbe $\delta$ ou $\delta_1$, 1° coupera la courbe $\delta'$ ou $\delta_1'$ en un point $x$, ou 2° ne coupera pas cette courbe $\delta'$ ou $\delta_1'$.

Si le point $x$ existe, alors la surface hélicoïde développable existera; et comme les quatre courbes $\delta$ et $\delta_1$, $\delta'$ et $\delta_1'$ ne peuvent s'entrecouper, si elles se coupent, qu'en un seul point, il n'existera qu'une seule surface développable;

Si le point $x$ est situé sur l'hélice E' et se trouve être, dès lors, ou le point $h'$ ou le point $h_1'$, l'hélice E sera l'arête de rebroussement de la surface développable

Le point $x$ existant, la surface développable pourra être facilement construite, car il suffira de mener par ce point $x$ : 1° une tangente $\theta$ à l'hélice E et touchant cette courbe en un point $m$; 2° une tangente $\theta'$ à l'hélice E' et touchant cette courbe en un point $m'$. La droite G passant par les points $m$ et $m'$ sera une génératrice de la surface hélicoïde développable $\Sigma$.

Cela posé, la surface développable $\Sigma$ pourra être engendrée de deux manières différentes :

1° En abaissant du point $a$ une perpendiculaire sur G, et coupant G au point $g$, et décrivant la sphère S' du point $a$ comme centre et avec $\overline{ag}$ pour rayon, la surface $\Sigma$ sera engendrée par G se mouvant tangentiellement à la sphère S', en s'appuyant sur les deux hélices données E et E';

2° En menant par le point $a$ et la droite G un plan P, et par l'axe X un plan P, perpendiculaire à P et coupant P suivant la droite H, en faisant tourner cette droite H autour de X, on engendrera un cône de révolution B, et la droite G, en se mouvant tangentiellement au cône B et s'appuyant sur les deux hélices données E et E', engendrera la même surface $\Sigma$.

## § III.

### *Propriété remarquable dont jouit l'héliçoïde gauche rectangulaire (surface de filet de vis carrée).*

1. Concevons la surface hélicoïde engendrée par une droite G se mouvant sur une hélice $\delta$ tracée sur un cylindre de révolution et sur l'axe A de ce cylindre, et de plus coupant sans cesse sous l'angle droit cet axe A.

Si par l'axe A et par un point $m$ de la surface on fait passer un cylindre de révolution $\Sigma$, ce cylindre coupera la surface hélicoïde suivant une hélice $\gamma$.

Or, par une droite et un point, on peut faire passer une infinité de cylindres de révolution; on peut donc tracer sur la surface hélicoïde une infinité d'hélices cylindriques se croisant toutes en un même point de cette surface.

Il y a plus de vingt ans que cette propriété remarquable m'est connue, et voici comment je la démontrai :

Si l'on a deux cercles C et C' (*fig.* 13) tels que le cercle C' ait pour diamètre le rayon du cercle C; si par le centre $o$ du cercle C on mène une suite de rayons $om$, $om'$, $om''$, $om'''$,..... divisant le cercle C en arcs égaux $mm' = m'm'' = m''m''' =$ etc., ces mêmes rayons diviseront le cercle C' en arcs aussi égaux entre eux $mn' = n'n'' = n''n''' =$ etc.; et comme l'angle $mom'$ a pour mesure dans le cercle C

l'arc $mm'$ et pour mesure dans le cercle C' la moitié de l'arc $m'$, et comme le rayon du cercle C' est la moitié du rayon du cercle C, il s'ensuit que l'arc $mm'$ rectifié sera égal à l'arc $mn'$ rectifié.

Cela posé (*fig.* 14) :

Chaque rayon prolongé pourra être considéré comme la projection horizontale $G^h$, $G'^h$, $G''^h$,..... de diverses génératrices droites G, G', G''..... de la surface hélicoïde (en prenant le plan horizontal de projection perpendiulaire à l'axe A du cylindre sur lequel sera tracé l'hélice directrice).

En considérant un point $m$ de la surface hélicoïde, on sait que le cylindre de révolution B, qui a pour axe l'axe A et qui passe par le point $m$, coupe la surface hélicoïde suivant une hélice que nous désignerons par $\delta$ et sa projection $\delta^h$ ne sera autre que le cercle C, base du cylindre B.

Si l'on trace un cercle C' sur le rayon $A^h m^h$ du cercle C comme diamètre, et qu'on le regarde comme la base d'un cylindre de révolution B', ce cylindre B' passera par l'axe A et par le point $m$, et les divers points $m$, $n'$, $n''$, $n'''$, en lesquels ce cylindre B' sera percé par les génératrices G, G', G'', G''', appartiendront à une courbe $\gamma$, qui sera l'intersection de ce cylindre B et de l'héficoïde.

Or, si l'on prend les arcs $m^h m'^h$, $m'^h m''^h$, etc., égaux entre eux sur le cercle C, les arcs $m^h n'^h$, $n'^h n''^h$, etc., seront égaux entre eux sur le cercle C', et les arcs $m^h m'^h$, $m'^h m''^h$, etc., étant égaux entre eux, on établit que les droites G, G', G'',..... coupent l'axe A en des points équidistants entre eux, puisque la courbe $\delta$ est une hélice cylindrique; la courbe $\gamma$ sera donc aussi une hélice, et de plus, comme on a : arc $m^h m'^h$ = arc $m^h n'^h$; on doit en conclure que les deux hélices ont même inclinaison par rapport à l'axe A; elles ont donc au point $m$ même tangente $\theta$.

2. Mais (*fig.* 15), par le point $o$, centre du cercle C, et par le point $m$, on peut faire passer une infinité de cercles C'', C''',..... dont les rayons vont en grandissant, et dont les centres sont situés sur la droite L, passant par le milieu $a'$ du rayon $om$ et menée perpendiculairement à ce rayon $om$.

Et les rayons $om$, $om'$, $om''$ du cercle C étant prolongés coupent ces cercles, savoir : C'' en des points $a'$, $a''$, $a'''$..... C''' en des points $b'$, $b''$, $b'''$, etc., tels que les arcs $ma'$, $a'a''$, $a''a'''$.... sont égaux entre eux, et aussi que les arcs $mb'$, $b'b''$, $b''b'''$ sont égaux entre eux; et de même pour les arcs interceptés sur tous les autres cercles $C^{iv}$, $C^{v}$, etc., passant par les points $o$ et $m$.

On doit donc conclure que si l'on considère ces divers cercles C', C'', C''', $C^{iv}$,..... comme les bases respectives de cylindres de révolution B', B'', B''', $B^{iv}$, etc., tous ces cylindres couperont la surface hélicoïde suivant des hélices $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, qui se croiseront toutes au point $m$.

Chaque hélice $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, aura en $m$ une tangente $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,..... et il est évident

que toutes ces tangentes seront dans le plan tangent T mené au point $m$ à la surface hélicoïde.

La tangente $\theta$, qui appartient à l'hélice $\gamma$ tracée sur le cylindre ayant pour base le cercle C' tracé sur le rayon $om$ du cercle C comme diamètre, sera la ligne de plus grande pente du plan T; et la génératrice droite G, qui représentera l'hélice tracée sur le cylindre ayant pour base un cercle de rayon infini, cercle qui ne sera autre que le rayon $om$ prolongé indéfiniment, sera l'horizontale de ce plan T.

3. Toutes les hélices $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ jouissent d'une propriété remarquable; elles touchent respectivement les diverses hélices $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ données sur la surface hélicoïde par une suite de cylindres de révolution concentriques, en des points qui sont tous situés sur un même plan vertical, ou, en d'autres termes, parallèle à l'axe A.

Et en effet (*fig.* 16):

Si l'on coupe la surface hélicoïde par une suite de cylindres concentriques ayant pour bases les cercles C, $C_1$, $C_2$, etc., on obtient des hélices cylindriques $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ....

Si l'on coupe la surface hélicoïde par une suite de cylindres de révolution passant par l'axe A et le point $m$ de la surface, et ayant pour bases les cercles C', C'', C''',..... on obtient les hélices cylindriques $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, ....

Tous les cercles C', C'', C''' ont leurs centres $o'$, $o''$, $o'''$ situés sur la droite L menée perpendiculairement au rayon $om$ et en son milieu; à chaque cercle C'' correspondra un cercle $C_1$ qui lui sera tangent en un point $m_1$ situé sur une droite M menée tangentiellement au point $m$ au cercle C ou au cercle C'.

Les deux cylindres ayant pour bases respectives les cercles C'' et $C_1$ seront donc en contact par une génératrice droite et verticale passant par le point $m_1$.

$om_1$ sera la projection horizontale d'une génératrice droite de la surface hélicoïde.

Le point $m_1$ sera la projection horizontale d'un point de la surface hélicoïde.

Les deux hélices, $\gamma''$ située sur le cylindre C'' et $\alpha_1$ située sur le cylindre $C_1$, auront donc pour point commun le point qui a $m_1$ pour projection, et il est évident qu'en ce point elles auront même tangente.

Tous les points tels que $m_1$ étant sur une droite M, tous les points dont les divers points $m_1$ seront les projections seront situés sur un plan vertical ayant la droite M pour trace horizontale. Donc, etc.

4. Le plan vertical M coupe la surface hélicoïde suivant une courbe assez remarquable, puisque cette courbe a deux asymptotes parallèles et horizontales, et qu'en son point milieu cette courbe a un point d'inflexion *double*, ou, en d'autres termes, un point d'inflexion pour lequel le rayon de courbure est infini.

En effet (*fig.* 17) :

Concevons l'hélice $\delta$ tracée sur un cylindre vertical ayant pour axe la droite A et pour base le centre C.

Concevons la surface hélicoïde engendrée pour une droite G se mouvant horizontalement en s'appuyant sur A et $\delta$.

Menons un plan M tangent au cylindre C et parallèle au plan vertical de projection LT (la droite LT étant la ligne de terre).

La génératrice de contact du cylindre et du plan tangent M sera coupée au point $m$ par l'hélice $\delta$. En ce point, l'hélice aura pour tangente une droite $\theta$ dont la projection $\theta^v$ fera avec $A^v$ un angle égal à celui sous lequel l'hélice $\delta$ coupe les génératrices du cylindre C.

Cela posé :

Le plan M coupera l'hélicoïde suivant une courbe $\varphi$, dont on pourra facileme déterminer les divers points.

Or, $\varphi$ étant dans un plan parallèle au plan vertical, $\varphi^v$ sera identique à la courbe $\varphi$.

La courbe $\varphi$ aura deux points situés à l'infini, ce seront ceux pour lesquels la génératrice de l'hélicoïde sera parallèle au plan M. Or, il est évident que les deux positions de ces génératrices seront G et $G_1$ toutes deux équidistantes du plan horizontal passant par le point $m$ et parallèles au plan vertical de projection LT.

Si en chacun de ces points on voulait construire la tangente, il faudrait construire le plan tangent à l'hélicoïde en chacun de ces points, et l'intersection du plan M et de chacun de ces plans tangents donnerait l'asymptote demandée.

Or, on sait que, pour le point situé à l'infini sur une génératrice droite de l'hélicoïde, le plan tangent est perpendiculaire à l'axe A. Dès lors les deux asymptotes de la courbe $\varphi^v$ seront $G^v$ et $G_1^v$.

Et comme évidemment tout est symétrique et inversement par rapport au point $m^v$, on voit que la courbe $\varphi^v$ aura en $m^v$ un point d'inflexion.

Et, comme on sait que le paraboloïde engendré par une droite se mouvant horizontalement en s'appuyant sur l'axe A et la tangente $\theta$ de l'hélice $\delta$, n'a pas seulement un contact du premier ordre, mais encore un contact du deuxième ordre avec l'hélicoïde tout le long de la génératrice droite de contact (*), on en conclut, qu'au point $m$, la courbe $\varphi$ a pour tangente la droite $\theta$, ou, en d'autres termes, même tangente que l'hélice $\delta$; et qu'au point $m^v$ la courbe $\varphi^v$ a un contact du deuxième

(*) *Voyez* ce que j'ai dit touchant le paraboloïde osculateur à l'hélicoïde, dans le Bulletin de la Société philomatique (séance du 22 juin, année 1838).

ordre avec $\theta'$ et $\varphi'$, et par conséquent un rayon de courbure infini en ce point $m'$. Et il est facile de reconnaître que les diverses hélices $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$,..... dont on a parlé ci-dessus, art. 3, couperont le plan M en des points qui ne seront autres que ceux de la courbe $\varphi$.

---

## CHAPITRE II.

Dans ce chapitre, nous allons chercher et démontrer, en nous servant des méthodes de la géométrie descriptive, les diverses propriétés dont jouissent les *trois spirales* :

1° *Spirale logarithmique ;*
2° *Spirale hyperbolique ;*
3° *Spirale d'Archimède* (*).

### 1° DE LA SPIRALE LOGARITHMIQUE.

Les géomètres ont donné le nom de spirale logarithmique à la courbe qui a pour équation : $\rho = a^{\omega}$ ($\rho$ désignant le rayon vecteur et $\omega$ l'angle qu'un rayon vecteur fait avec un axe fixe).

Au moyen de *l'analyse*, ils ont démontré les principales propriétés géométriques de cette courbe, parmi lesquelles la plus curieuse est celle de couper sous un angle constant ses rayons vecteurs.

Au moyen de *l'analyse*, on a trouvé l'équation de la tangente et on a déduit une construction géométrique de la tangente en un point de la courbe ; on a calculé le rayon de courbure, on a donné l'équation de la développée, et on a reconnu que cette *développée* était une spirale logarithmique identique à la spirale développante, mais que la développée était placée en une autre position que la courbe développante, la *développée* n'étant autre chose que la *développante* supposée avoir tourné d'un certain angle autour de l'origine.

Je me propose de reconnaître et de démontrer toutes les propriétés géométriques dont jouit la spirale logarithmique en ne me servant que des méthodes de la *géométrie descriptive*.

(*) J'ai publié, dans le Bulletin de la Société philomatique de Paris, le résumé de mes recherches sur les trois spirales. *Voyez* les séances des 17 novembre 1832 et 12 janvier 1833.

§ Ier.

La première chose à reconnaître est celle-ci :

*Existe-t-il une courbe polaire qui coupe sous un angle constant chacun de ses rayons vecteurs ?*

Je désigne par $a$ la courbe qui doit satisfaire à la propriété énoncée ; il est évident que si j'enroule le plan sur lequel la courbe $a$ est tracée, sur un cône B de révolution, en plaçant l'origine ou *pôle* $o$ de la courbe $a$ au sommet $s$ du cône B, la courbe $a$ se transformera en une courbe à double courbure A, laquelle jouira de la propriété de couper sous un angle constant chacune des génératrices G du cône B ; et, de plus, il est évident que l'angle sous lequel la courbe A coupera chaque génératrice G sera le même que l'angle sous lequel la courbe $a$ coupe chacun de ses rayons vecteurs.

Cela posé :

*Si l'on projette la courbe* A *sur un plan* P *perpendiculaire à l'axe* Y *du cône* B ; *on aura une courbe* $A^h$ *qui coupera sous un angle constant chacun des rayons du cercle* C, *suivant lequel le cône* B *est coupé par le plan* P.

Et en effet :

Si l'on considère le point $m$, en lequel la courbe A coupe une génératrice G du cône de révolution B, la tangente $\theta$ en $m$ à la courbe A sera située dans le plan T tangent au cône B tout le long de la droite G. Si par le point $m$ on mène une droite Z parallèle à l'axe Y du cône B, on aura trois droites G, Z et $\theta$, se croisant au point $m$.

Pour un autre point $m'$ de la courbe A, on aura de même trois droites homologues G′, Z′ et $\theta'$, se croisant au point $m'$.

Or, 1° les droites Z′ et G′ feront entre elles un angle égal à celui que les droites Z et G font entre elles, puisque le cône B est de révolution ;

2° Les droites G′ et $\theta'$ font entre elles, par hypothèse, le même angle que font entre elles les droites G et $\theta$ ;

3° les droites Z′ et $\theta'$ feront entre elles le même angle que font entre elles les droites Z et $\theta$, parce que, 1° la droite Z fait avec le plan tangent T un angle égal à celui que la droite Z′ fait avec le plan tangent T′, le cône B étant de révolution ; parce que, 2° la droite Z′ se projette sur le plan T′ suivant la droite G′, tout comme la droite Z se projette sur le plan T suivant la droite G, le cône B étant de révolution ; et parce que, 3° la droite $\theta'$ menée par le point $m'$ dans le plan T′ est supposée faire avec la droite G′ située dans ce même plan T′ un angle égal à celui que

la droite $\theta$, menée par le point $m$ dans le plan T, fait avec la droite G située dans ce même plan T ;

4° Le plan V, déterminé par les droites Z et $\theta$, fera avec G un angle égal à celui que le plan V′, déterminé par les droites Z′ et $\theta'$, fait avec G′.

Dès lors :

I. La courbe A ne sera autre qu'une *hélice* tracée sur le cylindre H qui la projette suivant la courbe $A^h$ sur le plan P, puisque les tangentes $\theta$ à cette courbe A font un angle constant avec les génératrices Z de ce cylindre H.

II. Les droites G, G′, G″, génératrices du cône B faisant avec le plan P un angle constant, et de plus chacune de ces génératrices G, G′, G″, faisant un angle constant avec les plans verticaux V, V′, V″, les projections sur le plan P de ces droites G, G′, G″ feront des angles égaux avec les traces, sur le plan P, des divers plans verticaux V, V′, V″.

Ainsi, de ce qui précède on peut conclure que si la spirale logarithmique plane $a$ existe, on peut construire une courbe à double courbure A coupant les génératrices d'un cône de révolution sous un angle constant, et que de plus la projection de la courbe A sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône sera une nouvelle spirale logarithmique plane $A^h$.

Si nous démontrons l'existence de la courbe A, nous aurons démontré l'existence de la courbe $a$.

Or, 1° la courbe A étant une hélice sur le cylindre H, et dès lors toutes ses tangentes $\theta$, $\theta'$, $\theta''$, faisant des angles égaux avec l'axe Y du cône B et aussi avec le plan P, on doit en conclure que si l'on mène par le sommet $s$ du cône B un plan Q perpendiculaire à l'axe Y de ce cône, les deux plans P et Q étant parallèles intercepteront sur chaque tangente $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,..... des longueurs égales entre elles ;

2° La courbe A étant une hélice, toutes ses tangentes formeront une surface développable $\Sigma$, et le plan tangent K mené à cette surface $\Sigma$ suivant une génératrice $\theta$ sera le plan osculateur de l'hélice A pour le point $m$ par lequel passe la tangente $\theta$, et dès lors le plan K sera, ainsi qu'on le sait, perpendiculaire au plan V tangent au cylindre H suivant la droite Z passant par le même point $m$ ;

3° Le plan T, tangent au cône B suivant G, fait avec le plan V tangent au cylindre H suivant Z un angle qui est constant, quel que soit le point $m$ que l'on considère sur la courbe A ;

4° Le plan K fait avec le plan V un angle qui est toujours droit, et avec le plan T un angle qui est évidemment constant, puisque les droites G et $\theta$ font un angle qui est supposé constant.

Il suffira donc de voir s'il est, en effet, possible de réaliser ces diverses condi-

tions, en imprimant au plan K un certain mouvement dans l'espace, pour avoir démontré l'existence de la courbe A.

Or, ayant construit un plan T tangent au cône de révolution B suivant la génératrice G, désignons par H' sa trace sur le plan P perpendiculaire à l'axe Y du cône B, et prenons ce plan P pour plan horizontal.

Traçons dans le plan T une droite $\theta$ passant par le sommet $s$ du cône B et faisant avec H' un angle donné $\alpha$ et coupant H' en un point $p$. Faisons passer par la droite $\theta$ deux plans, l'un V perpendiculaire au plan P et l'autre K perpendiculaire au plan V.

Cela fait :

Tendons un fil F le long de $\theta$ et fixons l'une de ses extrémités au point $p$ du plan T, et l'autre extrémité au sommet $s$ du cône B.

Faisons mouvoir le plan T de manière 1° à ce qu'il glisse tangentiellement au cône B, sa trace H' se mouvant dans le plan P tangentiellement au cercle C, base du cône B sur le plan horizontal P ; et 2° à ce que le fil F s'enroulant sur le cône B, à partir du sommet $s$, reste, en sa partie non enroulée, tendu sur la droite $\theta$.

Pendant ce mouvement, le plan T entraînera les deux plans V et K, le plan V engendrera une surface développable H, et le plan K une surface développable $\Sigma$.

La surface H sera cylindrique, parce que le plan V reste pendant le mouvement toujours parallèle à l'axe Y du cône B, ou, en d'autres termes, toujours perpendiculaire au plan V.

Chacun des points en lesquels le fil F passe de la direction droite $\theta$ à la courbe tracée sur le cône B formera une courbe qui sera à la fois sur le cône B et sur le cylindre H.

Pendant le mouvement du plan T, la droite $\theta$ changera de place dans l'espace, mais en faisant constamment le même angle $\alpha$ avec les diverses positions de la trace H' du plan T, et de plus la longueur de $\theta$ comprise entre le plan P et le plan Q mené par le sommet $s$ du cône B parallèlement au plan P, restera constante. La droite $\theta$ pourra donc être considérée comme pliée librement sur le cylindre H, la courbe A sera donc une *hélice* tracée sur le cylindre H, et $\theta$, en ses diverses positions, sera tangente à cette *hélice* A, et dès lors le plan K, en ses diverses positions, sera osculateur à cette hélice A.

On voit donc par ce qui précède que l'on peut en effet tracer mécaniquement sur le cône B une courbe A coupant les génératrices de ce cône sous un angle constant, et que cette courbe A passe par le sommet $s$ du cône.

On voit aussi que l'angle sous lequel la courbe A coupe les génératrices G du cône B est le complément de l'angle $\alpha$, sous lequel la droite $\theta$ coupe la trace H' du

plan mobile T; que dès lors on peut construire une infinité de courbes telles que A, en faisant varier l'angle $\alpha$ depuis l'angle droit jusqu'à l'angle nul.

Lorsque $\alpha$ sera droit, la droite $\theta$ et la courbe A ne seront autres l'une et l'autre qu'une génératrice G du cône B.

Lorsque $\alpha$ sera nul, la droite $\theta$ sera parallèle à H' et la courbe A ne sera autre qu'un cercle tracé sur le cône de révolution B; et en effet, toutes les sections circulaires du cône B coupent sous l'angle droit les génératrices de ce cône.

Ayant démontré l'existence de la spirale logarithmique conique A, et par suite l'existence de la spirale logarithmique plane $a$, et ayant de plus donné un *procédé mécanique* au moyen duquel on pourra tracer la courbe A sur un cône de révolution B, passons à l'examen des propriétés géométriques dont jouissent, en vertu de leur mode de génération, *les spirales logarithmiques planes et coniques.*

## § II.

1. *Le plan Q passant par le sommet du cône B et perpendiculaire à l'axe Y de ce cône, coupe la surface développable Σ, qui a pour arête de rebroussement la spirale logarithmique conique A, suivant une courbe qui est identique à la spirale logarithmique plane $A^h$, projection de la courbe à double courbure A sur un plan P parallèle au plan Q.*

Soit A (*fig.* 18), la courbe à double courbure tracée sur le cône B, ayant son sommet en $s$ et pour base sur le plan horizontal P le cercle C.

Concevons les génératrices G, G',.... du cône B passant par les points $m$, $m'$,.... de la spirale logarithmique conique A.

Concevons les plans T, T',.... tangents au cône B suivant les droites G, G',.... ces plans couperont le plan P suivant les droites H', H'',.... tangentes au cercle C. aux points $r$, $r'$,.... et le plan Q suivant les droites R, R',.... passant par le sommet $s$ du cône et parallèles aux traces H', H''....

Les tangentes $\theta$, $\theta'$, à la courbe A pour les points $m$, $m'$, couperont les droites R, R', aux points $q$, $q'$, qui détermineront une courbe $\delta$, qui sera la section faite dans la surface développable Σ par le plan Q.

La courbe A se projette sur le plan P suivant la courbe $A^h$ et les droites $\theta$, $\theta'$, se projettent sur ce plan T suivant les droites $\theta^h$, $\theta'^h$, et comme $\theta$, $\theta'$, sont tangentes à A, les droites $\theta^h$, $\theta'^h$, seront tangentes à $A^h$.

Cela posé, démontrons que les courbes $\delta$ et $A^h$ sont des courbes identiques; pour cela, il suffira de démontrer que la projection $\delta^h$ de $\delta$ sur le plan P est identique à la courbe $A^h$.

Et, pour démontrer *l'identité*, il suffit de prouver que la courbe $\delta^h$ coupe ses rayons vecteurs $s^h q^h$ sous un angle égal à celui sous lequel la courbe $A^h$ coupe ses rayons vecteurs $s^h m^h$.

Or, remarquons que l'on a :

Les trois droites $H^v$, $R$, $s^h q^h$, parallèles entre elles, donc $s^h q^h$ est perpendiculaire sur $s^h m^h$,

$\theta^h$ passe par les trois points $p$, $m^h$, $q^h$, puisque $\theta^h$ est la projection de la droite $\theta$ qui passe par les points $p$, $m$, $q$.

Le triangle $m^h s^h q^h$ est donc droit en son sommet $s^h$.

Et comme la courbe A est une hélice sur le cylindre vertical H qui a pour section droite $A^h$, il s'ensuit que le plan tangent K mené à la surface $\Sigma$ suivant la génératrice $\theta$ coupera le plan Q suivant une droite $t$ tangente à la courbe $\delta$ au point $q$.

Et cette tangente $t$ se projettera sur le plan P suivant $t^h$ tangente à $\delta^h$ au point $q^h$.

Or : $t^h$ est perpendiculaire à $\theta^h$, parce que le plan osculateur K à l'hélice A est perpendiculaire au plan tangent V au cylindre H, et que ce plan V a pour trace sur le plan P la droite $\theta^h$.

Par conséquent, la courbe $A^h$ coupera son rayon vecteur $s^h m^h$ sous l'angle $\widehat{s^h m^h q^h}$, et la courbe $\delta^h$ coupera son rayon vecteur $s^h q^h$ sous un angle complémentaire de $\widehat{s^h q^h m^h}$.

Et comme le triangle $s^h q^h m^h$ est rectangle en son sommet $s^h$, on doit conclure que les deux courbes coupent leurs rayons vecteurs sous le même angle; les deux courbes $\delta^h$ et $A^h$ sont donc deux spirales superposables, en d'autres termes deux spirales identiques.

II. *La développée d'une spirale logarithmique plane est une spirale logarithmique identique à la courbe donnée et les deux courbes ont même pôle.*

Nous savons que la courbe $\delta^h$ (*fig.* 18) est une spirale logarithmique plane, puisqu'elle coupe sous un angle constant ses rayons vecteurs $s^h q^h$,

La courbe $A^h$ est la développée de la courbe $\delta^h$, car la droite $\theta^h$ est tangente en $m^h$ à la courbe $A^h$; et que cette même droite $\theta^h$ est normale en $p^h$ à $\delta^h$.

Ainsi, la développée d'une spirale logarithmique est une spirale logarithmique identique et ayant même origine ou même pôle $s^h$. Et la *fig.* 18 indique suffisamment la construction à exécuter pour trouver les points $m^h$ de la développée $A^h$ lorsqu'on aura les divers points $q^h$ et les diverses normales $\theta^h$ de la spirale donnée $\delta^h$.

111. *Des propriétés dont jouissent les diverses développantes d'une spirale logarithmique plane.*

Lorsque (*fig.* 18) l'on coupe la surface Σ, lieu des tangentes θ à une spirale logarithmique conique A, par un plan X perpendiculaire à l'axe Y du cône de révolution B sur lequel se trouve tracée la courbe A, on obtient une courbe φ qui est la développante de la courbe $A^h$ section droite du cylindre H sur lequel la courbe A est une *hélice*.

En faisant varier la position du plan sécant X, et le dirigeant toujours perpendiculairement à l'axe Y, on obtient une suite de courbes φ, φ′, φ″, situées dans des plans parallèles X, X′, X″, et ces courbes sont différentes les unes des autres, ne sont point, en un mot, superposables, parce que les diverses développantes d'un cercle sont seules des courbes identiques.

Cela posé :

Supposons (*fig.* 19) que l'on donne une spirale logarithmique plane $A^h$ ayant son origine ou pôle au point $s^h$.

Si l'on enroule un fil sur la courbe $A^h$ depuis le point *o* jusqu'au pôle $s^h$, en déroulant ce fil on aura la courbe $\delta^h$ qui sera une développante de $A^h$ et la seule qui soit une spirale logarithmique et une spirale identique à la courbe $A^h$, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus.

Mais si l'on enroule le fil sur la courbe $A^h$ depuis le point $s^h$ jusqu'au point *o*, et que l'on déroule ce fil, le point *o* décrira la courbe γ qui aura un point de rebroussement en *o*, parce que l'on pourrait enrouler le fil sur l'arc $om_1^h$ de la courbe $A^h$ et dérouler ce fil de manière à ce que le point *o* décrivît la seconde branche $\gamma_1$ de la développante complète $\gamma\gamma_1$.

Cela posé :

Si du pôle $s^h$ comme centre, et avec un rayon vecteur $s^ho$ comme rayon, on décrit le cercle C; si on mène un rayon vecteur arbitraire $s^hm^h$ de la spirale logarithmique plane $A^h$, ce rayon vecteur coupera le cercle C en un point *r*; si on construit au point $m^h$ la tangente $\theta^h$ à la spirale $A^h$, et au point *r* la tangente $H^r$ au cercle C, je dis que ces deux tangentes se couperont en un point *x* situé sur la développante γ ayant le point *o* pour point de rebroussement.

Et en effet :

On pourra toujours considérer le cercle C comme la base d'un cône de révolution B ayant son sommet en un point *s* arbitrairement placé sur l'axe Y, et le cylindre vertical H qui aura pour section droite la spirale $A^h$ coupera le cône B suivant une courbe A qui, en vertu de ce que nous savons, sera une spirale logarithmique conique. Dès lors, le point $m^h$ sera la projection du point *m* de la courbe A et $\theta^h$ sera la projection de la tangente θ en *m* à la courbe A.

Le plan osculateur K pour le point $m$ de la courbe A passera par la droite $\theta$, et aura pour trace sur le plan du cercle C la droite $H^x$ tangente en $x$ à la développante $\gamma$, le point $x$ étant celui en lequel la droite $\theta$ perce le plan horizontal qui n'est autre que le plan du cercle C.

Le plan tangent T au cône B pour le point $m$ contiendra la génératrice G de ce cône passant par ce point $m$, et de plus contiendra la tangente $\theta$ en $m$ à la courbe A ; par conséquent, la trace $H^r$ (sur le plan horizontal) de ce plan T passera par le point $x$ et le point $r$, qui sont les traces horizontales des droites $\theta$ et G ; et comme le plan T est tangent au cône B, sa trace horizontale $H^r$ devra être tangente au cercle C trace horizontale du cône B ; donc, etc.

D'après ce qui précède, on voit de suite que si de chaque point $x$ de la courbe $\gamma$ on mène la tangente $H^r$ au cercle C, chacune de ces tangentes $H^r$ sera coupée sous un angle constant par la courbe $\gamma$.

Et en effet :

Dans le triangle $m^h xr$, 1° l'angle $\widehat{xm^hr}$ est constant, puisque la spirale $A^h$ coupe sous un angle constant ses rayons vecteurs ; 2° l'angle $\widehat{m^hrx}$ est droit, donc l'angle $\widehat{m^hxr}$ sera constant.

Et comme l'angle $\widehat{m^hxH^x}$ est droit, il s'ensuit que l'angle $\widehat{rxH^x}$ sera constant : ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, l'on peut énoncer le théorème suivant :

*Chaque développante d'une spirale logarithmique plane coupe sous un angle constant les tangentes menées de chacun de ses points au cercle ayant pour centre le pôle de la spirale, et pour rayon le rayon vecteur de la spirale correspondant au point de rebroussement de la développante.*

*L'angle est le même pour toutes les développantes de la même spirale logarithmique, et il est égal à l'angle sous lequel la spirale coupe ses rayons vecteurs.*

Et l'on voit de suite que la courbe $\delta^h$ n'est qu'une développante particulière, celle pour lequel le point de rebroussement est précisément le pôle de la spirale $A^h$ ; et pour cette courbe $\delta^h$, le cercle C a un rayon nul.

De sorte que les tangentes $H^r$ au cercle C jouent, par rapport à la développante $\gamma$, le même rôle que les rayons vecteurs $s^hq^h$ jouent par rapport à la développante $\delta^h$.

Les considérations précédentes nous permettent de résoudre le problème suivant :

IV. *Rectification d'un arc de spirale logarithmique plane.*

Étant donnée (*fig.* 19) une spirale logarithmique $A^h$ coupant ses rayons vecteurs

sous un angle connu $\alpha$, on peut facilement rectifier un arc $om^A$ de cette courbe.

Pour cela : 1° on tracera le cercle C passant par l'une des extrémités $o$ de l'arc à rectifier, ce cercle ayant pour centre l'origine ou pôle $s^A$ de la courbe spirale donnée ;

2° On construira au point $m^A$ la tangente $\theta^A$ à la courbe;

3° On construira au point $r$, en lequel le cercle C est coupé par le rayon vecteur $s^Am^A$ prolongé, la tangente H' à ce cercle C.

Les droites $\theta^A$ et H' se couperont en un point $x$ et $xm^A$ sera la longueur de l'arc $om^A$ rectifié.

V. *Construction de la tangente en un point d'une spirale logarithmique plane, lorsque l'on ignore sous quel angle la courbe coupe ses rayons vecteurs.*

Étant données (*fig.* 19) la courbe $A^A$ et son origine ou pôle $s^A$, on demande la tangente au point $m^A$.

1° On décrira le cercle C passant par un point $o$ arbitrairement situé sur la courbe donnée, le centre de ce cercle étant le pôle ou origine de $A^A$ ;

2° On mènera le rayon vecteur $s^Am^A$ coupant le cercle C au point $r$ ;

3° On construira au point $r$ la tangente H' au cercle C ;

4° On prendra une droite D égale en longueur à l'arc $om^A$ de la courbe donnée.

Cette droite D sera construite par tâtonnement, en prenant des cordes très-petites et différant très-peu des petits arcs qu'elles soutendent.

5°. Du point $m^A$ comme centre, et avec D pour rayon, on décrira un cercle qui coupera H' en un point $x$.

Joignant les points $x$ et $m^A$, on aura la tangente demandée.

VI. *Étant donnée, une spirale logarithmique plane, coupant ses rayons vecteurs sous un angle connu, construire la développée de cette courbe*, ou, en d'autres termes, *construire pour un point de la spirale son rayon de courbure.*

Soit donnée (*fig.* 18) la spirale logarithmique plane $\delta^A$. En un point $q^A$ de cette courbe, on mènera la normale $\theta^A$ (cette normale est facile à construire, puisqu'elle doit faire avec le rayon vecteur $s^Aq^A$ un angle complémentaire de celui sous lequel la courbe coupe ses rayons vecteurs).

Du pôle ou origine $s^A$ comme centre et avec un rayon arbitraire, on tracera le cercle C.

On mènera le rayon $s^Ar$ perpendiculaire sur le rayon vecteur $s^Aq^A$, et les droites $s^Ar$ et $\theta^A$ se couperont en un point $m^A$, qui appartiendra à la développée $A^A$.

On pourra donc se procurer facilement autant de points $m^A$ de la développée

$A^4$ que l'on voudra, ou, en d'autres termes, autant de centres de courbure $m^4$, que l'on voudra, de la courbe donnée $\delta^3$.

VII. *Étant donnée, une spirale logarithmique plane et l'angle sous lequel elle coupe ses divers rayons vecteurs, construire l'angle dont il faudrait faire tourner cette courbe autour de son pôle, pour la superposer sur sa développée.*

Étant données (*fig.* 20) la spirale logarithmique plane $\delta$ et sa développée A, nous savons que si l'on prend un point $q$ sur la courbe $\delta$, sa normale $\theta$ est tangente en un point $m$ de la développée A, et que les deux rayons vecteurs $sq$ et $sm$ sont rectangulaires entre eux, quel que soit l'angle sous lequel la courbe $\delta$ coupe ses rayons vecteurs $sq$.

Le triangle $qsm$ étant rectangle en $s$, il s'ensuit que les angles $\widehat{sqm}$ et $\widehat{smq}$ sont complémentaires; dès lors 1° si $sq = sm$, ces deux angles sont égaux entre eux, et chacun vaut un angle demi-droit.

Dans ce cas, la courbe $\delta$ devra tourner d'un angle droit autour du pôle $s$ pour venir se superposer sur sa développée A.

2° Si l'on a $sq < sm$, on a aussi $\widehat{sqm} < \widehat{smq}$.

Dès lors la courbe $\delta$ tournant autour de son pôle $s$, le point $q$ viendra se placer sur un point $q'$ de la développée A, ce point $q'$ étant tel que l'on ait $sq' = sq$, et il est évident que le point $q'$ sera situé entre le pôle $s$ et le point $m$; dans ce cas la courbe $\delta$ tournera d'un angle plus petit qu'un angle droit pour venir se superposer sur sa développée A.

3° Si l'on a $sq > sm$, on a aussi $\widehat{smq} > \widehat{sqm}$.

Dès lors la courbe $\delta$ tournant autour de son pôle $s$, le point $q$ viendra se placer sur un point $q''$ de la développée A, ce point $q''$ étant tel que l'on ait $sq'' = sq$, et il est évident que le point $q''$ sera situé au delà du point $m$ par rapport au pôle $s$. Dans ce cas la courbe $\delta$ tournera d'un angle plus grand que l'angle droit pour venir se superposer sur sa développée A.

VIII. *Dans la spirale logarithmique plane, les accroissements des arcs sont proportionnels aux accroissements des rayons vecteurs.*

Étant donnée (*fig.* 21) une spirale logarithmique plane A, nous avons vu ci-dessus que si l'on traçait un cercle C, et si l'on menait au point $m$ la tangente $\theta$ à la courbe A, et au point $p$ en lequel le cercle C est coupé par le rayon vecteur $sm$ la tangente T, ces deux droites se coupaient en un point $x$, et que la droite $xm$ était égale en longueur à l'arc de spirale $my$.

Dès lors, si l'on construit une suite de cercles concentriques C, C', C'', ayant





le pôle $s$ pour centre commun, et tels que l'on ait $pp'=p'p''$, on aura $xx'=x'x''$ et dès lors on aura aussi : arc $yy'$=arc $y'y''$.

Et comme on a, par construction, $sy=sp$ et $sy'=sp'$ et $sy''=sp''$, on aura évidemment

$$sy+sy'+sy''+\text{etc.}=\text{arc } my+\text{arc } my'+\text{arc } my''+\text{etc.}$$

Ainsi, en représentant par $\rho$ le rayon vecteur et par S l'arc de la spirale logarithmique (l'arc S était compté à partir de l'origine ou pôle de la courbe), on aura :

$$\frac{\rho}{S}=\text{constante}=M,$$

ce qu'il fallait démontrer.

IX. *Des propriétés dont jouissent les développantes de la développante d'une spirale logarithmique plane.*

Étant donnée (*fig.* 22) la spirale logarithmique plane A, et ayant décrit le cercle dont le centre est au pôle $s$ et qui coupe au point $o$ la courbe A, nous avons vu que la courbe $\gamma$ développante de la spirale A coupait sous un angle constant les tangentes T du cercle C, et aussi que cette courbe $\gamma$ coupait les droites T sous le même angle, que la spirale A coupait ses rayons vecteurs $sm$.

Cela posé :

Je décris la courbe D, développante du cercle C et ayant pour origine le point $o$, qui est aussi l'origine de la courbe $\gamma$ sur le cercle C. Puis je décris la courbe K développante de la courbe $\gamma$, cette courbe K ayant aussi pour origine ou point de rebroussement le point $o$.

Je construis au point $m'$ de la spirale A la tangente $\theta'$.

Au point $x'$ de la développante $\gamma$ la tangente $\chi'$

Au point $y'$ de la développante K de la développante $\gamma$ la tangente $\xi'$.

Et enfin au point $z'$ de la développante circulaire D la tangente $\epsilon'$.

Si je conçois l'hélicoïde développable $\Sigma$ qui aurait pour arête de rebroussement une hélice $C_{\prime}$ projetée en C, cette surface sera coupée par le plan horizontal suivant la développante circulaire D.

Et si je conçois un cylindre vertical H ayant pour section droite la courbe $\gamma$, ce cylindre H coupera la surface hélicoïde $\Sigma$ suivant une courbe $\gamma_{\prime}$ qui se projettera suivant $\gamma$.

Or, la courbe $\gamma_{\prime}$ coupera sous un angle constant les diverses génératrices droites G de l'hélicoïde $\Sigma$, puisque sa projection $\gamma$ coupe sous un angle constant les

tangentes T au cercle C qui sont les projections de ces diverses génératrices G.

Si je voulais construire au point $x$, de $\gamma$, la tangente, je devrais faire la construction suivante :

Mener à $\gamma$ et au point $x'$ projection du point $x$, la tangente $\lambda'$ qui serait la trace horizontale du plan tangent au cylindre H.

Mener à D et au point $z'$ en lequel la génération G de l'hélicoïde $\Sigma$ passant par le point $x$, perce le plan horizontal, la tangente $\theta'$, laquelle serait la trace horizontale du plan tangent à l'hélicoïde $\Sigma$.

Les droites $\lambda'$ et $\theta'$ se couperont en un point $y'$ qui sera sur le plan horizontal le pied ou la trace de la tangente cherchée $\lambda$; en joignant donc les points $y'$ et $x$, on aura cette tangente.

Et comme la courbe $\gamma$, coupe sous un angle constant les génératrices G de l'hélicoïde $\Sigma$, il s'ensuit que ses tangentes $\lambda$, coupent sous un angle constant les génératrices du cylindre H; dès lors la courbe $\gamma$, est une hélice sur le cylindre H, dès lors les points $y'$ appartiennent à la développante K de la courbe $\gamma$.

De là on déduit ce qui suit :

**Problème.** *Rectification d'un arc* $ox'$ *de la courbe* $\gamma$.

On tracera (*fig.* 22) la développante circulaire D passant par le point $o$ de la courbe $\gamma$; on construira la tangente $\theta'$ à la courbe D pour le point $z'$ en lequel le rayon vecteur $r'x'$ de $\gamma$ coupe D et la droite $\theta'$ coupera la tangente $\lambda'$ au point $y'$.

La droite $x'y'$ sera égale en longueur à l'arc $ox'$ de la courbe $\gamma$.

Si l'on voulait avoir la rectification de l'arc $xx'$ de la courbe $\gamma$, on ferait passer par le point $x$ la développante circulaire D'; au point $z''$ on mènerait la tangente $\theta''$ à D'; $\theta''$ couperait $\lambda'$ au point $y''$; et la droite $x'y''$ serait égale en longueur à l'arc $xx'$ de la courbe $\gamma$.

Le lieu des points $y''$ sera une courbe K' qui sera aussi une développante de $\gamma$, mais ayant son point de rebroussement au point $x$ de $\gamma$.

De même que la spirale logarithmique A (*fig.* 21) coupait évidemment sous un angle constant les cercles C, C', C'', ayant pour centre commun le pôle $s$; de même la courbe $\gamma$ (*fig.* 22) coupe évidemment sous un angle constant les développantes D, D',..... du cercle C qui sert de pôle à cette courbe $\gamma$.

Pour la spirale A, à des accroissements égaux pour les arcs correspondaient des accroissements égaux pour les rayons vecteurs (*fig.* 21); la même chose a lieu évidemment pour la courbe $\gamma$, puisque les deux triangles $y'z'x'$ et $y''z''x'$ sont semblables (*fig.* 22). Ainsi le point $x$ partage l'arc $ox'$ de la courbe $\gamma$ de la même manière que le point $z''$ partage la droite $z'x'$.

De même que la courbe A (*fig.* 22) coupe sous un angle constant $\alpha$ ses

rayons vecteurs $sm$ ; de même la courbe $\gamma$ développante de la spirale A coupe sous un angle constant et qui est aussi égal à $\alpha$, ses rayons vecteurs $rx$ ou T ; de même aussi la courbe K développante de la développante $\gamma$ de la spirale A coupe sous un angle constant et qui est encore égal à $\alpha$, ses rayons vecteurs $z'y'$ ou 6'.

De sorte que, pour la spirale logarithmique, le pôle est un point $s$; pour sa développante $\gamma$ le pôle est un cercle C; pour sa développante de développante K, le pôle est la développante D du cercle C.

Et, en appliquant à la courbe K ce que nous avons dit pour la courbe $\gamma$, on voit que la courbe K pourra être considérée comme la projection d'une courbe K, située sur une héliçoïde développable $\Sigma'$ ayant pour arête de rebroussement une hélice tracée sur le cylindre qui aurait pour section droite la développante circulaire D, cette courbe K, coupant sous un angle constant les diverses génératrices droites de cette surface $\Sigma'$; dès lors la développante de la courbe K coupera sous un angle constant les tangentes à la développante de la développante circulaire D, et ainsi de suite.

Remarquons qu'au point $o$, qui est en même temps l'origine des courbes $\gamma$ et K, ces deux courbes se coupent à angle droit, puisque K est la développante de $\gamma$; et comme $\gamma$ est la développante de la spirale A, ces deux courbes se coupent aussi à angle droit en ce même point $o$; dès lors, les courbes A et K ont même tangente au point $o$.

Ainsi (*fig.* 23) : la courbe $\gamma\gamma'$, développante de la spirale A, offrira en $o$ un point de rebroussement, et elle aura pour tangente en ce point $o$ la normale N de la spirale; la courbe KK', développante de $\gamma\gamma'$, offrira en $o$ un point pour lequel le rayon de courbure sera nul, et cette courbe sera tout entière d'un même côté par rapport à la tangente $\theta'$ à la spirale A, et aura pour tangente en $o$ la droite $\theta$. La courbe UU', développante de KK', passera de l'autre côté de la tangente $\theta$ et offrira un point de rebroussement en $o$; elle aura pour tangente la normale N'.

La courbe VV', développante de UU', sera du même côté que UU' par rapport à la tangente $\theta$, et aura en $o$ un rayon de courbure nul et $\theta$ pour tangente en ce point, et enfin la développante de VV' repassera de l'autre côté de $\theta$, et ainsi de suite.

X. *De quelques propriétés de la spirale logarithmique conique.*

Cette spirale jouit, comme la spirale logarithmique plane, de la propriété que nous connaissons déjà, savoir : que les arcs comptés à partir du sommet du cône sont entre eux comme les rayons vecteurs correspondants aux extrémités de ces arcs.

Cette courbe est rectifiable ; la longueur d'un arc compris entre le sommet du

cône et un point $m$ est égal à la partie de la tangente qui, menée au point $m$, se trouve comprise entre ce point $m$ et le plan mené par le sommet du cône perpendiculaire à l'axe de ce cône, etc., etc.

Ces diverses propriétés sont évidentes lorsqu'on jette les yeux sur la *fig.* 18.

XI. *Construction du rayon de courbure de la spirale logarithmique conique.*

Nous avons vu que la spirale logarithmique conique était une hélice sur le cylindre qui projette cette courbe à double courbure sur un plan P perpendiculaire à l'axe du cône suivant une spirale logarithmique conique.

Par conséquent, les rayons de courbure de cette spirale sont tous parallèles au plan P.

Dès lors, étant donné un point $m$ sur la spirale A, pour avoir le rayon de courbure correspondant à ce point, il faudra mener par la tangente $\theta$ au point $m$ de la courbe A un plan R perpendiculaire au plan vertical passant par $\theta$; ce plan R coupera le cône suivant une section conique E, osculatrice à la courbe A au point $m$, car nous savons que le plan R, en vertu de la direction que nous venons de lui donner, est le plan osculateur de la courbe A pour le point $m$.

Le rayon de courbure de la section conique E, sera celui de la spirale A.

Comme pour chaque point de la spirale A, la tangente $\theta$ au point $m$ fait le même angle $\alpha$ avec la génératrice G du cône, il s'ensuit que si l'on fait tourner toutes les génératrices G autour de l'axe pour les placer sur une même génératrice $G_1$, toutes les tangentes $\theta$, menées aux divers points de la spirale A, viendront se placer dans le plan T, tangent au cône suivant $G_1$, et en ces nouvelles positions seront toutes parallèles entre elles; dès lors, on doit conclure que les divers plans osculateurs de la spirale A coupent le cône sur lequel cette courbe est tracée, suivant des section coniques B toutes semblables entre elles, mais non semblablement placées.

Par conséquent, connaissant le rayon de courbure pour un point $m$ de la spirale A, il sera facile d'en conclure le rayon de courbure pour tout autre point $m'$ que l'on indiquera.

Et en effet :

Concevons le cône de révolution B, une génératrice G de ce cône, le plan T tangent à ce cône suivant G ; menons dans le plan T une suite de droites $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,..... toutes parallèles entre elles, et par chacune d'elles menons un plan parallèle à l'axe du cône B, nous aurons les plans verticaux X, X', X''; par chacune des droites $\theta$, $\theta'$, $\theta''$, menons des plans parallèles entre eux R, R', R'' et perpendiculaires aux plans verticaux et aussi parallèles entre eux X, X', X''; ces plans R, R', R'' couperont le cône B suivant des sections coniques semblables et semblablement placées E,

E′, E″; désignons : 1° par $b$, $b'$, $b''$ les demi-diamètres de ces courbes passant par le point en lequel la génératrice G coupe chacune de ces courbes; 2° par $\rho$, $\rho'$, $\rho''$, le rayon de courbure de chacune d'elles.

Supposons d'abord que le point en lequel les courbes E, E′, E″ coupent G soit le sommet de ces courbes; désignons par $a$, $a'$, $a''$ les demi-axes, $b$, $b'$, $b''$ étant les autres demi-axes de ces sections coniques, on aurait dans ce cas tout particulier :

$$\rho = \frac{a^2}{b}, \quad \rho' = \frac{a'^2}{b'}, \text{ etc.}$$

Or, puisque les courbes E et E′ sont semblables, on a

$$a : a' :: b : b'$$

d'où

$$a^2 = \frac{a'^2 \cdot b^2}{b'^2}$$

d'où

$$\rho = \frac{a'^2 \cdot b^2}{b \cdot b'^2}$$

d'où

$$\rho \cdot b'^2 = a'^2 \cdot b$$

Et comme

$$\rho' b' = a'^2$$

on aura

$$\frac{\rho \cdot b'}{\rho'} = b$$

d'où

$$\rho : \rho' :: b : b'$$

Or, cette proportion aura lieu, que $b$ et $b'$ soient les demi-axes ou des demi-diamètres, parallèles entre eux, de deux sections coniques E et E′ semblables et semblablement placées sur le cône B; dès lors, connaissant $\rho$ et $b$ pour un point $m$, et $b'$ pour un point quelconque $m'$ de la courbe spirale A, on pourra construire $\rho'$ ou le rayon de courbure de cette courbe A pour ce point $m'$, car : désignant par T et T′ les plans tangents au cône B et aux points $m$ et $m'$ de la spirale A, et désignant par R le plan osculateur en $m$ à la courbe A et par $R_1$ le plan osculateur en $m'$ à cette même courbe A; si l'on fait tourner le plan T′ autour de l'axe du cône B pour le superposer sur le plan T, le plan $R_1$ viendra prendre la position R′ parallèle à R; par conséquent, les plans R, et R′ couperont le cône B suivant des

sections coniques $E_1$ et $E'$ qui seront identiques, et le plan R coupera le cône B suivant une section conique E semblable à la courbe $E'$. Le point $m'$ de $E_1$ viendra se placer en $m_1$ sur $E'$, et les points $m$ de E et $m_1$ de $E'$ seront sur une même génératrice G du cône B.

Le demi-diamètre $b_1$ de $E_1$ pour le point $m'$ sera égal au demi-diamètre $b'$ de $E'$ pour le point $m_1$; et l'on aura le demi-diamètre $b'$ de $E'$ pour le point $m_1$ parallèle au demi-diamètre $b$ de E pour le point $m$; donc, etc.

XII. *De la courbe qui, tracée sur un cône quelconque, coupe sous un angle constant les génératrices de ce cône.*

Étant donné un cône $\Sigma$ ayant pour directrice une courbe quelconque B, on peut toujours développer ce cône, car l'on sait que si l'on coupe le cône $\Sigma$ par une sphère ayant son centre au sommet $s$ de ce cône et un rayon arbitraire R, on obtient une courbe C qui se transforme, lorsque le cône est développé ou planifié, en un cercle $C_1$ ayant R pour rayon.

Dès lors, si sur le plan du cercle $C_1$ on construit une spirale logarithmique plane $X_1$ ayant pour pôle le centre $o$ du cercle $C_1$ en enroulant le plan du cercle $C_1$ sur le cône $\Sigma$, ayant soin de placer le centre $o$ du cercle $C_1$ sur le sommet $s$ de ce cône, la spirale plane $X_1$ se transformera en une spirale à double courbure X qui coupera les génératrices droites du cône $\Sigma$ sous un angle constant.

Une des propriétés remarquables de cette courbe à double courbure est la suivante.

Les tangentes $\theta$ à la courbe X forment une surface développable Y, et les tangentes $t$ à la courbe C forment aussi une surface développable $Y_1$.

Or, si l'on conçoit une génératrice G du cône $\Sigma$ coupant la courbe X en un point $x$ et la courbe C en un point $y$, les tangentes $\theta$ en $x$ à la courbe X et $t$ en $y$ à la courbe C se coupent sous un angle $\alpha$ qui est constant, quelle que soit la position de la génératrice G sur le cône $\Sigma$, et quelle que soit la directrice B du cône $\Sigma$; et cet angle $\alpha$ est toujours le complément de l'angle sous lequel la courbe à double courbure X coupe les génératrices G du cône $\Sigma$.

Et en effet :

Soit tracé sur un plan P (*fig.* 24) une spirale logarithmique plane $X_1$ ayant le point $o$ pour pôle.

Décrivons du point $o$ comme centre et avec un rayon R le cercle $C_1$; menons le rayon vecteur $G_1$ coupant la courbe $X_1$ au point $x_1$ et le cercle $C_1$ au point $y_1$; construisons la tangente $\theta_1$ en $x_1$ à la courbe spirale $X_1$, et la tangente $t_1$ en $y_1$ au cercle $C_1$; ces deux droites $\theta_1$ et $t_1$ se couperont sous un angle $\widehat{x_1 r_1 y_1}$ qui sera constant, quelle que soit la position du rayon vecteur $G_1$.

Si donc on enroule le plan P sur le cône $\Sigma$, les droites $\theta_{\prime}$ et $t_{\prime}$ deviendront les tangentes $\theta$ et $t$; l'une au point $x$ de la courbe spirale X, l'autre au point $y$ de la courbe à double courbure C et les deux droites $\theta$ et $t$ auront conservé, entre elles, les mêmes relations de position qui existaient entre les droites $\theta_{\prime}$ et $t_{\prime}$; donc $\theta$ et $t$ se coupent sous un angle constant, etc., etc.

XIII. *Étant tracée sur un cône à directrice arbitraire la courbe qui coupe sous un angle constant les diverses génératrices droites de ce cône, on demande de construire le rayon de courbure en un point de cette spirale.*

Nous devons admettre que l'on peut calculer le rayon de courbure d'une section plane quelconque d'un cône $\Sigma$ dont on connaît le sommet $s$ et la courbe directrice B.

Ainsi, étant donnée (*fig.* 25), la courbe B pour courbe directrice du cône $\Sigma$ et le point $m$ étant celui de la spirale A, pour lequel on veut trouver le rayon de courbure, nous ferons passer par le point $m$ un plan P perpendiculaire à la génératrice G du cône, laquelle passe par ce point $m$; ce plan P coupera le cône suivant une courbe B', au point $m$ nous mènerons la normale $mp$ à la courbe B', et nous déterminerons son centre de courbure $o$; nous aurons dès lors le cercle $\delta$, osculateur en $m$ à la courbe B'.

Nous considérerons le cercle $\delta$ comme la section droite d'un cylindre O ayant ses génératrices parallèles à la droite G.

Ce cylindre O sera osculateur en $m$ au cône $\Sigma$.

Le cylindre osculateur O étant trouvé, il faut obtenir le cône osculateur et de révolution.

Or, si l'on considère le cercle $\delta$ comme la base d'un cône ayant le point $s$ pour sommet, ce cône sera osculateur au cône $\Sigma$ tout le long de G; mais ce cône ne sera pas de révolution; pour qu'il soit de révolution, il faut que le triangle $som$ soit rectangle en $o$.

Menons en $m$ la tangente $\theta$ au cercle $\delta$ et par cette tangente $\theta$ faisons passer une suite de plans Y, Y', Y''; chacun d'eux coupera le cylindre O suivant des ellipses E, E', E'', qui auront toutes même petit demi-axe et égal au rayon $\rho$ du cercle $\delta$ et le demi-grand axe sera égal à $\frac{\rho}{\cos\alpha}$, $\alpha$ étant l'angle que le plan Y fait avec le plan P (*fig.* 26); et cet angle $\alpha$ variera de grandeur avec les diverses positions que le plan Y prendra dans l'espace, savoir : Y', Y'',.....

Par conséquent, les ellipses E, E', E,.... auront toutes leurs petits axes égaux entre eux et leurs grands axes inégaux entre eux.

Le point $m$ sera le sommet de chacune des ellipses E, E′, E″; pour ce sommet, le rayon de courbure sera

$$\rho_{\prime} = \frac{\rho^2}{a}$$

$\rho$ étant le demi-petit axe et $a$ désignant le demi-grand axe $mq$.

Or

$$mq \cdot \cos \alpha = mo$$

donc

$$a = \frac{\rho}{\cos \alpha}$$

on aura donc

$$\rho_{\prime} = \rho \cdot \cos \alpha$$

Par conséquent (*fig.* 26), si sur $om$ ou $\rho$ comme diamètre on décrit le cercle K, il coupera la droite $mq$ en $x$, et $xm$ sera égal à $\rho_{\prime}$.

Par conséquent, si sur $sm$ comme diamètre je décris le cercle L, les cercles L et K se couperont en un point $x$, et $xs$ sera l'axe du cône $O_{\prime}$ de révolution, osculateur au cône Σ tout le long de la génératrice G.

Le cône osculateur $O_{\prime}$ étant construit, on pourra considérer les deux éléments successifs de la courbe A qui appartiennent à la fois au cône Σ et au cône $O_{\prime}$ comme étant situés sur une spirale logarithmique conique $A_{\prime}$ tracée sur le cône $O_{\prime}$.

Et le plan osculateur Q pour la courbe $A_{\prime}$ au point $m$ sera le plan osculateur de la courbe A pour ce même point $m$.

Or, l'on sait que le plan Q est perpendiculaire au plan passant par une droite menée par le point $m$ parallèlement à l'axe du cône $O_{\prime}$, et par la tangente en $m$ à la courbe $A_{\prime}$.

Dès lors, nous construirons en $m$ la tangente T à la courbe donnée A; par ce même point $m$ nous mènerons une droite Z parallèle à l'axe $sxo$ du cône osculateur de révolution $O_{\prime}$; et par la tangente T nous mènerons le plan Q perpendiculaire au plan passant par les droites Z et T.

Le plan osculateur Q étant déterminé, ce plan coupera le cône $O_{\prime}$ suivant une section conique osculatrice en $m$ à la spirale donnée A.

Il ne restera plus qu'à déterminer le rayon de courbure de la section conique pour achever la solution du problème proposé.

*Remarque*. En terminant, je crois devoir faire remarquer que lorsqu'il s'est agi, n° XI, de la solution du problème : *Construire le rayon de courbure* $\rho'$ *en un point* m' *de la spirale logarithmique conique* A, *connaissant le rayon de courbure* $\rho$ *en un point* m *de cette courbe*, j'ai dit que désignant par $b$ et $b'$ les demi-diamètres des sections coniques E et E' osculatrices en $m$ et $m'$ à la spirale à double courbure A, on avait toujours :

$$\rho : \rho' :: b : b'$$

Je n'ai point démontré l'existence de cette propriété dans tous les cas, me bornant à la démontrer lorsque l'on suppose que les points $m$ et $m'$ sont les sommets des courbes E et E'.

Au moyen de *considérations géométriques* très-simples, on peut facilement démontrer l'existence de cette proportion dans tous les cas.

Et en effet :

Désignons par G la génératrice du cône de révolution B sur lequel la spirale A est tracée, cette génératrice passant par le point $m$ de cette courbe A. Faisant tourner le plan de la courbe E' jusqu'à ce que le point $m'$ vienne en $m_{,}$ sur G, la courbe E prendra la position $E_{,}$, et les courbes E et $E_{,}$ seront dans des plans parallèles, et seront semblables et semblablement placées sur le cône B dont elles sont des sections planes.

Désignons par $e$ et $e_{,}$ les centres des courbes E et $E_{,}$ la droite qui unira le point $e$ au sommet $s$ du cône B passera par le point $e_{,}$, et les droites $em$ et $e_{,}m_{,}$ seront parallèles, et l'on aura :

$$\overline{em} : \overline{e_{,}m_{,}} :: \overline{sm} : \overline{sm_{,}} \qquad (1)$$

Cela fait :

Traçons dans le plan de la courbe E la développée $\delta$ de cette courbe; la normale N menée au point $m$, à la courbe E et dans son plan, touchera la développée $\delta$ en un point $o$.

Et les deux normales successives et infiniment voisines N et N' à la courbe E et passant, l'une par le point $m$ et l'autre par le point $p$, ces deux points étant successifs et infiniment voisins sur la courbe E, se couperont au point $o$.

De même, deux normales successives et infiniment voisines $N_{,}$ et $N_{,}'$ à la courbe $E_{,}$ et passant l'une par le point $m$ et l'autre par le point $p_{,}$, ces deux points étant successifs et infiniment voisins sur la courbe $E_{,}$, se couperont en un point $o_{,}$.

Or, les points $s$, $m$ et $m_{,}$ étant sur la droite G, les points $s$, $p$ et $p_{,}$ seront sur la droite G' génératrice successive et infiniment voisine de G sur le cône B.

Dès lors, les droites N et $N_{,}$, N' et $N_{,}'$ seront parallèles.

Dès lors, les plans ($N$, $N_1$) et ($N'$, $N'_1$) se couperont suivant une droite passant par le sommet $s$ du cône B et les deux points $o$ et $o_1$.

Or : $\overline{om}$ sera le rayon de courbure $\rho$ de la courbe E pour le point $m$, et $\overline{o_1m_1}$ sera le rayon de courbure $\rho_1$ de la courbe $E_1$ pour le point $m_1$ ; on a donc la proportion :

$$\rho : \rho_1 :: \overline{sm} : \overline{sm_1} \qquad (2)$$

Comparant les proportions (1) et (2), on en déduit :

$$\rho : \rho_1 :: \overline{em} : \overline{e_1m_1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Mais si l'on mène par le sommet $s$ du cône de révolution B une droite de direction arbitraire Q coupant les plans des sections coniques E et $E_1$ en les points $q$ et $q_1$, on aura toujours :

$$\overline{qm} : \overline{q_1m_1} :: \overline{sm} : \overline{sm_1}$$

et par conséquent

$$\rho : \rho' :: \overline{qm} : \overline{q_1m_1}$$

Ainsi, désignant $\overline{qm}$ par $r$ et $\overline{q_1m_1}$ par $r_1$, on peut dire : que les rayons de courbure en deux points homologues $m$ et $m_1$ de deux sections coniques semblables et semblablement placées (dans l'espace) E et $E_1$ sont entre eux comme les rayons vecteurs homologues $r$ et $r_1$ de ces courbes ayant pour *pôles* conjugués les points $q$ et $q_1$.

Et comme deux sections parallèles et planes faites dans un cône quelconque ont pour *pôle* commun le sommet de ce cône, on peut dire que $\overline{sm}$ et $\overline{sm_1}$ sont les rayons vecteurs des courbes E et $E_1$ par rapport à leur *pôle* commun $s$.

Et dès lors, désignant $\overline{sm}$ par $v$ et $\overline{sm_1}$ par $v_1$, on aura :

$$\rho : \rho' :: v : v_1$$

D'où

$$\rho' = \frac{\rho . v_1}{v}$$

Par conséquent, connaissant le rayon de courbure $\rho$ pour un point $m$ de la spirale logarithmique conique A, on pourra facilement construire le rayon de courbure $\rho'$ pour un point quelconque $m'$ de cette courbe, car il suffira de mener par le point $m'$ une droite D s'appuyant sur l'axe du cône B et dirigée

perpendiculairement à cet axe, et de porter sur cette droite D une longueur $\rho'$, quatrième proportionnelle entre $\rho$, $\overline{sm'}$ et $\overline{sm}$.

$\overline{sm'}$ et $\overline{sm}$ étant les distances des points $m$ et $m'$ au sommet $s$ du cône de révolution B sur lequel est tracée la spirale donnée A.

Et comme ce que nous venons de dire aura évidemment lieu, quel que soit le demi-angle au sommet du cône de révolution B, nous pourrons en conclure que la même chose aura lieu lorsque ce demi-angle sera égal à un angle droit; lors donc que le cône B sera un plan P et que la spirale logarithmique et conique A sera une spirale logarithmique plane $A_1$.

Par conséquent, l'on pourra très-facilement construire le rayon de courbure $\rho'$ en un point $m'$ d'une spirale logarithmique plane A, lorsque l'on connaîtra son rayon de courbure $\rho$ pour un de ses points $m$; car désignant par $r$ et $r'$ les rayons vecteurs de cette courbe pour les points $m$ et $m'$, on aura :

$$\rho : \rho' :: r : r'$$

### 2° DE LA SPIRALE HYPERBOLIQUE.

En désignant le rayon vecteur par $\rho$ et l'angle par $\omega$, les géomètres ont donné le nom de *spirale hyperbolique* à la courbe plane ayant pour équation $\rho . \omega = M$, et cela parce que l'équation polaire avait la même forme que l'équation en coordonnées obliques $xy = C$, laquelle représente, comme on le sait, une hyperbole rapportée à ses asymptotes, ces droites étant prises pour axes des coordonnées.

Je me propose de démontrer, que si l'on a un cône ayant pour directrice une *hélice* tracée sur un cylindre de révolution et pour sommet un point situé sur l'axe de ce cylindre, la courbe que l'on obtiendra en coupant ce cône par un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre sera une *spirale hyperbolique*.

Ensuite, je chercherai les diverses propriétés dont cette courbe peut jouir, en ne me servant que des méthodes employées en *géométrie descriptive*.

§ I$^{er}$.

Traçons (*fig.* 27) sur le cylindre de révolution qui a pour axe la droite Z et pour section droite le cercle C, l'hélice H.

Prenons sur l'axe Z un point $s$, et menons par ce point un plan perpendiculaire à l'axe Z et coupant dès lors le cylindre suivant un cercle C', et l'hélice H en un point $a$.

Je dis : que le cône qui a pour sommet le point $s$ et pour directrice l'hélice H est coupé par le plan $xy$ perpendiculaire à l'axe Z suivant une courbe $\varphi$ qui n'est autre qu'une *spirale hyperbolique*.

En effet :

Par un point $m$ de l'hélice H, concevons la droite $nmp$ génératrice du cylindre et la droite $smd$ génératrice du cône.

$od$ sera le rayon vecteur de la courbe $\varphi$.

En prenant la droite $ox$, ou mieux le plan $Zx$, pour origine des angles $\omega$; et désignant par R le rayon des cercles C et C'; et par $b$ la distance du sommet $s$ au plan sécant $xy$; et par $h$ le *pas* de l'hélice H, on aura :

$$\frac{nm}{\text{arc } na} = \frac{h}{2\pi \cdot R}$$

Et comme

$$\text{arc } na = R \cdot \omega$$

on aura

$$nm = \frac{h \cdot R \cdot \omega}{2\pi \cdot R} = \frac{h \cdot \omega}{2\pi}$$

Or, les deux triangles semblables $smn$ et $sod$ donnent

$$sn : od :: nm : os$$

ou

$$R : \rho :: \frac{h \cdot \omega}{2\pi} : b$$

D'où

$$Rb = \frac{h}{2\pi} \cdot \rho\omega$$

et enfin

$$\rho \cdot \omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot b}{h}$$

équation qui appartient à la courbe que les géomètres ont appelée *spirale hyperbolique*.

Cette manière toute nouvelle d'obtenir la spirale hyperbolique, outre l'avantage de conduire à un procédé simple soit *graphique* pour la construire par point, soit *mécanique* pour le tracé d'un mouvement continu, comme nous le ferons voir plus loin, a encore celui de bien faire voir comment est composée la quantité constante qui entre dans l'équation de cette courbe.

Et ainsi, on voit très-bien que la quantité $\frac{2\pi . R . b}{h}$ peut rester constante : 1° si l'on fait varier R et $h$, ou R et $b$, ou $b$ et $h$ de manière à ce que $\left(\frac{R}{h}\right)$ ou $(R . b)$ ou $\left(\frac{b}{h}\right)$ reste constant, et 2° si l'on fait varier à la fois R, $h$ et $b$ de manière à ce que $\left(\frac{Rb}{h}\right)$ reste constant.

Et cette quantité $\frac{2\pi . R . b}{h}$ pouvant varier, on voit très-bien que dès lors on doit avoir une courbe différente, si l'on fait varier arbitrairement l'une ou seulement deux, ou les trois quantités R, $b$ et $h$.

De plus, l'on voit que deux spirales semblables auront pour équations, l'une $\rho\omega = Ab$, et l'autre $\rho\omega = Ab'$.

Puisqu'en faisant varier $b$ dans la quantité $\frac{2\pi . R . b}{h}$, c'est supposer que l'on coupe le cône par un plan qui s'éloigne ou se rapproche du sommet $s$ tout en restant perpendiculaire à l'axe Z de ce cône; et qu'un cône est, comme on le sait, coupé par des plans parallèles suivant des courbes semblables et semblablement placées.

## § II.

### *Des diverses propriétés géométriques de la spirale hyperbolique.*

I. *La spirale hyperbolique a un point asymptote.*

Il est évident (*fig.* 27) qu'à mesure que le point $m$ de l'hélice H descend sur cette hélice, l'angle $\omega$ augmente et l'angle $\widehat{osd}$ diminue; et que dès lors le rayon vecteur $od$ diminue indéfiniment sans jamais devenir nul, parce que la génératrice du cône se rapproche sans cesse de l'axe $z$ sans jamais se confondre avec cet axe.

La spirale $\varphi$ tourne donc indéfiniment autour du point $o$ sans jamais atteindre ce point, et c'est pour cette cause que le point $o$ est dit *point asymptote*.

II. *La spirale hyperbolique a une droite asymptote.*

Si par le sommet $s$ (*fig.* 27) du cône on mène un plan perpendiculaire à l'axe $z$, ce plan coupera l'hélice H en un point $sa$, et la génératrice $a$ du cône sera parallèle au plan sécant $xy$, ou, en d'autres termes, au plan de la spirale $\varphi$.

Dès lors, la courbe $\varphi$ a un point situé à l'infini et qui n'est autre que celui en lequel la génératrice horizontale $sa$ coupe le plan sécant $xy$.

Or, si l'on voulait construire la tangente au point $d$ de la spirale $\varphi$, il faudrait construire le plan T tangent au cône suivant la génératrice $smd$ de ce cône, et ce plan T couperait le plan de la courbe $\varphi$ suivant la tangente demandée.

Pour construire le plan T, il faudrait mener au point $m$ de l'hélice H la tangente $\theta$ de cette hélice, et la génératrice $sd$ et la tangente $\theta$ détermineraient le plan T.

Par conséquent, pour construire la tangente pour le point situé à l'infini sur la spirale $\varphi$, il faudra construire le plan T, tangent au cône suivant la génératrice horizontale $sa$ de ce cône.

Et ce plan T, passera évidemment par la génératrice $sa$ du cône et par la tangente $\theta$, menée à l'hélice H au point $a$. Cette tangente $\theta$, faisant un angle avec l'axe, coupera nécessairement le plan sécant $xy$ et en un point $e$; dès lors l'asymptote de la courbe $\varphi$ ne sera autre que la trace A du plan T, sur le plan $xy$, et cette trace A passera par le point $e$ et sera parallèle à la génératrice horizontale $sa$.

La tangente de l'angle $\widehat{eab}$ ou, en d'autres termes, de l'angle sous lequel l'hélice H coupe les génératrices du cylindre sur lequel elle est tracée, nous est connue; nous savons qu'en désignant cet angle par $6$ on a :

$$\text{tang. } 6 = \frac{2\pi \cdot R}{h}$$

( désignant par R le rayon du cercle section droite du cylindre de révolution sur lequel l'hélice est tracée, et par $h$ le *pas* de cette hélice ).

Dans le triangle $acb$ rectangle en $b$, on a donc :

$$\overline{eb} = \overline{ab} \text{ tang. } 6$$

Or, nous avons posé ci-dessus :

$$\overline{ab} = b$$

donc l'on a

$$\overline{eb} = \frac{2\pi \cdot R \cdot b}{h}$$

Or, $\overline{eb}$ mesure la distance du point $o$ à la droite A ou du *pôle* à l'*asymptote* de

la spirale $\varphi$; par conséquent, dans l'équation $\rho.\omega = M$ d'une *spirale hyperbolique*, la quantité M exprime la distance du *point asymptote* à la *droite asymptote*.

III. *La spirale hyperbolique est composée de deux branches symétriques ayant même point asymptote et même droite asymptote.*

Concevons (*fig.* 28) les trois axes rectangulaires entre eux *ox*, *oy*, *oz*; prenons l'axe *z* pour l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice H, et prenons pour origine de cette hélice sur le plan $xy$ le point $f$ situé sur l'axe $x$.

Sur la génératrice du cylindre passant par le point $f$, prenons $ff_1$ pour le pas de l'hélice H.

Prenons sur l'axe $z$ un point $s$ distant du plan $xy$ d'une quantité *so* égale à la moitié de $ff_1$.

Le point $s$ étant le sommet du cône qui a pour directrice l'hélice H, on voit que la génératrice horizontale de ce cône sera dans le plan *zx* et ne sera autre que *sa*, et de plus il est évident que ce cône n'a qu'une seule génératrice horizontale.

En construisant en $a$ à l'hélice H sa tangente, on aura en $e$ le pied de cette tangente sur le plan $xy$; et menant par ce point $e$ la droite A parallèle à l'axe $x$, on aura l'asymptote de la spirale $\varphi$, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, et la spirale $\varphi$ sera formée par les divers points $d$ intersections du plan $xy$ avec les diverses génératrices du cône passant par les divers points $m$ de l'hélice H, ces points $m$ étant situés au-dessous du plan horizontal Q passant par le sommet $s$; mais la courbe H serpente sur le cylindre au-dessus de ce plan Q; et si l'on prend un point $m_1$ sur la spire $H_1$, on voit que la génératrice $m_1s$ du cône viendra percer le plan $xy$ en un point $d_1$, et tous les points $d_1$ formeront une nouvelle courbe $\varphi_1$ qui aura aussi le point $o$ pour *point asymptote* et la droite A pour *droite asymptote*; ainsi la section faite dans ce cône par le plan $xy$ est une courbe composée de deux branches $\varphi$ et $\varphi_1$. Or, si les points $m$ et $m_1$ sont également distants du plan Q, il est évident, par la figure seule, que les rayons vecteurs *od* et $od_1$ seront égaux en longueur et feront des angles égaux, à droite et à gauche, avec l'axe $y$; donc, etc.

IV. *Dans la spirale hyperbolique, la sous-tangente est constante.*

Ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, la tangente à la spirale $\varphi$ au point $d$ est la trace du plan tangent au cône ayant son sommet en $s$, et pour directrice l'hélice H.

Ainsi (*fig.* 29), la droite $\theta$ étant la tangente au point $m$ de l'hélice H, *sm* étant la génératrice du cône, la droite T passant par les traces horizontales $k$ de $\theta$ et $d$ de *sm* sera la tangente au point $d$ de la spirale $\varphi$.

Cela posé :

Menons par le sommet $s$ une droite *sl* parallèle à la tangente $\theta$.

En faisant tourner la droite $sl$ autour de l'axe $z$, cette droite engendrera un cône de révolution V ayant le point $s$ pour sommet et pour base le cercle D ayant pour centre le point asymptote $o$ de la spirale $\varphi$.

Et comme toutes les tangentes $\theta$ à l'hélice H font le même angle avec l'axe $z$, il s'ensuivra que chacune de ces droites $\theta$ aura sa parallèle parmi les génératrices du cône V.

Cela posé :

Remarquons que les deux droites $sl$ et $mk$ étant parallèles, seront dans le plan tangent mené au cône hélicoïdal suivant $sd$, et que dès lors les trois points $l$, $k$ et $d$ seront en ligne droite.

Remarquons que la projection horizontale de la génératrice $sd$ n'est autre que le rayon prolongé $opd$ du cercle C qui est lui-même la projection horizontale de l'hélice H, et que dès lors la tangente $pk$ au cercle C sera la projection de la tangente $\theta$ à l'hélice H.

Or, les droites $opd$ et $pk$ sont perpendiculaires l'une à l'autre ; donc la droite $ol$ projection de $sl$ sera perpendiculaire sur $od$. Ainsi, le triangle $lod$ est rectangle en $o$ ; la droite $ol$ est, comme on le sait, dite *sous-tangente* pour les courbes *polaires* ; $ol$ est constant, quelle que soit la projection du point $m$ sur l'hélice H et par suite quelle que soit la projection du point $d$ sur la spirale $\varphi$ ; on en conclut donc que *la sous-tangente est constante pour la spirale hyperbolique.*

Nous avons désigné $os$ par $b$, et la tangente de l'angle $\widehat{lso}$ est égale à $\frac{2\pi R}{h}$, par conséquent $\overline{ol} = \frac{2\pi R}{h} \cdot b$.

Or, nous avons vu ci-dessus que la distance du point asymptote à la droite asymptote était égale à $\frac{2\pi \cdot R \cdot b}{h}$ ; par conséquent, nous pouvons énoncer ce qui suit :

*Dans la spirale hyperbolique, les pieds des sous-tangentes sont situés sur un cercle, ayant le point asymptote pour centre et la droite asymptote pour tangente.*

V. *Le cône hélicoïdal est coupé par des cylindres concentriques suivant des hélices ayant toutes même inclinaison.*

Pour résoudre cette question, construisons la *fig.* 30, et pour cela :

1° Imaginons les trois axes rectangulaires entre eux $ox$, $oy$, $oz$ ;

2° Traçons sur le plan $xy$ une suite de cercles C, C′, C″ ayant le point $o$ pour centre commun ;

3° Imaginons les cylindres $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$ ayant tous l'axe $z$ pour axe de révolution, et respectivement pour section droite les cercles C, C′, C″ ;

4° Prenons sur l'axe $z$ un point $s$, et considérons ce point comme le sommet

d'un cône B ayant pour base la spirale hyperbolique $\varphi$ tracée sur le plan $xy$ et ayant le point $o$ pour point asymptote.

Cela posé :

Il est évident que la droite $saa'a''$ situé dans le plan $zx$ étant supposée la génératrice horizontale du cône B, les courbes H, H', H'' intersection du cône B par les cylindres $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$ passeront respectivement par les points $a$ et $f$, $a'$ et $f'$, $a''$ et $f''$, les points $f, f', f''$ étant ceux en lesquels la spirale $\varphi$ coupe les cercles C, C', C''.

Il est encore évident que si par l'axe $z$ on mène un plan Y coupant les cylindres $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$ suivant les génératrices $np$, $n'p'$, $n''p''$ et le cône B suivant la génératrice $sd$, les courbes H, H', H'' passeront respectivement par les points $m$, $m'$, $m''$, intersection de la génératrice conique $sd$ et des génératrices cylindriques $np$, $n'p'$, $n''p''$.

Et d'après ce qui a été dit ci-dessus, si la droite T est la tangente en $d$ à la spirale $\varphi$, en menant par le point $o$ la droite $ol$ perpendiculaire au rayon vecteur $od$ et joignant les points $o$ et $s$, on aura le triangle $stl$ dont le plan X sera tangent au cône B suivant la génératrice $sd$.

Pour construire les tangentes $\theta$, $\theta'$, $\theta''$ aux courbes H, H', H'', et aux points $m$, $m'$, $m''$ de ces courbes, il faudra mener les plans tangents $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ aux cylindres $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$ en ces mêmes points $m$, $m'$, $m''$.

Or : puisque ces points $m$, $m'$, $m''$ sont situés dans le plan Y passant par l'axe $z$, les plans $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ seront perpendiculaires à ce plan Y; puisque les cylindres $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$ sont de révolution et ont pour axe commun l'axe $z$; et dès lors ces plans $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ seront parallèles entre eux.

Les plans $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ couperont donc le plan tangent X suivant des droites $\theta$, $\theta'$, $\theta''$ parallèles entre elles et parallèles à la droite $sl$, puisque le plan $slo$ est perpendiculaire au plan Y.

Or, ce résultat obtenu, savoir : que les tangentes $\theta$, $\theta'$, $\theta''$ aux courbes H, H', H'' aux points $m$, $m'$, $m''$ situés dans un plan Y passant par l'axe $z$ sont parallèles entre elles, ce résultat, dis-je, aura lieu quelle que soit la position du plan Y, quelle que soit, par conséquent, la génératrice $sd$ que l'on considérera sur le cône B.

Dès lors, on doit en conclure que les courbes H, H', H'' coupent sous un angle constant et égal à l'angle $\widehat{lso}$ les génératrices des cylindres $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$ sur lesquelles elles sont placées. Ces courbes H, H', H'' ne sont donc autres que des hélices ayant même inclinaison.

Il est donc démontré que l'intersection du cône *hélicoïdal* par un cylindre concentrique est une hélice ayant même inclinaison que l'hélice directrice de ce cône.

VI. *Une spirale hyperbolique étant donnée par son tracé, construire la tangente en un de ses points.*

On donne (*fig.* 31) la spirale hyperbolique $\varphi$ et son point asymptote $o$, et l'on demande de construire au point $d$ la tangente T à cette courbe.

Par le point $o$ on mènera la droite arbitraire $ox$; du point $o$ comme centre et avec un rayon arbitraire, on décrira le cercle C coupant la spirale $\varphi$ au point $f$. Du point $o$ comme centre, et avec le rayon vecteur $od$ comme rayon, on décrira un second cercle qui coupera la droite $ox$ au point $d'$.

Par le point $o$, on mènera $os$ perpendiculaire à $ox$, et l'on prendra sur $os$ un point arbitraire $s$.

On mènera la droite $sd'$.

Par le point $p'$, en lequel la droite $ox$ est coupée par le cercle C, on mènera la droite $p'm'$ perpendiculaire à $ox$ et coupant $sd'$ en $m'$.

Cela fait :

On développera l'arc $fp$ du cercle C, et l'on aura une droite FP ; en P on mènera PM égal à $p'm'$ et perpendiculaire à l'arc $fp$ rectifié suivant PM, et l'on aura l'angle FMP ou $\gamma$.

On portera de M en P' sur MP la droite $so$ et l'on mènera F'P' parallèle à FP, et coupant la droite MF en F'.

On portera P'F' sur $ol$ perpendiculaire au rayon vecteur $od$, depuis le point asymptote $o$ jusqu'en $l$ ;

On joindra les points $l$ et $d$, et l'on aura la tangente demandée.

La construction de la tangente nous conduit à une remarque importante.

Sur le cylindre vertical (*fig.* 31), ayant le cercle C pour section droite, est tracée une hélice H, directrice du cône ayant le point $s$ pour sommet et la spirale $\varphi$ pour base.

La tangente $\theta$ au point $m$ de l'hélice H (ce point $m$ étant celui en lequel la génératrice $sd$ du cône perce le cylindre ou s'appuie sur l'hélice H) coupera le plan de la spirale $\varphi$ en un point $k$ situé sur la droite T tangente en $d$ à la courbe $\varphi$.

Or, il est évident que l'arc $fp$ du cercle C est égal à la droite $kp$, puisque l'hélice H passe par le point $f$ en lequel le cercle C est coupé par la spirale $\varphi$.

Cette remarque nous conduira à la solution de plusieurs problèmes : d'abord elle nous permet de simplifier la construction de la tangente en un point de la spirale hyperbolique, et ainsi qu'il suit.

Pour construire (*fig.* 31) la tangente $md$ à la spirale $\varphi$, on décrira le cercle C avec un rayon $of$ plus petit que $od$, prenant pour centre le point asymptote $o$.

On décrira la développante $\delta$ du cercle C ayant pour origine le point $f$ en lequel le cercle C coupe la spirale $\varphi$; on joindra le point $o$ et le point $d$, et la droite $od$

coupera le cercle C en un point $p$; en ce point $p$ on mènera la tangente au cercle C, laquelle coupera normalement la développante $\delta$ au point $k$; en joignant par une droite les points $k$ et $d$, on aura la tangente demandée.

VII. *Étant donnée une droite* T *et un point* d *sur cette droite, et un point* o *hors de la droite* T, *construire la spirale hyperbolique passant par le point* d, *ayant le point* o *pour point asymptote, et la droite* T *pour tangente au point* d.

Étant donné (*fig.* 32) le point $o$ et la droite T et le point $d$ sur T, on tracera une suite de cercles C, C′, C″, du point $o$ comme centre commun;

On mènera le rayon vecteur $od$ coupant les cercles C, C′, C″, aux points $p$, $p'$, $p''$; en ces points on mènera les tangentes $kp$, $k'p'$, $k''p''$ aux cercles C, C′, C″;

Ces tangentes couperont la droite T aux point $k$, $k'$, $k''$.

Cela fait :

On enroulera les droites $pk$ sur le cercle C, $p'k'$ sur le cercle C′, $p''k''$ sur le cercle C″ et l'on tracera ainsi les développantes circulaires $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, lesquelles couperont leurs développées C, C′, C″ en les points $f$, $f'$, $f''$.

Et ces divers points $f$, $f'$, $f''$, ainsi que le point $d$, appartiendront à une spirale hyperbolique $\varphi$ ayant le point $o$ pour point asymptote, et ayant la droite T pour tangente au point $d$.

Ce que nous venons de dire nous conduit à un *théorème* important.

Théorème : *Si l'on a deux courbes* A *et* B *tangentes l'une à l'autre en un point* m; *si l'on prend un point* o *hors de ces courbes et que l'on mène par ce point* o *la droite* om *et une droite* on *perpendiculaire à* om; *considérant* om *comme axe des* y *et* on *comme axe des* x, *on pourra transformer les courbes* A *et* B *en deux autres courbes* A, *et* B, *en regardant le point* o *comme pôle ou centre commun d'une suite de cercles ayant pour rayons les ordonnées* y *des courbes* A *et* B, *et enroulant sur chaque cercle l'abscisse* x *correspondante de ces courbes* A *et* B, *et les courbes* A, *et* B, *seront tangentes l'une à l'autre au point* m, *transformé du point* m.

Nous désignerons ce mode de transformation par le nom de *transformation polaire*; ainsi, par ce mode, nous pourrons transformer une courbe A, à coordonnées rectangulaires, en une courbe A, à coordonnées polaires; tout comme nous avons transformé la droite T (*fig.* 32) en une spirale hyperbolique $\varphi$, et *vice versâ*. Nous ferons une application de ce théorème lorsque nous examinerons les propriétés dont jouit *la spirale d'Archimède*.

VIII. *Étant donnés deux points et une droite, construire la spirale hyperbolique ayant*

*l'un de ces points pour asymptote et passant par l'autre point, et ayant la droite pour tangente.*

On se donne (*fig.* 33) les deux points *o* et *f* et la droite T; on demande de construire la spirale φ ayant le point *o* pour point asymptote et passant par le point *f* et tangente à la droite T.

Du point *o* comme centre et avec *of* comme rayon, on décrira le cercle D.

On décrira la développante circulaire δ ayant son origine en *f*; la courbe δ coupera la droite T en un point *k*; par le point *k* on mènera une tangente au cercle D, dont le point de contact sera en *p* sur ce cercle C; on mènera le rayon *op* qui, prolongé, coupera la droite T en *d* et la spirale φ demandée sera tangente en *d* à la droite T.

On pourra se procurer autant de points que l'on voudra de la spirale φ au moyen de ce qui a été dit art. VII.

Remarquons que du point *k* on peut mener deux tangentes au cercle D : l'une *kp* et l'autre *kp*,, et que dès lors il semblerait que l'on peut construire deux spirales résolvant le problème proposé; mais on ne peut employer cette tangente *kp*,, puisqu'elle ne serait pas normale à la courbe δ.

Mais remarquons que la développante du cercle D est composée de deux branches δ et δ′ et que la branche δ′ coupera la droite T en un point *k′* d'où l'on pourra aussi mener la tangente *k′p′* au cercle D, *k′p′* étant normale à la branche δ′, en sorte que le problème proposé paraît, à la première vue, n'avoir que deux solutions; mais il en a réellement un nombre infini; et en effet : la développante (δ, δ′), faisant autour du cercle D un nombre infini de révolutions, la droite T la coupera en un nombre infini de points, et de chacun d'eux on pourra mener une tangente au cercle D, et chacune de ces tangentes conduira à une spirale hyperbolique résolvant le problème proposé.

IX. *Étant donnés trois points, construire la spirale hyperbolique passant par deux de ces points et ayant le troisième pour point asymptote.*

On donne (*fig.* 34) les trois points *o*, *f* et *d* et l'on prend le point *o*, pour point asymptote.

Du point *o* comme centre et avec *of* pour rayon, on décrit le cercle C.

On trace la développante δ du cercle C ayant pour origine ou point de rebroussement le point *f*.

On joint le point *o* et le point *d* par une droite coupant le cercle C au point *p*.

En *p* on mène la tangente au cercle C, cette tangente coupe la développante δ au point *k*; on joint les points *k* et *d* par une droite, et cette droite *kd* sera tangente en *d* à la spirale demandée.

On pourra ensuite construire autant de points que l'on voudra de la spirale demandée $\varphi$ en employant la construction indiquée art. VII.

J'insiste sur la remarque suivante :

Les trois courbes C, $\delta$ et $\varphi$ qui passent par le même point $f$ jouissent de cette propriété, savoir : que si d'un point $k$ quelconque de la développante $\delta$, on mène les tangentes $kp$ au cercle C et $kd$ à la spirale hyperbolique $\varphi$, les deux points de contact $p$ et $d$ et le point asymptote $o$ sont en ligne droite.

X. *Par un point extérieur, construire la tangente à la spirale hyperbolique.*

Soient donnés (*fig.* 35) la spirale $\varphi$ et son point asymptote $o$ et un point $k$ par lequel on veut mener une tangente à cette spirale.

Du point $o$ comme centre avec un rayon arbitraire $of$, on décrira le cercle D coupant la spirale $\varphi$ en $f$. On tracera la développante $\delta$ du cercle D et ayant le point $f$ pour origine ou point de rebroussement.

Nous savons que si l'on fait passer par le point $o$ une verticale $z$ et que l'on prenne sur cette verticale un point $s$, le cône qui aura son sommet en $s$ et pour base la spirale $\varphi$, sera coupé par le cylindre vertical ayant le cercle D pour section droite suivant une hélice H ayant pour origine, sur le cercle D, le point $f$ ; en sorte que l'héliçoïde développable $\Sigma$ qui aura l'hélice H pour arête de rebroussement, aura pour trace sur le plan horizontal la développante $\delta$.

Cela posé :

Si nous joignons le point $k$ et le point $s$ par une droite, il faudra mener par cette droite $ks$ un plan tangent au cône, et ce plan aura pour trace sur le plan horizontal la tangente demandée.

Or, pour mener par la droite $ks$ un plan tangent au cône, il faudra chercher le point en lequel la droite $ks$ perce la surface héliçoïde $\Sigma$, et par ce point mener à l'hélice H la tangente $\theta$ et le plan déterminé par les droites $ks$ et $\theta$ sera le plan tangent demandé, et le problème sera résolu.

On voit donc que le problème proposé exige la solution de ce nouveau problème : *Trouver le point en lequel une droite perce une surface héliçoïde développable.*

La solution de ce problème n'est pas difficile.

Et en effet :

Désignons par $g$ le point en lequel la droite $ks$ ou L perce la surface héliçoïde $\Sigma$ ; la droite $\theta$ passant par le point $g$ en tournant autour de l'axe $z$ et restant toujours tangente à l'hélice H, entraînera la droite $ks$ ou L, et cette droite $ks$ ou L en son mouvement tournera autour de l'axe $z$, chacun de ses points décrivant des angles égaux à ceux que décrit chacun des points de la droite $\theta$.

Et le point $g$ décrira sur la surface $\Sigma$ une hélice H′ qui aura le même *pas* que l'hélice H.

La droite $ks$ ou L décrira donc une surface hélicoïde gauche $\Sigma'$.

Or : la surface $\Sigma'$ doit être considérée comme engendrée par le mouvement de rotation de la droite L s'appuyant sur l'axe $z$, sur l'hélice H′, et faisant un angle constant avec l'axe $z$.

Et l'on sait que cette surface $\Sigma'$ est coupée par le plan horizontal, ou, en d'autres termes, par tout plan perpendiculaire à l'axe $z$ suivant une *spirale d'Archimède.*

Par conséquent, si l'on construit la spirale d'Archimède $\xi$ passant par le point $k$ donné et ayant le point $o$ pour origine, cette spirale $\xi$ coupera la développante $\delta$ en un point $q$, et ce point $q$ sera sur le plan horizontal l'origine de l'hélice H′ suivant laquelle les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ se coupent.

Cette hélice H′ se projettera suivant un cercle D décrit du point $o$ comme centre et avec $oq$ pour rayon.

Et le point $r$, en lequel la droite $ok$ sera coupée par le cercle D, sera la projection du point $g$, en lequel se coupent et la droite de l'espace $ks$ ou L et l'hélice de l'espace H′.

Si donc on mène du point $r$ la droite $rp$ tangente au cercle D, ou $H^h$ projection de l'hélice H, on aura en $rp$ ou $\theta^h$ la projection de la droite $\theta$ de l'espace.

Par conséquent, la droite $opd$ ou $G^h$ sera la projection de la génératrice G du cône, suivant laquelle le plan T, déterminé par les droites $\theta$ et L, est tangent à ce cône ; et dès lors la droite $kd$ ou $H^t$ sera la trace horizontale de ce plan, et par suite la tangente demandée à la courbe spirale $\varphi$.

D'après ce qui précède, on voit que la solution du problème dépend entièrement du tracé de la spirale d'Archimède $\xi$.

Pour tracer cette courbe $\xi$, il faudra connaître le rapport qui existe entre l'angle $\omega$ et le rayon vecteur $\rho$.

Or, d'après ce qui a été dit, nous savons que ce rapport est le même que celui qui existe entre la circonférence D et le *pas* de l'hélice H.

Ainsi, il faudra connaître le *pas* de l'hélice H.

Or, c'est ce que nous avons appris à faire, art. VI (*fig.* 31)

## § III.

### *De la spirale hyperbolique conique.*

Si l'on trace sur un plan une spirale hyperbolique et que l'on enroule ce plan sur un cône de révolution, en ayant soin de placer le point asymptote de la courbe

plane au sommet du cône, on obtiendra une courbe à double courbure à laquelle on doit donner le nom de *spirale hyperbolique conique*.

Il est évident que cette spirale à double courbure aura le sommet du cône pour point asymptote et se projettera sur tout plan perpendiculaire à l'axe de ce cône, suivant une *spirale hyperbolique* ayant le point en lequel l'axe est coupé par son plan pour point *asymptote*.

Nous pouvons donc étudier certaines propriétés de la courbe à double courbure au moyen des propriétés connues de sa projection, et *vice versâ*.

Si nous n'avons enroulé sur la nappe inférieure du cône que l'une des deux branches dont se compose la spirale plane, nous voyons que toute courbe à double courbure pouvant être considérée comme parcourue par un point mobile, lorsque ce point, en tournant dans le même sens sur la nappe inférieure du cône, aura décrit la branche $\psi$ de la courbe, il tendra, en s'approchant indéfiniment du sommet du cône, à passer sur la nappe supérieure de ce cône, et que dès lors c'est la seconde branche de la spirale plane qui devra être enroulée sur cette nappe supérieure, pour donner la seconde branche $\psi'$ de la courbe à double courbure.

Cherchons le *lieu* des pieds des tangentes à la spirale conique sur le plan Q qui, passant par le sommet $s$ du cône, est perpendiculaire à l'axe de ce cône.

Je dis que ce lieu est un cercle ayant le point $s$ pour centre.

Et en effet :

Imaginons (*fig.* 36) le cône de révolution B ayant pour axe la droite $z$, et prenons le plan Q passant par le sommet $s$ de ce cône et perpendiculaire à l'axe $z$, pour plan horizontal de projection.

La courbe $\psi$ tracée sur le cône B se projettera suivant la spirale hyperbolique $\psi^h$.

Un point $m$ de $\psi$ se projettera en $m^h$, et la génératrice G du cône B, laquelle passe par le point $m$, se projettera suivant $G^h$. La tangente $\theta$ en $m$ à la courbe $\psi$ se projettera suivant $\theta^h$ tangente en $m^h$ à $\psi^h$.

Cela posé :

Le plan T tangent au cône B suivant la génératrice G et contenant la tangente $\theta$ à la courbe $\psi$ sera perpendiculaire au plan passant par l'axe $z$ et la génératrice G, ou, en d'autres termes, sera perpendiculaire au plan projetant la droite G ; par conséquent la trace $H^T$ de ce plan T sur le plan Q sera perpendiculaire à $G^h$ ; dès lors le triangle $m^hsq$ sera rectangle en $s$ ; la droite $sq$ sera donc la sous-tangente de la courbe $\psi^h$. Or, pour la spirale hyperbolique plane la sous-tangente est constante ;

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *La surface développable Σ, qui a pour arête de rebroussement une spirale hyperbolique conique ψ, est coupée par un plan Q passant par le sommet du cône de révolution (sur lequel la courbe ψ est tracée) et perpendiculaire à l'axe de ce cône suivant un cercle ayant pour centre le sommet du cône, et pour rayon la sous-tangente de la spirale hyperbolique plane, projection de la courbe ψ sur le plan Q.*

Ce théorème nous permet de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME 1. *Construire en un point m de la spirale hyperbolique conique ψ, le plan osculateur de cette courbe à double courbure.*

Le plan osculateur d'une courbe à double courbure est tangent à la surface développable formée par les tangentes de cette courbe, par conséquent le plan osculateur demandé sera le plan tangent suivant la droite θ à la surface qui a la courbe ψ pour arête de rebroussement (*fig.* 36); ce plan aura donc pour trace sur le plan Q une droite L tangente en $q$ au cercle D trace de la surface développable sur ce plan Q.

La droite L étant perpendiculaire à la droite $sq$ sera perpendiculaire au plan vertical U passant par l'axe $z$ et le rayon $sq$; et dès lors le plan O osculateur en $m$ à la courbe ψ sera perpendiculaire à ce plan U; le triangle $msq$ est rectangle en $s$, nous pourrons donc donner à la droite $sq$ le nom de sous-tangente de la courbe à double courbure ψ.

Et dès lors nous pourrons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *Le plan osculateur O d'une spirale hyperbolique conique ψ est perpendiculaire au plan passant par la sous-tangente de cette courbe et par l'axe du cône sur laquelle cette courbe est tracée.*

Ce qui précède nous permet de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME 2. *Construire le rayon de courbure en un point d'une spirale hyperbolique conique.*

Pour le point $m^h$ projection du point $m$, on construira la tangente $\theta^h$ à la spirale $\psi^h$ projection de la courbe à double courbure ψ; on construira le cercle D lieu des pieds des sous-tangentes de la courbe $\psi^h$, et en unissant le point $q$, en lequel $\theta^h$ coupe le cercle D, avec le point $m$ on aura la tangente θ en $m$ à ψ; puis, en $q$, on mènera la tangente L au cercle D et le plan O déterminé par les droites L et θ coupera le cône B sur lequel ψ est tracée suivant une section conique 6 qui sera osculatrice en $m$ à la courbe ψ.

Le rayon de courbure de la courbe 6 sera le rayon de courbure demandé.

Or : 1° On sait construire la tangente $\theta^h$ à une spirale $\psi^h$ donnée par son

tracé (en un mot par une suite de points) et dont on connaît le point asymptote. *Voir* art. VI (*fig.* 31);

2° On sait construire la sous-tangente lorsque la tangente est connue;

3° On sait construire le rayon de courbure en un point d'une section conique située sur un cône de révolution.

Ainsi, l'on peut dire que le problème proposé est complétement résolu.

La solution du problème précédent nous conduit à celle du problème suivant:

PROBLÈME 3. *Construire le rayon de courbure en un point d'une spirale hyperbolique plane.*

On peut résoudre ce problème de deux manières différentes:

*Premier mode de solution.* Le plan O (*fig.* 36) osculateur en $m$ à la courbe $\psi$ (cette courbe $\psi$ étant une spirale hyperbolique conique) est perpendiculaire au plan $ssq$, et le plan $zsq$ est perpendiculaire au plan $zsm$; dès lors le plan O coupera le plan $zsq$, perpendiculaire au plan méridien du cône passant par le point $m$ de la courbe $\psi$, suivant une droite Y qui sera un des axes de la section conique $6$, section du cône par le plan O.

Cette section conique $6$ aura son autre axe X horizontal, car la droite Y sera une ligne de plus grande pente du plan O.

Il sera dès lors facile par les procédés graphiques de la géométrie descriptive de déterminer (en d'autres termes, de construire) la longueur des axes de la courbe $6$ et de fixer la position du centre de cette courbe $6$, car c'est le sujet de l'une des premières épures que l'on exécute toujours dans *les cours de géométrie descriptive.*

La courbe $6$ se projettera sur le plan Q suivant une courbe $6^h$ ayant pour centre la projection du centre de la courbe $6$, et ses axes seront, l'un égal à celui de $6$ dirigé suivant la droite horizontale X, et l'autre sera la projection de celui qui est dirigé suivant la droite Y. Or : la droite Y se projettera sur le plan Q suivant la droite $sq$..

Il est facile de construire le rayon de courbure en un point $m^h$ d'une section conique $6^h$ dont on connaît le centre et les axes, par conséquent l'on saura construire le rayon de courbure en $m^h$ de la courbe $\psi^h$, puisque $\psi^h$ et $6^h$ sont osculatrices en $m^h$, $\psi$ et $6$ l'étant en $m$.

*Deuxième mode de solution.* On propose de construire le rayon de courbure de la courbe $\varphi$ pour le point $d$; la courbe $\varphi$ étant une spirale hyperbolique plane.

Si l'on construit (*fig.* 27) au cône hélicoïdal qui a pour sommet le point $s$ et pour directrice l'hélice cylindrique et circulaire H, un cône O du second degré

osculateur le long de la génératrice $sd$, ce cône O sera coupé par le plan de la courbe $\varphi$ suivant une section conique $\gamma$ osculatrice en $d$ à la courbe $\varphi$.

Le problème sera donc résolu si l'on parvient à construire le cône O.

Or : si en $m$ de l'hélice H on construit le plan osculateur I, et si l'on trace dans ce plan I le cercle $6$ osculateur en $m$ à l'hélice H, le cône qui aura, pour sommet le point $s$ et pour directrice le cercle $6$, sera osculateur au cône hélicoïdal tout le long de la génératrice $sd$.

On peut exécuter *graphiquement* toutes les constructions que nous venons de décrire; en un mot, on peut faire l'*épure* de toutes ces constructions, et elles ne peuvent embarrasser, car on les exécute presque toutes dans les cours de *géométrie descriptive*.

## § IV.

Étant donné un cylindre de révolution A, et sur ce cylindre une hélice H, on pourra prendre le sommet $s$ du cône qui a pour directrice l'hélice H tracée sur le cylindre A tout autre part que sur l'axe $z$ de ce cylindre A.

1° Si l'on prend le sommet $s$ du cône hors de l'axe $z$, mais en dedans du cylindre, on aura un cône hélicoïdal qui, coupé par un plan Q perpendiculaire à l'axe $z$, donnera une spirale $\psi$ ayant toujours une *droite asymptote* et un *point asymptote*. La droite asymptote sera donnée par l'intersection du plan Q et du plan tangent au cône *hélicoïdal* suivant sa génératrice parallèle au plan Q. Le point asymptote sera l'intersection du plan Q et de la droite qui, menée par le sommet $s$, sera parallèle à l'axe $z$;

2° Si l'on prend le sommet $s$ sur le cylindre A, la courbe $\psi$ repassera indéfiniment par le point en lequel la génératrice, du cylindre A, menée par le point $s$ perce le plan Q.

Et il est évident qu'en ce *point asymptote* d'un nouveau genre, toutes les spires de la courbe $\psi$ auront même tangente, laquelle ne sera autre que la tangente en ce même point au cercle section du cylindre A par le plan Q;

3° Si l'on prend le sommet $s$ hors du cylindre A, la courbe $\psi$ sera composée de deux courbes serpentantes s'approchant indéfiniment (sans pouvoir l'atteindre) du point en lequel le plan Q coupe la droite menée par le point $s$ parallèlement à l'axe $z$ du cylindre A. La courbe $\psi$ aura encore, dans ce cas, un *point asymptote*; et elle aura encore une *droite asymptote* qui sera déterminée comme dans les cas précédents.

Dans l'un et l'autre de ces trois cas, la courbe $\psi$ sera composée de deux branches symétriques.

Et dans le troisième cas, les deux branches de la courbe $\psi$ viendront toucher par leurs diverses spires les deux droites traces sur le plan Q des plans verticaux tangents au cylindre A et passant par le point *s*.

On pourrait couper le cône hélicoïdal par un plan dirigé d'une manière arbitraire par rapport à l'axe du cylindre de révolution sur lequel est tracée l'hélice directrice du cône, et dès lors on voit que l'on peut obtenir une infinité de spirales différant entre elles par la forme et même par les propriétés géométriques.

Et ainsi, si l'on conçoit une génératrice G du cône hélicoïdal s'appuyant sur l'hélice directrice H en un point *m*, et si l'on conçoit la tangente $\theta$ en *m* à la courbe H; les deux droites G et $\theta$ détermineront un plan P; or, toutes les fois que le plan sécant Q, par rapport au cône hélicoïdal, sera parallèle à G et coupera $\theta$, on aura pour section une courbe spirale ayant une asymptote qui ne sera autre que la droite intersection des plans P et Q.

Si donc le plan Q est parallèle au plan P, la courbe de section n'aura plus d'asymptote, ou mieux son asymptote sera transportée tout entière à l'infini.

On voit donc que les sections planes du cône hélicoïdal peuvent être divisées en deux groupes :

1$^{er}$ Groupe. *Spirales* ayant un *point* asymptote et une *droite* asymptote.

2$^{e}$ Groupe. *Spirales* n'ayant qu'un *point* asymptote.

Mais il est toujours possible de mener un plan parallèle à deux droites qui se coupent, on pourra donc toujours mener un plan Q parallèle à deux génératrices G et $G_1$ du cône hélicoïdal, et dès lors la courbe de section aura deux asymptotes.

On voit donc que l'on peut obtenir des *spirales* formant un troisième groupe, savoir :

3$^{e}$ Groupe. *Spirales* ayant un *point* asymptote et deux *droites* asymptotes.

Dans le cas où le plan sécant Q est parallèle à deux génératrices du cône hélicoïdal, il coupe l'axe du cylindre de révolution A sur lequel est tracée l'hélice H; et il est évident, par réciproque, que lorsque le plan Q coupe l'axe de ce cylindre A, il ne peut être parallèle qu'à *une* ou *deux* génératrices du cône hélicoïdal.

Mais le plan Q peut être parallèle à l'axe du cylindre A, alors il est parallèle à une infinité de génératrices du cône hélicoïdal, toutes situées dans le plan méridien M (du cylindre A), mené parallèlement à ce plan sécant Q.

Dans ce cas, on obtient un quatrième groupe de spirales, savoir :

4$^{e}$ Groupe. *Spirales* pour lesquelles le *point* asymptote est à l'infini et ayant une infinité de droites asymptotes.

Nous allons donner l'équation générale qui représente toutes les spirales de ces quatre groupes.

Prenons l'axe du cylindre de révolution A pour axe des $z$, et désignons par R le rayon du cercle section droite de ce cylindre, et par $h$ le *pas* de l'hélice H tracée sur ce cylindre.

Les équations de l'hélice H en coordonnées rectangulaires seront :

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$

et

$$z = \frac{h}{2\pi} \cdot \text{arc}\,(\sin x) \qquad (2)$$

Prenons le point $s$ sommet du cône hélicoïdal dans le plan des $zx$, les coordonnées de ce point seront $x = a$, $z = b$, $y = 0$, et les équations d'une droite G passant par ce point $s$ seront :

$$z - b = m\,(x - a) \qquad (3)$$

$$y = n\,(x - a) \qquad (4)$$

Au moyen des équations (1), (3), (4), on peut obtenir les valeurs de $x$, $y$, $z$, et l'on aura :

$$y = \frac{-na \pm n\sqrt{(R^2 - a^2)\,(n^2+1)^2 + a^2}}{n^2+1} \qquad (5)$$

$$x = \frac{+\,na \pm \sqrt{(R^2 - a^2)\,(n^2+1)^2 + a^2}}{n^2+1} \qquad (6)$$

$$z = b - ma + \frac{m}{n^2+1}\left[na \pm \sqrt{(R^2 - a^2)\,(n^2+1)^2 + a^2}\right] \qquad (7)$$

Transportant les valeurs de $x$ et $z$ données par (6) et (7) dans l'équation (2), on aura une équation en $m$ et $n$, et qui sera :

$$b - ma + \frac{m}{n^2+1}\left[na \pm \sqrt{(R^2 - a^2)(n^2+1)^2 + a^2}\right] = \frac{h}{2\pi}\,\text{arc}\left(\sin\left[\frac{na \pm \sqrt{(R^2 - a^2)(n^2+1)^2 + a^2}}{n^2+1}\right]\right) \quad (8)$$

Et si l'on remplace $m$ et $n$ dans l'équation (8) par les valeurs

$$m = \frac{z - b}{x - a} \quad \text{et} \quad n = \frac{y}{x - a}$$

tirées des équations (3) et (4), on aura l'équation du cône hélicoïdal :

$$\frac{b(x-a)-a(z-b)}{(x-a)}+\frac{(z-b)(x-a)}{y^2+(x-a)^2}\left[\frac{ay}{(x-a)}\pm\frac{1}{(x-a)^2}\sqrt{(R^2-a^2)(y^2+(x-a)^2)+a^2(x-a)^2}\right]=$$

$$=\frac{h}{2\pi}\,\text{arc}\,.\sin\left[\frac{a(x-a).y\pm(x-a)^2\sqrt{(R^2-a^2)(y^2+(x-a)^2)+a^2(x-a)^2}}{y^2+(x-a)^2}\right] \quad (9)$$

Il suffira de remplacer dans l'équation (9) $x$, $y$, $z$ par leurs valeurs connues :

$$x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi\cos\theta+p$$
$$y=x'\sin\varphi-y'\cos\varphi\cos\theta+q$$
$$z=z'\sin\theta+r$$

Pour avoir l'équation de la section faite dans le cône hélicoïdal, par un plan P passant par le point de l'espace ayant pour coordonnées $x=p$, $y=q$, $z=r$, et dont la trace sur le plan des $xy$ fait un angle $\varphi$ avec l'axe des $x$, ce plan P faisant d'ailleurs un angle $\theta$ avec le plan des $xy$.

Et l'on pourra, par les méthodes employées en *analyse*, trouver les propriétés de ces courbes, les tracer, etc.

Je ne pousse pas plus loin ces recherches, parce qu'étant purement *analytiques*, elles sortent du cadre que je me suis tracé en écrivant ce chapitre :

Nous terminerons cependant ce chapitre par la remarque suivante.

Lorsque l'on coupera le cône hélicoïdal par un plan P perpendiculaire à l'axe $z$ du cylindre de révolution sur lequel est tracée l'hélice directrice H, la courbe C que l'on obtiendra n'aura les pieds de ses sous-tangentes situés sur un cercle $\delta$ ayant pour centre le point asymptote de la spirale, qu'autant que le sommet $s$ du cône hélicoïdal sera placé sur l'axe $z$; la courbe $\delta$ sera une courbe particulière, et qui variera de forme suivant la position que le sommet $s$ du cône occupera dans l'espace par rapport à l'axe $z$.

Mais si l'on considère la courbe-spirale C comme la section droite d'un cylindre U, ayant ses génératrices parallèles à l'axe $z$, et si l'on considère le point $s$ comme le sommet d'un nouveau cône de révolution V ayant son axe parallèle à l'axe $z$, les deux surfaces V et U se couperont suivant une courbe à double courbure, qui sera une spirale conique $C_1$ ayant le point $s$ pour *point asymptote*; et cette courbe $C_1$ jouira évidemment de la propriété suivante :

La surface développable $\Sigma$, formée par les tangentes à la courbe $C_1$, sera coupée par un plan Q passant par le sommet $s$, et perpendiculaire à l'axe $z$ suivant une courbe $\delta_1$.

Or : Il est évident que cette courbe $\delta_1$ sera identique à la courbe $\delta$, *lieu* des pieds des sous-tangentes de la courbe C. Ainsi, la courbe $\delta$ sera sur le plan de la courbe C la projection orthogonale de la courbe $\delta_1$.

Et cela aura lieu, quel que soit le demi-angle au sommet du cône V.

En sorte que si l'on a une suite de cônes concentriques et de révolution V, V′, V″, ayant dès lors même axe et même sommet, tous ces cônes seront coupés par le cylindre U suivant des courbes $C_1$, $C_1'$, $C_1''$, qui seront les arêtes de rebroussement de surfaces développables Σ, Σ′, Σ″, lesquelles seront coupées par le plan Q suivant une courbe unique $\delta_1$; ou, en d'autres termes, les surfaces Σ, Σ′, Σ″, s'entrecouperont suivant une courbe $\delta_1$, qui sera plane, et dont le plan passant par le sommet des cônes concentriques sera perpendiculaire à l'axe de ces cônes.

## § V.

### *Des spirales ayant une courbe asymptote.*

On peut concevoir des courbes-spirales qui, au lieu d'avoir un point asymptote, ont une courbe asymptote; et ainsi des *spirales* telles qu'elles tournent sans cesse autour d'une courbe fermée sans jamais pouvoir l'atteindre.

Imaginons un cylindre vertical de révolution ayant pour base un cercle C et pour axe une droite *z*.

Traçons sur ce cylindre une hélice H, et concevons une sphère S d'un rayon plus petit que le rayon du cercle C et ayant son centre situé sur l'axe *z*.

Faisons mouvoir une droite G sur l'axe *z*, sur l'hélice H, et tangentiellement à la sphère S.

Nous engendrerons une surface gauche qui sera coupée par un plan Q perpendiculaire à l'axe *z* suivant une courbe φ.

Or, il est évident qu'à mesure que le point *m* de l'hélice H, par lequel la droite G passe, s'éloignera de la sphère S, soit en dessus, soit en dessous du centre de cette sphère, l'angle que la droite G fait avec l'axe *z* diminuera, et que dès lors le rayon vecteur de la courbe φ qui passe toujours par le pied de l'axe *z* sur le plan Q, diminuera.

Mais il est évident que ce rayon vecteur ne pourra jamais devenir plus petit que le rayon de la sphère S, car lorsque le point *m* sera situé à l'infini sur l'hélice H, la droite G sera verticale et toujours tangente à la sphère S.

Ainsi, pour cette courbe φ, le cercle décrit du pied de l'axe *z*, sur le plan Q, comme centre et avec un rayon égal à celui de la sphère, remplacera le *point*

*asymptote* de la spirale hyperbolique, et sera un *cercle asymptote* pour la courbe $\varsigma$ que nous examinons.

### 3° DE LA SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

On a donné à la spirale dont l'équation polaire est

$$\rho = a\omega$$

$\rho$ désignant le rayon vecteur et $\omega$ l'angle que le rayon vecteur fait avec une droite fixe, le nom de *spirale d'Archimède*, parce que ce savant géomètre est le premier qui en ait fait connaître les propriétés. Aussi, est-ce avec raison qu'on dit qu'il en est *l'inventeur*.

Si les anciens géomètres avaient connu la propriété caractéristique du plan tangent en un point d'une surface courbe, savoir : *que le plan tangent contient les tangentes à toutes les courbes qui, tracées sur la surface, se croisent au point de contact*, très-certainement, ils nous auraient laissé des travaux fort remarquables et fort utiles sur la géométrie à trois dimensions.

Et lorsqu'on lit l'admirable traité d'Archimède sur la spirale, on est tout ému, en voyant que ce célèbre et savant géomètre n'a pas deviné l'importance du théorème relatif au plan tangent; on regrette qu'il n'ait pas vu, qu'en connaissant le plan tangent en un point d'une surface, la solution du problème de la tangente à sa spirale devenait excessivement simple. Et c'est peut-être ce problème de la tangente à la spirale d'Archimède qui, entre tous ceux résolus par les anciens, était le plus près de conduire à la découverte du plan tangent; car Archimède a très-bien vu que sa spirale était la projection orthogonale de la courbe-intersection de deux surfaces, l'une étant un cône de révolution et l'autre un hélicoïde gauche (surface du filet de vis carrée).

Je me propose de rechercher les propriétés de la *spirale d'Archimède* (qui, depuis le géomètre de Syracuse, ont été démontrées au moyen de l'*analyse*), en ne me servant que des méthodes de la *géométrie descriptive*.

#### § Ier.

Il est évident que : si l'on trace sur un plan P une spirale d'Archimède $\gamma$, et qu'on enroule ce plan P sur un cône de révolution B, de manière que le pôle ou origine de la courbe $\gamma$ soit placée au sommet $s$ du cône B, la courbe $\gamma$ don-

nera une courbe à double courbure $\gamma$, qui sera une spirale d'Archimède conique.

Et si l'on mène un plan Q perpendiculaire à l'axe Y du cône B, cette spirale conique $\gamma$ se projettera orthogonalement sur ce plan Q, suivant une courbe $\gamma^h$ qui sera une spirale plane d'Archimède.

Ainsi, si l'on connaissait la tangente $\theta$ à la courbe de l'espace $\gamma$, la projection $\theta^h$ de la droite $\theta$ serait tangente à $\gamma^h$.

Or, la courbe $\gamma$ peut être considérée comme une courbe parcourue par un point qui, se mouvant sur la surface du cône B, décrirait des angles égaux autour de l'axe Y en même temps qu'il se rapprocherait du sommet $s$ de quantités aussi égales :

Si donc l'on considère trois génératrices G, $G_1$, $G_2$ du cône B, ces génératrices faisant entre elles des angles égaux, on aura dès lors $\widehat{G, G_1} = \widehat{G_1, G_2}$; et si l'on considère trois points de la courbe $\gamma$, savoir : $m$ sur G, $m_1$ sur $G_1$, $m_2$ sur $G_2$, on voit que les distances $mm^h$, $m_1m_1^h$, $m_2m_2^h$ de ces trois points au plan Q seront telles que l'on aura :

$$m_1m_1^h - mm^h = m_2m_2^h - m_1m_1^h$$

Si donc l'on conçoit trois droites K, $K_1$, $K_2$ horizontales et s'appuyant sur l'axe Y, et passant respectivement par les points $m$, $m_1$, $m_2$, ces droites seront les positions d'une droite mobile se mouvant dans l'espace en s'appuyant sur l'axe Y et sur la courbe $\gamma$ et restant parallèle au plan Q ou perpendiculaire à l'axe Y; et comme l'on a, par hypothèse, $\widehat{G, G_1} = \widehat{G_1, G_2}$, on aura évidemment $\widehat{K, K_1} = \widehat{K_1, K_2}$.

Et comme l'on a :

$$m_1m_1^h - mm^h = m_2m_2^h - m_1m_1^h$$

on voit que la différence des distances des droites K et $K_1$ au plan Q, sera égale à la différence des distances des droites $K_1$ et $K_2$ à ce même plan Q.

La droite K peut donc être considérée comme engendrant une hélicoïde gauche $\Sigma$ (surface de filet de vis carré) (*).

Dès lors, pour construire la tangente $\theta$ au point $m$ de $\gamma$, il faudra construire

(*) Les mêmes raisonnements auront lieu si l'on suppose que les droites K, K', K'', au lieu de faire un angle droit avec l'axe Y, font avec cet axe Y un angle constant et aigu $\alpha$.

Alors, la surface hélicoïde gauche $\Sigma$ engendrée par les droites K sera la surface du *filet de vis triangulaire*. On peut donc considérer la *spirale conique* d'Archimède comme provenant de l'intersection d'un cône de révolution et de l'une ou l'autre des deux surfaces hélicoïdes, savoir : *filet de vis carré* ou *filet de vis triangulaire*.

les plans tangents en $m$, savoir : T au cône B et Θ à l'hélicoïde gauche Σ, et l'intersection de ces deux plans sera la droite θ demandée.

Nous pouvons donc résoudre le problème suivant :

PROBLÈME 1. *Construire la tangente en un point de la spirale conique d'Archimède.*

Soit donnée (*fig.* 37) une spirale conique $\gamma$; et supposons que les génératrices K qui s'appuient sur l'axe Y et sur $\gamma$, coupent le cylindre vertical ayant le cercle C pour base, (ce cercle C étant aussi la base du cône B) suivant une hélice H. Désignons par $h$, le pas de l'hélice H; et par R, le rayon du cercle C.

On propose de construire au point $m$ de la courbe spirale $\gamma$, la tangente $\theta$ à cette courbe.

Par le point $m$, nous mènerons la génératrice G du cône B et la génératrice K de l'hélicoïde Σ, cette dernière droite coupera l'hélice H au point $p$.

Nous mènerons en $p^h$ une tangente $H^v$ au cercle C, cette droite sera la trace horizontale du plan T tangent au cône B et le long de la génératrice droite G.

Cela fait :

Pour construire en $m$ le plan tangent Θ à la surface Σ, nous considérerons le paraboloïde Δ tangent à Σ tout le long de K; ce paraboloïde Δ sera engendré par la droite K, se mouvant horizontalement en s'appuyant sur l'axe Y et sur la tangente $t$ en $p$ à l'hélice H.

Il faudra donc construire la tangente $t$, laquelle percera le plan horizontal en $r$; et dès lors, la droite $K_0$ qui unit les points $r$ et $s^h$, ce point $s^h$ étant le centre du cercle C ou la trace horizontale de l'axe Y, sera la trace horizontale du paraboloïde Δ.

Le paraboloïde Δ peut être considéré comme engendré par la droite $t$, se mouvant sur K et $K_0$, et parallèlement au plan vertical parallèle à $t$ et à Y;

Dès lors, la génératrice $t_0$ (génératrice du second système du paraboloïde Δ) et passant par le point $m$, aura pour projection horizontale la droite $t_0^h$, menée par $m^h$ parallèlement à $H^v$ ou $t^h$; et le point $x$, intersection de $K_0$ et de $t_0$, sera la trace horizontale de $t_0$.

Si donc on mène par $x$ la droite $H^\Theta$ parallèle à $K^h$, on aura la trace horizontale du plan Θ passant par les droites K et $t_0$, et ce plan Θ sera tangent en $m$ à la surface Σ.

Si donc on unit le point $z$ (intersection de $H^v$ et de $H^\Theta$) avec le point $m$, on aura la tangente θ, demandée.

Et en unissant les points $z$ et $m^h$, on aura $\theta^h$ ou la tangente au point $m^h$ de la spirale d'Archimède $\gamma^h$, projection horizontale de la spirale à double courbure $\gamma$.

Remarquons que les trois courbes $\gamma$, $\gamma^h$ et H se couperont toujours en un mê-

me point $a$ situé sur le cercle C, et que dès lors, le point $z$ peut se déterminer de suite, puisque l'on a : $rp^h$ égal à l'arc rectifié $ap^h$ du cercle C.

PROBLÈME 2. *Étant donnée une spirale plane d'Archimède et son pôle ou origine, construire la tangente en un de ses points.*

Soit donnée (*fig.* 38) la spirale plane $\gamma^h$, son pôle $s^h$, et proposons-nous de construire, en un de ses points $m^h$, sa tangente $\theta^h$.

En vertu de ce qui précède, on fera la construction suivante :

1° Du point $s^h$, comme centre et avec un rayon arbitraire, on tracera le cercle C, coupant la spirale en un point $a$.

2° On mènera le rayon vecteur $s^h m^h$ qui, prolongé, coupera le cercle C au point $p^h$.

3° On mènera la droite $H^v$ tangente en $p^h$ au cercle C, et déroulant l'arc $ap^h$, au moyen de la développante $\delta$, qui a son origine en $a$, on aura le point $r$ situé sur $H^v$.

4° On joindra les points $r$ et $s^h$ par la droite $K_0$.

5° On mènera par le point $m^h$ la droite $t_0^h$, parallèle à $H^v$ et coupant la droite $K_0$ au point $x$.

6° Par le point $x$, on mènera la droite $H^0$, parallèle à la droite $K^h$ ou au rayon vecteur $s^h m^h$ ; cette droite $H^0$ coupera la droite $H^v$ en un point $z$.

7° Enfin, on unira les points $z$ et $m^h$ par la droite $\theta^h$, et on aura la tangente demandée.

Ce qui précède nous conduit au théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Si l'on donne sur un plan* P *une spirale d'Archimède* $\gamma^h$, *dont l'équation soit* $\frac{\rho}{\omega} = a$ ; *si par son pôle* s *on mène une droite* y *perpendiculaire au plan* P ; *si l'on trace sur le plan* P *un cercle ayant son centre au pôle* s *et son rayon égal à* $a$ ; *si par le point* s *on mène une droite* G *faisant avec l'axe* y *un angle* $\alpha$, *et que l'on fasse tourner la droite* G *autour de* y, *on aura un cône* B *de révolution et dont le demi-angle au sommet sera égal à* $\alpha$ ; *si l'on conçoit un cylindre* A *ayant pour section droite la spirale* $\gamma^h$, *le cylindre* A *et le cône* B *se couperont suivant une spirale conique d'Archimède* $\gamma$ ; *et si l'on fait mouvoir une droite* K *parallèlement au plan* P *et s'appuyant sur l'axe* y *et sur la courbe à double courbure* $\gamma$, *on aura une hélicoïde gauche* $\Sigma$ ; CELA POSÉ : *je dis que le cylindre* A *et la surface gauche* $\Sigma$ *se couperont suivant une hélice* H *qui coupera les génératrices droites du cylindre* H *sous un angle égal à* $\alpha$.

Et en effet :

Désignant par $\rho$ le rayon vecteur $s^h m^h$ de $\gamma^h$, par $\rho_1$ le rayon vecteur homologue $sm$ de $\gamma$, on aura

$$\rho = \rho_1 \sin \alpha$$

L'équation $\frac{\rho}{\omega} = a$ pourra donc être mise sous la forme :

$$\frac{\rho_1 \sin \alpha}{\omega} = a$$

Si je désigne par $h$ la distance du point $m$ de $\gamma$ au plan P passant par le sommet $s$ du cône B, on aura : $\rho_1 \cos \alpha = h$.

On pourra donc écrire $\frac{h \text{ tang } \alpha}{a\omega}$ = constante = 1.

Et si nous supposons que le point $m$ ait parcouru sur la spirale $\gamma$ un arc tracé sur la surface entière du cône B, on pourra remplacer $\frac{h}{a\omega}$ par $\frac{h_1}{2\pi a}$ ($h_1$ étant le *pas* de l'hélice H).

Et l'on aura $\frac{h_1}{2\pi a}$. tang $\alpha = 1$ ; ce qui démontre la proposition énoncée.

Les considérations géométriques précédentes nous permettent de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2. *Dans la spirale plane d'Archimède, la sous-tangente est constante.*

Étant donnés (*fig.* 39) la spirale plane $\gamma^h$ et son pôle $s^h$, et ayant construit en un de ses points $m^h$ la tangente $\theta^h$, et supposant que toutes les constructions indiquées dans le théorème précédent subsistent sur la figure; si nous menons au point $m^h$ la droite N perpendiculaire à la tangente $\theta^h$, et si nous menons par le pôle $s^h$ la droite $s^hq$ perpendiculaire au rayon vecteur $s^hm^h$, ces deux droites N et $s^hq$ se couperont en un point $q$, et il faut démontrer que la sous-tangente $s^hq$ est constante.

Les deux triangles rectangles $sm^hq$ et $p^hzm^h$ sont semblables comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires.

On a donc :

$$sq : s^hm^h :: m^hp^h : p^hz$$

Et désignant la sous-normale par $(s.N)$, et le rayon vecteur par $\rho$, on pourra écrire :

$$(s.N) : \rho :: m^hp^h : p^hz$$

d'où

$$(s.N) = \rho . \frac{m^hp^h}{p^hz}$$

Et pour un autre point $m'^h$ de la spirale $\gamma^h$, on aura de même

$$(s.N') : \rho' :: m'^hp'^h : p'^hz'$$

d'où

$$(s.N') = \rho' . \frac{m'p'^h}{p'^h z'}$$

Il faut donc, pour que le théorème soit vrai, que l'on ait :

$$\rho . \frac{m^h p^h}{p^h z} = \rho' . \frac{m'^h p'^h}{p'^h z'} = \text{etc.} = \text{constante.}$$

Or : les deux triangles $s^h x m^h$ et $s r p^h$ sont semblables, on a donc :

$$x m^h : s^h m^h :: r p^h : s^h p^h.$$

Et comme $x m^h$ est égal à $z p^h$ par construction, on aura, en désignant $s^h p^h$ par R :

$$p^h z : \rho :: p^h r : R$$

Et pour un autre point $m'^h$ de la courbe $\gamma^h$, on aura :

$$p'^h z' : \rho' :: p'^h r' : R$$

d'où

$$\frac{\rho}{p^h z} = \frac{R}{p^h r} \quad \text{et} \quad \frac{\rho'}{p'^h z'} = \frac{R}{p'^h r'}$$

On devra donc avoir pour que le théorème énoncé soit vrai :

$$\frac{R . m^h p^h}{p^h r} = \frac{R \; m'^h p'^h}{p'^h r'}$$

ou

$$m^h p^h : p^h r :: m'^h p'^h : p'^h r' \qquad (1)$$

Or, cette proportion est exacte ; car (*fig.* 37) : 1° les deux triangles rectangles $prp$ et $p'r'p'^h$ sont semblables, puisque leurs hypoténuses $rp$ et $r'p'$ sont les tangentes à l'hélice H ; ils donnent donc la proportion

$$p p^h : p^h r :: p' p'^h : p'^h r' \qquad (2)$$

et 2° les deux triangles rectangles $m m^h p^h$ et $m' m'^h p'^h$ sont semblables, puisque leurs hypoténuses $m p^h$ et $m' p'^h$ sont sur les génératrices du cône de révolution, ils donnent donc la proportion

$$m m^h : m^h p^h :: m' m'^h : m'^h p'^h \qquad (3)$$

Or, comme $pp^h = mm^h$ et que $p'^h p''^h = m'm''^h$, puisque les droites K et K′ génératrices de l'hélicoïde gauche sont horizontales, on tire des proportions (2) et (3) la proportion suivante :

$$m^h p^h : p^h r :: m'^h p'^h : p'^h r'$$

qui n'est autre que la proportion (1) dont il fallait démontrer l'exactitude.

Ainsi, il est démontré que pour la spirale plane d'Archimède, la sous-normale est constante, ou, en d'autres termes, que les pieds des normales sont situés sur un cercle ayant pour centre le pôle ou origine de la spirale.

On peut très-facilement démontrer que si la spirale d'Archimède est telle que le rapport entre le rayon vecteur et l'angle, soit $\frac{\rho}{\omega} = a$, la sous-normale est égale à $a$.

Et en effet :

Le deux triangles (*fig.* 89) $q.s^h.m^h$ et $m^h.z.p^h$ sont semblables. On a donc :

$$sq^h : s^h m^h :: m^h p^h : zp^h$$

ou

$$(s.N) : \rho : R - \rho : xm^h$$

en désignant la sous-normale $sq^h$ par $(s.N)$,

le rayon vecteur $s^h m^h$ par $\rho$,

le rayon $s^h p^h$ du cercle C coupant la spirale au point $a$, par R.

Nous ferons remarquer que si le rayon vecteur $s^h m^h$ est plus grand que le rayon R, on aura $\rho - R$ au lieu de R.

Et de plus on doit se rappeler que par construction $xm^h = zp^h$.

Dès lors on aura :

$$(s.N) = \frac{\pm \rho (R - \rho)}{xm^h}$$

Les deux triangles $s^h.r.p^h$ et $s^h.x.m^h$ sont semblables, on a donc :

$$xm^h : s^h m^h :: zp^h : s^h p^h$$

ou (en prenant pour origine des angles $\omega$, la droite $s^h a$, $a$ étant l'origine de la développante $\partial$ qui a servi à la construction de la tangente $\theta^h$ au point $m^h$ de la spirale $\gamma^h$)

$$xm^h : \rho :: R\omega : R$$

On aura donc : $$xm^h = \rho . \omega$$

et par suite

$$(s.N) = \frac{\pm(R-\rho)}{\omega}$$

Or, en prenant la droite $s^h a$ pour origine des angles $\omega$, l'équation de la spirale sera :

$$\rho = a.\omega + R$$

puisque pour $\omega = o$, ond oit avoir $\rho = R$.

D'où

$$\omega = \frac{\rho - R}{a}$$

On a donc $$(s.N) = a$$

ce qu'il fallait démontrer.

La tangente trigonométrique de l'angle $rs^h p^h$, en désignant cet angle par $\varepsilon_1$, aura pour expression :

$$\text{tang}\,\varepsilon_1 = \frac{x^h m^h}{s^h m^h} = \frac{\rho - R}{a}$$

La tangente trigonométrique de l'angle $zm^h p^h$, en désignant cet angle par $\varepsilon$, aura pour expression :

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{zm^h}{m^h p^h} = \frac{xm^h}{m^h p^h} = \frac{\rho}{a}$$

On aura donc :

$$\text{tang}\,\varepsilon_1 : \text{tang}\,\varepsilon :: \rho - R : \rho$$

ou

$$\text{tang}\,\varepsilon_1 : \text{tang}\,\varepsilon :: m^h p^h : s^h m^h$$

L'angle $\varepsilon$ a pour limite *zéro*; car la tangente trigonométrique, ayant pour expression $\frac{\rho}{a}$, devient nulle, lorsque $\rho = 0$.

Ainsi, pour le pôle, la tangente à la spirale se confond avec le rayon vecteur.

La tangente trigonométrique de l'angle $\varepsilon_1$ a pour limite $\frac{R}{a}$; ainsi, au pôle, la tangente trigonométrique de l'angle $\varepsilon_1$ a pour valeur $\frac{R}{a}$; mais le rayon R est arbitraire; et dès lors, lorsque R sera égal à $a$, on aura tang $\varepsilon_1 = 1$; lorsque R sera plus grand que $a$ ou la sous-normale, on aura tang $\varepsilon_1 > 1$, et si l'on a $R < a$, on aura tang $\varepsilon_1 < 1$.

Mais si l'on suppose que $R = 2\rho$, $\rho$ étant le rayon vecteur d'un point $m^h$ (*fig.* 39), alors on aura : $\tang \varepsilon = \tang \varepsilon_1$; puisque l'on a :

$$\tang \varepsilon : \tang \varepsilon_1 :: R - \rho : \rho$$

Ceci nous permet de simplifier la construction de la tangente en un point de la spirale d'Archimède.

Car si l'on a (*fig.* 43) une spirale d'Archimède $\gamma^h$, dont on connaît le pôle $s^h$, et que l'on veuille construire la tangente en un de ses points $m^h$; il suffira de tracer le cercle C du point $s^h$, comme centre et avec un rayon égal au double du rayon vecteur $s^hm^h$, et de prendre $rp^h =$ arc $ap^h$.

Et la tangente $\theta^h$ au point $m^h$ sera parallèle à la droite $s^hr$.

Nous venons, dans ce qui précède, de démontrer que, pour la spirale d'Archimède, la sous-normale est constante. Et cela, en considérant le point $m^h$ de la spirale plane comme la projection d'un point $m$ de la spirale conique (*fig.* 37); et nous avons supposé que le plan horizontal de projection ne passait pas par le point $m$.

Mais, en faisant passer le plan horizontal de projection par le point $m$ (point qui dès lors appartiendra à la fois à la spirale plane et à la spirale conique), la démonstration du *théorème* est plus simple.

Et en effet :

Soit donnée (*fig.* 39 *bis*), sur le plan horizontal, une spirale d'Archimède E, ayant le point $o$ pour origine, menons par le point $o$ la ligne LT tangente en $o$ à la spirale; cette droite LT sera l'origine des angles $\omega$, et l'équation de la courbe E sera :

$$\rho = a\omega.$$

Considérons la ligne LT comme une ligne de terre;

Concevons un axe vertical A, ayant le point $o$ pour projection horizontale $A^h$.

Menons par le point $o$ (dans le plan horizontal), le rayon vecteur $om$ perpendiculaire à LT; et du point $o$ comme centre et avec $om$ pour rayon, décrivons un cercle C.

Nous pourrons considérer le cercle C comme la base d'un cylindre, de révolution, ayant pour axe la droite A.

Si nous faisons mouvoir une droite G, s'appuyant sur la spirale E et sur l'axe A et coupant cet axe A sous un angle constant $\delta$, on obtiendra une surface hélicoïde (filet de vis triangulaire), laquelle coupora le cylindre ayant le cercle C pour base ou section droite, suivant une hélice $\delta$.

Or, si au point $m$ de l'hélice $\delta$ on construit la tangente $\theta$ à cette courbe; et si

par le même point $m$ on mène la génératrice G de l'hélicoïde, le plan T tangent en $m$ à l'hélicoïde passera par $\theta$ et G ; et ce plan T coupera le plan horizontal, suivant une droite qui sera tangente en $m$ à la spirale E.

Il est facile de voir que l'angle $\epsilon$ étant donné, l'inclinaison $\alpha$ de l'hélice $\delta$, sur les génératrices du cylindre dont G est la section droite, dépend de cet angle $\epsilon$ ; et que *réciproquement*, l'inclinaison $\alpha$ de l'hélice $\delta$ étant donnée, on en conclut l'angle $\epsilon$.

On peut donc se donner arbitrairement l'angle $\alpha$.

Et dès lors, en menant par le point $o$ une droite $\theta^v$ faisant avec la ligne de terre LT un angle $\alpha'$, complémentaire de l'angle $\alpha$, et par le point $m$, une droite $\theta^h$ parallèle à la ligne de terre LT, on aura en $\theta^v$, $\theta^h$, les projections de la tangente en $m$ à l'hélice $\delta$.

Cherchons maintenant les projections de la droite G, ou mieux la grandeur ou *ouverture* de l'angle $\epsilon$ sous lequel elle doit couper l'axe A.

La spirale E coupe la ligne de terre en $n$.

La droite G, en passant de la position en laquelle elle coupe l'hélice $\theta$ au point $m$ en la position en laquelle elle coupe cette même courbe $\delta$ au point $n$, a donc décrit un angle droit autour de l'axe A ; ou, en d'autres termes, cette droite $\epsilon$ a parcouru sur l'hélice $\delta$ un quart de spire.

La droite G, en passant du point $m$ au point $n$, a donc parcouru sur l'axe A une longueur égale au quart du *pas* de l'hélice $\delta$.

Si donc, sur la ligne de terre, on prend $ox$ égale au quart de la circonférence C, la droite $xy$ sera égale au quart du *pas* de l'hélice $\delta$.

Cela fait :

Le plan vertical de projection (puisqu'il passe par l'axe A) coupe : 1° le cylindre dont C est la base suivant deux génératrices droites H et H', perçant le plan horizontal en les points $q$ et $q'$, qui sont les intersections du cercle C et de la ligne de terre ; et 2° l'hélicoïde suivant une génératrice $G_1$, passant par le point $n$ en lequel la spirale E perce la ligne de terre.

Si donc on prend sur H, $qz$ égal à $xy$, la droite $G_1$ passera par les points $z$ et $n$ et coupera l'axe A au point $s_1$, et fera avec l'axe A l'angle $\epsilon$ cherché.

Et la droite G qui doit passer par le point $m$ percera l'axe A en un point $s$, tel que $ss_1$ sera égal à $xy$ ou au quart du *pas* de l'hélice $\delta$.

La droite G étant connue, il suffira de faire passer le plan T par G et $\theta$, et de construire la trace horizontale de ce plan T.

Or, pour cela faire, il suffit de mener par le point $s$, une droite $sl$ parallèle à $\theta^v$, et d'unir le point $l$ (en lequel cette droite perce la ligne de terre) avec le point $m$ ; et l'on aura en $lm$, la trace horizontale H' du plan tangent en $m$ à l'hélicoïde, et par suite la tangente en $m$ à la spirale d'Archimède E.

La construction de la tangente étant effectuée, si l'on mène la normale $mp$, on aura en $op$ la sous-normale.

Démontrons maintenant que cette sous-normale $op$ est égale à $a$.

Les deux triangles rectangles $omp$ et $oml$ donnent :

$$op = \frac{\overline{mo}^2}{\overline{ol}} = \frac{\rho^2}{ol}$$

( en désignant $om$ par $\rho$ ).

Les deux triangles $sol$ et $yxo$ sont semblables et donnent :

$$\overline{ol} : \overline{os} :: \overline{ox} : \overline{xy}$$

d'où

$$ol = \frac{\overline{os} \times \overline{ox}}{\overline{xy}}$$

Mais : 1° $\overline{ox} = \frac{1}{2}\pi.\rho$ (puisque le cercle C a $\overline{om}$ ou $\rho$ pour rayon);

2° $\overline{xy} = \frac{1}{2}\pi.\rho.\cos\alpha$ (puisque le *pas* $h$ de l'hélice $\delta$ est égal à $2\pi\rho \cot\alpha$ ).

3° $\overline{os} = \frac{\overline{oq}\,.\,\overline{xq}}{\overline{on} - \overline{oq}}$, car les deux triangles semblables $osq$ et $os_1n$ donnent :

$$\overline{os} : \overline{oq} :: \overline{os_1} : \overline{on}$$

et comme

$$\overline{os_1} = \overline{os} + \overline{ss_1} = \overline{os} + \overline{xy}$$

on a

$$\overline{os} : \overline{oq} :: \overline{os} + \overline{xy} : \overline{on}$$

Mais $\overline{on}$ est égal à $\overline{oq} + \overline{qn}$, et $\overline{qn}$ s'obtient au moyen de l'équation $\rho = a\omega$ de la spirale, en prenant l'angle $\omega$ égal à $\frac{\pi}{2}$.

On a donc

$$\overline{nq} = \frac{a\pi}{2} \quad \text{et} \quad \overline{on} = \rho + \frac{a\pi}{2}$$

d'où

$$\overline{os} = \frac{\rho\,.\,\frac{\pi.\rho.\cot\alpha}{2}}{\frac{\pi a}{2} - \rho + \rho} = \frac{\pi.\rho^2.\cot\alpha}{\pi a}$$

Substituant les valeurs trouvées pour $\overline{os}$, $\overline{ox}$ et $\overline{xy}$ dans l'expression

$$\overline{ol} = \frac{\overline{os} \cdot \overline{ox}}{\overline{xy}}$$

on trouvera :

$$\overline{ol} = \frac{\dfrac{\pi.\rho^2.\cot\alpha}{(a\pi-\rho)} : \dfrac{\pi.\rho}{2}}{\dfrac{\pi.\rho.\cot\alpha}{2}} = \frac{\pi^2.\rho^3.\cot\alpha}{a\pi^2.\rho.\cos\alpha}$$

ou enfin

$$\overline{ol} = \frac{\rho^2}{a}$$

et par suite

$$\overline{op} = \frac{\rho^2\,(a\pi)}{\pi\rho^2} = a$$

Ainsi, la sous-normale pour le point $m$ est égale à $a$.

Mais quel que soit le point $m$, considéré sur la spirale, en prenant la ligne de terre perpendiculaire au rayon vecteur $om$, les constructions seront toujours les mêmes et l'on retombera toujours sur la ligne $\overline{on}$, qui dépendra toujours de la valeur de $\overline{qn}$; ou, en d'autres termes, de la différence de deux rayons vecteurs à angle droit; or, dans la spirale d'Archimède, il est évident, en vertu de son équation $\rho = a\omega$ et en vertu de la construction graphique de cette courbe, que cette différence est constante et égale à $\frac{\pi a}{2}$.

Ainsi, il est démontré que, pour la spirale d'Archimède, la sous-normale est constante et égale à $a$.

On doit voir que ce qui précède conduit plus simplement au *théorème* relatif à la sous-normale et donne aussi une construction plus simple de la *tangente* en un point de la spirale d'Archimède.

*Remarque.* L'on peut encore simplifier la démonstration précédente, car l'angle $\alpha$ étant arbitraire, on peut le prendre égal à un demi-droit, et dès lors (*fig.* 39 *bis*), on a $\overline{ox} = \overline{xy}$, et par suite, $\overline{ol} = \overline{os}$; et par conséquent la sous-normale $\overline{op} = \frac{\rho^2}{\overline{os}}$.

Les deux triangles semblables $osq$ et $os_1n$ donneront :

$$\overline{os} : \overline{oq} :: \overline{os_1} : \overline{on}$$

Mais

$$\overline{os_1} = \overline{os} + \overline{ss_1} = \overline{os} + \overline{xy} = \overline{os} + \overline{ox} = \overline{os} + \frac{\pi\rho}{2}$$

et

$$\overline{on} = \overline{oq} + \overline{qn} = \rho + \frac{\pi a}{2}$$

Donc, on a :

$$\overline{os} : \rho :: \overline{os} + \frac{\pi\rho}{2} : \rho + \frac{\pi a}{2}$$

d'où

$$\overline{os}\left(\rho + \frac{\pi a}{2}\right) = \rho\left(\overline{os} + \frac{\pi\rho}{2}\right)$$

d'où

$$\overline{os} \cdot \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi \cdot \rho^2}{2}$$

d'où

$$\overline{os} = \frac{\rho^2}{a}$$

et comme

$$\overline{op} = \frac{\rho^2}{ol} = \frac{\rho^2}{os}$$

on a $\overline{op}$ ou la sous-normale égale à $a$.

Ce qui précède nous permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3. *Étant donnée une spirale conique d'Archimède, si en un de ses points on construit le plan tangent au cône, sur lequel la courbe est tracée, et le plan normal à la courbe; ces deux plans se couperont suivant une normale à la courbe, qui ira percer le plan mené par le sommet du cône et perpendiculairement à l'axe de ce cône, en un point qui sera situé sur un cercle ayant le sommet du cône pour centre.*

Si l'on trace sur un plan P une spirale d'Archimède $\gamma_1$, et le cercle C *lieu* des pieds des normales à cette courbe.

Si l'on enroule le plan P sur un cône de révolution B (ayant soin de placer le pôle de la courbe $\gamma_1$ au sommet $s$ du cône B) la courbe plane $\gamma_1$ donnera sur le cône B une courbe à double courbure $\gamma$, qui sera une spirale conique d'Archimède.

Désignons par $G_1$ le rayon vecteur de la courbe $\gamma_1$, correspondant au point $m_1$ de cette courbe. Par $\theta_1$ la tangente et par $N_1$ la normale, en ce point $m_1$.

Menons par $s_1$, pôle de la courbe $\gamma_1$, une perpendiculaire à $G_1$; la droite $N_1$ la coupera en un point $n_1$, qui sera sur le cercle C dont je désigne le rayon par R.

Cela posé :

Décrivons du sommet $s$ du cône B, comme centre et avec R pour rayon, une sphère $\mathfrak{S}$; désignons par G la génératrice du cône B, sur laquelle se place le rayon vecteur $G_i$ de $\gamma_i$; par $m$, le point de $\gamma$ situé sur G, et en lequel se place le point $m_i$ de $\gamma_i$. Désignons par T le plan tangent au cône B, le long de G.

La tangente $\theta_i$ se placera en $\theta$ tangente en $m$ à $\gamma$, et $\theta$ sera dans le plan T.

Menons par le point $m$ le plan X perpendiculaire à $\theta$; nous aurons le plan normal de $\gamma$ pour le point $m$. Ce plan X coupera le plan T suivant une droite N perpendiculaire à $\theta$, et le plan T coupera la sphère $\mathfrak{S}$ suivant un grand cercle $C_i$.

Cela posé, si par le sommet $s$ du cône B, nous menons une droite L perpendiculaire à G et située dans le plan T, cette droite L sera perpendiculaire à l'axe $y$ du cône B, parce que ce cône B est de révolution.

Et la droite N viendra couper la droite L en un point $n$.

Or, si l'on déroule le cône B sur son plan tangent T, la courbe $\gamma$ se transformera en la courbe $\gamma_i$ laquelle aura pour tangente au point $m$ la droite $\theta$, et pour normale la droite N, et pour sous-normale la droite $\overline{sn}$.

Et toutes les droites L seront dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône de révolution B, et passeront par le sommet de ce cône, puisque toutes ces droites L sont perpendiculaires à l'axe du cône B et passent par le sommet de ce cône B.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Nous pouvons donc dire :

Que (si l'on appelle *normale* de la courbe *spirale conique* $\gamma$, la droite intersection du plan tangent T au cône B et du plan normal N à la courbe $\gamma$) le *lieu* de toutes les normales est une surface gauche qui est coupée par le plan Q, mené par le sommet $s$ du cône B et perpendiculairement à son axe, suivant un cercle D, ayant le sommet $s$ pour centre et pour rayon la sous-normale de la transformée $\gamma_i$ de $\gamma$; $\gamma_i$ étant la courbe que l'on obtient en planifiant le cône B.

Il est évident que ce théorème est, pour la *spirale conique*, l'analogue de celui qui, pour la *spirale plane*, s'énonce ainsi : *la sous-normale est constante*.

De ce qui précède on déduit ce qui suit :

Étant donnée une spirale plane $\gamma_i$ tracée sur un plan P et ayant un point $s_i$ pour pôle, et dont la sous-normale est égale à R; si l'on enroule le plan P successivement sur les cônes de révolution B, B′, B″ (ces cônes ayant même axe Y et même sommet $s$), de manière à ce que les points $s$ et $s_i$ se superposent et que la tangente au pôle $s_i$ de la courbe plane $\gamma_i$ prenne dans l'espace une position K perpendiculaire à l'axe Y; et ensuite de manière à ce que le plan P prenant les positions U, U′, U″ dans l'espace, ces plans U, U′, U″ étant d'ailleurs

tangents respectivement aux cônes B, B′, B″, passent par la droite K; alors, en enroulant respectivement ces plans U, U′, U″ sur les cônes B, B′, B″, on obtiendra les spirales coniques $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, qui jouiront de la propriété suivante, savoir : que les surfaces gauches, lieux de leurs *normales* s'entrecouperont suivant une courbe plane qui ne sera autre qu'un cercle D ayant le point *s* pour sommet et R pour rayon; et le plan Q de ce cercle D sera perpendiculaire à l'axe Y.

Il est évident (la construction étant exécutée ainsi qu'on vient de le dire) que si l'on mène par l'axe Y un plan méridien quelconque M, ce plan M coupera respectivement les courbes $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, aux points $x$, $x'$, $x''$, qui seront également distants du sommet *s* commun aux cônes concentriques B, B′, B″.

Mais, si en plaçant le plan P tangentiellement aux divers cônes B, B′, B″ (en ayant soin de superposer les points $s_1$ et $s$); ce plan a des positions V, V′, V″, telles que la tangente à la courbe $\gamma_1$ au pôle $s_1$ ne passe pas par la droite K perpendiculaire à l'axe Y, en les diverses positions que cette courbe $\gamma_1$ prend dans l'espace, en tant que située successivement dans les plans V, V′, V″, alors un plan méridien quelconque M coupera les courbes $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, à double courbure que l'on obtiendra en enroulant les plans V, V′, V″, respectivement sur les cônes B, B′, B″, en des points $x$, $x'$, $x''$, qui ne seront point également distants du sommet *s*.

Ainsi, dans le *premier cas*, toute sphère ayant son centre en *s*, coupera les diverses courbes $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, en des points situés sur un cercle dont le plan passera par l'axe Y; et dans le *second cas*, toute sphère ayant son centre en *s* coupera les diverses courbes $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, en des points situés sur une courbe à double courbure.

Et dans tous les cas, les surfaces formées par les *normales* aux courbes à double courbure $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, s'entrecouperont suivant un cercle C du rayon R et situé sur le plan Q et ayant son centre au sommet *s*.

Si l'on enroulait le plan P sur un cône quelconque $B_1$, la courbe $\delta$, suivant laquelle se transformerait la courbe spirale plane $\gamma_1$, ne serait plus une *spirale conique* d'Archimède, mais le lieu des *normales* à cette courbe $\delta$ serait toujours une surface gauche, et cette surface gauche couperait la sphère $\mathcal{E}$ ayant son centre au sommet du cône $B_1$ suivant une courbe à double courbure $\xi$ qui ne serait autre que l'intersection de la sphère $\mathcal{E}$ et du cône $B_2$ formé par les droites I menées par le sommet du cône $B_1$ dans les divers plans tangents T à ce cône $B_1$ et perpendiculairement aux génératrices G de ce cône $B_1$, lesquelles génératrices sont respectivement situées dans les divers plans T.

Problème 3. *Étant donnés sur un plan une droite* $\theta$, *un point* m *sur cette droite et un point* s *hors de cette droite, construire la spirale plane d'Archimède ayant le point* s *pour pôle, et passant par le point* m *et ayant en ce point* m *la droite* $\theta$ *pour tangente.*

*Première solution.* Étant donnés (*fig.* 42) le point $s^h$, le point $m^h$ et la droite $\theta^h$ passant par ce point, on se propose de construire la spirale plane d'Archimède ayant le point $s^h$ pour pôle et passant par le point $m^h$ et ayant en ce point $\theta^h$ pour tangente.

Nous construirons d'abord la sous-normale $s^hq$.

Du point $s^h$ comme centre et avec $s^hq$ pour rayon, nous décrirons le cercle C.

Par le point $s^h$, nous imaginerons un axe Y perpendiculaire au plan sur lequel on veut tracer la courbe, et ce plan sera pris pour plan horizontal de projection.

Nous pourrons donc prendre une ligne de terre LT perpendiculaire à la sous-normale $s^hq$, ou, en d'autres termes, parallèle au rayon vecteur $s^hm$.

Et l'épure s'effectuera en exécutant graphiquement les diverses constructions que nous allons indiquer :

1° On prendra sur l'axe Y un point $s$ arbitraire, et on le regardera comme le sommet d'un cône B de révolution ayant pour trace horizontale le cercle C ;

2° On construira un cylindre de révolution ayant ce même cercle C pour base et la droite Y pour axe ;

3° On construira le point $m$ situé sur le cône B et ayant $m^h$ pour projection horizontale ;

4° Par le point $m$ on mènera une droite K horizontale et s'appuyant sur l'axe Y ;

5° Par le point $m$ on fera passer une hélice H coupant les génératrices du cylindre sous un angle égal à l'angle que la génératrice du cône B fait avec l'axe Y ;

6° On fera mouvoir la droite K sur l'axe Y et sur l'hélice H et parallèlement au plan horizontal ; cette droite K engendrera un hélicoïde gauche $\Sigma$, lequel coupera le cône B suivant une spirale *conique* d'Archimède dont la projection horizontale sera la spirale demandée.

PROBLÈME 4. *Étant donnés trois points* s, m *et* m′ (*non en ligne droite*), *construire la spirale d'Archimède passant par les deux points* m *et* m′ *et ayant le point* s *pour pôle.*

On joindra (*fig.* 44) les points $m$ et $m'$ au point $s$.

Du point $s$ comme centre et avec $sm'$ pour rayon on décrira un cercle C coupant le rayon vecteur $sm$ au point $q$. On divisera l'arc $qm$ en $n$ parties égales et la droite $qm'$ aussi en $n$ parties égales et traçant des rayons X′, X″, passant par les points de division $r$, $r''$, de l'arc $qm$ et des cercles C′, C″, passant par les points de division $q'$, $q''$, de $qm$, ces rayons et ces cercles se couperont respectivement en des points $x'$, $x''$, qui appartiendront à la spirale $\gamma$ demandée, etc.

Ce que nous venons de dire et ce qui a été dit plus haut au sujet de la construction de la tangente en un point de la spirale d'Archimède, nous permet de donner une solution plus simple du troisième problème.

*Seconde solution du problème* 3, dont l'énoncé suit :

PROBLÈME 3. *Étant donnés une droite* $\theta$, *un point* m *sur cette droite et un point* s *hors de cette droite, construire la spirale d'Archimède ayant le point* s *pour pôle et passant par le point* m *et ayant pour tangente en ce point la droite* $\theta$.

Du point $s$ (*fig.* 45) comme centre et avec un rayon $sp$ égal au double du rayon vecteur $sm$, on décrira le cercle C coupant la droite $\theta$ au point $p$, et en ce point $p$ on mènera la droite $pr$ tangente au cercle C en ce point $p$.

On mènera la droite $sr$ parallèle à $\theta$ et coupant la droite $pr$ au point $r$; et au moyen de la développante $\delta$ on enroulera $pr$ sur le cercle C, et on aura le point $a$ qui sera sur le cercle C l'origine de la développante $\delta$ et qui sera un point de la spirale d'Archimède ; on retombera ainsi sur le problème 1.

*De la courbe-lieu des pieds des diverses tangentes menées à la spirale plane d'Archimède.*

Le triangle rectangle (*fig.* 40) $pmx$, dans lequel $sm$ est le rayon vecteur, $mx$ la tangente et $mp$ la normale, nous donne :

$$\overline{sm}^2 = \overline{ps} \times \overline{sx}$$

Et désignant $\overline{sm}$ par $\rho$, $\overline{sp}$ par N et $\overline{sx}$ par $\rho_1$, on pourra écrire :

$$\rho^2 = N \cdot \rho_1$$

Or, l'équation de la spirale plane d'Archimède étant : $\rho = a \cdot \omega$.

Nous aurons pour l'équation polaire de la courbe $\lambda$, lieu des points $x$, ou, en d'autres termes, des pieds des tangentes à la spirale plane $\gamma$ d'Archimède :

$$a^2 \cdot \omega^2 = N \cdot \rho_1$$

La spirale représentée par cette équation pourra recevoir le nom de *spirale parabolique*, puisque son équation polaire a la même forme que l'équation, en coordonnées rectangulaires, de la *parabole*.

Il est évident que la droite-origine des angles $\omega$ de la *spirale parabolique* sera en même temps la droite-origine des angles $\omega$ de la *spirale d'Archimède*, en vertu de la marche suivie pour passer de l'équation de la spirale d'Archimède ($\rho = a\omega$) à l'équation $\left(\rho_1 = \frac{a^2}{N}\omega^2\right)$ de la spirale *parabolique*.

*Du plan osculateur de la spirale conique d'Archimède.*

On se donne un cône B de révolution; désignons par $s$ son sommet et par Y son axe.

On trace sur le cône B une spirale conique $\gamma$ d'Archimède;

On mène par le sommet $s$ un plan Q perpendiculaire à l'axe Y;

On projette la courbe $\gamma$ en $\gamma^h$ sur le plan Q.

La courbe $\gamma^h$ est une spirale plane d'Archimède, je désigne par N sa sous-normale.

L'équation de la courbe $\gamma^h$ étant $\rho = a\omega$, la courbe $\lambda$, lieu des pieds des tangentes menées à la courbe $\gamma^h$, aura pour équation $\rho_1 = \frac{a^2}{N}\omega^2$; et comme nous savons que la sous-normale N est égale à $a$, l'équation de la courbe se réduira à :

$$\rho_1 = a\omega^2$$

Cela posé :

Il est évident que toutes les tangentes $\theta$ à la spirale conique $\gamma$ perceront le plan Q en un point situé sur la courbe $\lambda$.

Si donc nous considérons un point $m$ de la courbe $\gamma$, sa tangente $\theta$ pour ce point $m$ percera le plan Q en un point $n$ situé sur la courbe $\lambda$.

La courbe $\lambda$ étant la trace sur le plan Q de la surface développable formée par les tangentes de la courbe $\gamma$, si au point $n$ on mène la droite $t$ tangente à $\lambda$, le plan O passant par les droites $t$ et $\theta$ sera osculateur en $m$ à la spirale à double courbure $\gamma$.

Dès lors, le plan O coupera le cône B suivant une section conique E qui sera osculatrice en $m$ à la courbe $\gamma$.

Ainsi donc le rayon de courbure de E sera le rayon de courbure de $\gamma$; et si l'on projette la courbe E sur le plan Q on aura une section conique $E^h$ qui sera osculatrice en $m^h$ à la courbe $\gamma^h$; et le rayon de courbure de $E^h$ sera le rayon de courbure de $\gamma^h$.

On voit donc que le rayon de courbure d'une spirale plane d'Archimède s'obtiendra facilement lorsque l'on saura construire le plan osculateur d'une spirale conique d'Archimède, et que le plan osculateur sera facile à construire si l'on sait construire la tangente en un point de la *spirale (plane) parabolique*.

*De la spirale parabolique.*

Au moyen de l'*analyse* on parvient à une propriété remarquable de la spirale *parabolique*.

L'équation de cette courbe est, ainsi qu'il a été démontré ci-dessus :

$$\rho = a\omega^2$$

L'expression générale de la sous-tangente dans les courbes polaires est $\left(\rho^2 . \frac{d\omega}{d\rho}\right)$ En désignant la sous-tangente par $x$ on aura pour la spirale *parabolique*

$$x = \tfrac{1}{2}\rho\,\omega$$

Par conséquent (*fig.* 41), étant tracée la spirale *parabolique* $\lambda$, connaissant son pôle $s$ et la droite X origine des angles $\omega$, pour construire en $m$ la tangente à cette courbe, il faudra mener par le pôle $s$ la droite Z perpendiculaire sur le rayon vecteur $sm$ et porter sur Z la droite $sq$ égale à la moitié de l'arc rectifié $mp$ du cercle tracé du pôle $s$ comme centre et avec $sm$ pour rayon, le point $p$ étant celui en lequel le cercle coupe la droite Z ; et la droite $qm$ sera la tangente demandée.

La construction de la tangente en un point de la spirale *parabolique* étant très-simple, la construction du plan osculateur en un point de la spirale *conique* d'Archimède n'offrira aucune difficulté.

Il existe évidemment pour la *spirale plane d'Archimède* la même propriété que pour la *spirale plane hyperbolique*, savoir : si l'on imagine une série de cônes concentriques et de révolution B, B', B'', ayant même sommet $s$ et même axe Y; si l'on conçoit un plan Q mené par le sommet $s$ perpendiculairement à l'axe Y, et que l'on trace sur ce plan une *spirale d'Archimède* $\gamma^h$ ayant le point $s$ pour pôle, et si l'on trace la spirale *parabolique* $\lambda$ lieu des pieds des tangentes de la *spirale d'Archimède* $\gamma^h$; si enfin on imagine un cylindre ayant pour section droite la spirale $\gamma^h$ et coupant les cônes B, B', B'', suivant des spirales *coniques* d'Archimède $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, les surfaces développables, ayant ces spirales à double courbure $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ pour arêtes de rebroussement, s'entrecouperont suivant une courbe plane située sur le plan Q, et qui ne sera autre que la spirale *parabolique* $\lambda$.

**Problème 5.** *Étant donnée une spirale conique d'Archimède tracée sur un cône de révolution, construire la tangente à cette courbe pour le point sommet du cône.*

Concevons un cône de révolution B ayant pour sommet un point $s$ et pour axe une droite Y.

Coupons ce cône par un plan P perpendiculaire à l'axe Y et à une distance $h$ du sommet $s$, nous aurons sur le plan P un cercle C du rayon R.

Concevons un cylindre $\Delta$ ayant pour axe la droite Y et pour section droite le cercle C.

Menons par le sommet $s$ un plan Q perpendiculaire à l'axe Y, et coupant dès lors le cylindre $\Delta$ suivant un cercle $C_1$ ayant pour centre le point $s$ et son rayon étant évidemment égal à R.

Cela fait :

Traçons sur le cône B une spirale *conique* d'Archimède $\gamma$ ; cette courbe passera par le point $s$ et coupera le cercle C en un certain point $a$.

Si nous faisons mouvoir une droite K parallèlement au plan P, et s'appuyant dans son mouvement sur l'axe Y et sur la courbe à double courbure $\gamma$, nous savons que la surface gauche $\Sigma$ qu'elle engendrera, coupera le cylindre $\Delta$ suivant une hélice H passant par le point $a$.

Cette hélice H viendra couper le cercle $C_1$ tracé sur le plan Q en un point $a_1$ ; et si l'on unit les points $s$ et $a_1$ par une droite $K_1$, on aura en $K_1$ la position qu'occupe la génératrice droite de la surface gauche $\Sigma$, lorsque cette génératrice passe par le point $s$ de la spirale *conique* $\gamma$.

Cela posé :

Rappelons-nous (*fig.* 37) que la tangente au point $m$ de $\gamma$ est l'intersection du plan tangent au cône B et du plan tangent en $m$ à la surface gauche $\Sigma$.

Rappelons-nous, encore, que le plan tangent au cône B est perpendiculaire au plan méridien M de ce cône passant par le point $m$.

Dès lors, pour le point $s$, le plan méridien passera par l'axe Y et par la droite $K_1$, et il coupera le cône B suivant une génératrice $G_1$.

Le plan tangent $T_1$ au cône B et mené suivant $G_1$, contiendra la tangente demandée.

Le plan tangent $\Theta_1$, mené à la surface gauche $\Sigma$ et au point $s$, contiendra les génératrices des deux systèmes se croisant en $s$ et appartenant au paraboloïde de raccordement ; or, il est évident que pour le point $s$, ces deux génératrices sont : l'une l'axe Y et l'autre la droite $K_1$.

Le plan $\Theta_1$ est donc vertical et n'est autre que le plan méridien M du cône B.

Ainsi, la tangente demandée ne sera autre que la génératrice $G_1$ du cône B.

Ce qui précède nous permet de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME 6. *Étant donnée une spirale plane d'Archimède et son pôle, construire la tangente au pôle.*

On donne (*fig.* 46) la spirale $\gamma$ et son pôle $s$, et l'on propose de construire sa tangente $st$ en son pôle $s$.

On prendra deux points arbitraires $m$ et $n$ sur la courbe ;

Du point $s$, comme centre et ayant $sm$ pour rayon (le point $m$ étant plus éloigné du pôle $s$ que le point $n$), on décrira le cercle O.

On prendra la ligne de terre LT parallèle au rayon vecteur *sm*;

On mènera la droite *sik* perpendiculaire à LT, la droite *ik* représentant la projection verticale de l'axe Y.

On prendra un point *k* arbitraire sur la droite indéfinie *ik*; et projetant le point *m* en *m'*, la droite *km'* sera la projection de la génératrice du cône B, laquelle est parallèle au plan vertical de projection.

On projettera le point *l* (en lequel le rayon vecteur *sn* prolongé coupe le cercle C) en *l'* sur la ligne de terre, et la droite *kl'* sera la projection verticale de la génératrice du cône B qui passe par le point de la spirale conique dont *n* est la projection horizontale.

Menant du point *n* une perpendiculaire à la ligne de terre LT et la prolongeant jusqu'en *n'* sur *l'k*, nous aurons en *gn'* la hauteur du point de la spirale conique dont *n* est la projection horizontale.

En vertu de ce qui a été dit (problème 5), on aura la proportion :

$$\text{arc } mh : \text{arc } mlp :: \overline{gn'} : \overline{ik}.$$

D'ou l'on tire :

$$\text{arc } mlp = \frac{\text{arc } mh \times \overline{ik}}{\overline{gn'}}$$

Ayant ainsi déterminé la longueur de l'arc *mlp*, on aura le point *p* sur le cercle C; et joignant le point *p* et le pôle *s*, on aura la tangente *t* demandée.

*De la forme que doit avoir la spirale plane d'Archimède.*

Ce qui précède nous permet de déterminer d'une manière précise la forme que doit présenter la spirale plane d'Archimède.

Si nous considérons la spirale plane comme la projection de la spirale conique, la forme de la première courbe est une conséquence de la forme de la seconde.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la partie de la courbe à double courbure $\gamma$ tracée sur la nappe inférieure du cône B, mais lorsque cette courbe $\gamma$ est arrivée au sommet *s* du cône B, elle chemine sur la nappe supérieure de ce cône B.

Et en effet :

La courbe $\gamma$ est l'intersection du cône B et de l'hélicoïde gauche $\Sigma$; or, cette surface $\Sigma$ est indéfinie et coupe et la nappe inférieure et la nappe supérieure du cône B.

La génératrice K de la surface gauche Σ se meut sur l'axe Y du cône B et sur l'hélice H tracée sur le cylindre Δ ; pour toute position de K, située au-dessous du plan Q perpendiculaire à l'axe Y et passant par le sommet *s*, cette génératrice K perce la nappe inférieure du cône B, mais pour toute position de la droite K, située au-dessus de ce plan Q, cette génératrice K perce la nappe supérieure du cône B.

Et il est évident que les deux branches de la courbe γ qui se soudent au point *s* ont même tangente en ce point, qui est, comme nous l'avons dit, la génératrice G, du cône B, située dans le plan méridien M passant par la génératrice K, de la surface Σ qui correspond au sommet *s*.

On voit donc que la courbe γ, avant et après le point *s*, sera située d'un même côté par rapport au plan méridien M, et sera inversement symétrique par rapport au plan méridien M, perpendiculaire au plan M ; en sorte que ce qui se trouvera à droite par rapport au plan M, et au dessous du plan Q, existera à gauche par rapport au plan M, et au dessus du plan Q.

D'après cela, il est évident que la spirale plane offre la forme indiquée par la *fig.* 47.

*Le rayon de courbure au pôle ou sommet de la spirale d'Archimède est nul.*

On sait que lorsque l'on a une surface développable Σ ayant pour arête de rebroussement une courbe D, si l'on coupe cette surface Σ par une surface quelconque Δ, la courbe C d'intersection a toujours, pour le point *d* en lequel elle coupe la courbe D, un rayon de courbure qui est nul.

Par conséquent, toute courbe tracée sur un cône et passant par le sommet *s* de ce cône, aura en ce point *s* un rayon de courbure qui sera nul.

La spirale conique d'Archimède aura donc, pour le point situé au sommet du cône, un rayon de courbure égal à zéro.

Et comme toute courbe, ayant en un point *s* un rayon de courbure nul, se projette suivant une courbe ayant aussi un rayon de courbure nul au point de projection de ce point particulier *s* ; il s'en suit que la spirale plane d'Archimède aura un rayon de courbure nul en son sommet, ou pôle, ou origine.

Et dès lors, la développée de la spirale plane d'Archimède doit affecter la forme indiquée par la *fig.* 48.

## § II.

C'est Hachette qui le premier a remarqué que la projection de la courbe intersection d'une surface annulaire et d'un conoïde ayant même naissance et

même montée (épure de coupe des pierres, *voûte d'arête en tour ronde*) était une spirale d'Archimède.

Mais il a démontré que cette courbe-projection était une spirale d'Archimède, au moyen de l'*analyse*; et cela, en combinant l'équation de la surface annulaire avec celle de la surface conoïde.

Je me propose d'arriver au théorème que l'on doit à Hachette, en ne me servant que des méthodes si simples et souvent si élégantes de la *géométrie descriptive*.

Les géomètres ont donné le nom de *conoïde* à la surface gauche engendrée par une droite se mouvant parallèlement à un plan, en s'appuyant sur une droite et sur une courbe fermée.

Mais on donne plus particulièrement le nom de conoïde, dans les applications, à la surface que l'on obtient lorsque la droite directrice est perpendiculaire au plan directeur et que la courbe directrice est *symétrique* par rapport à un plan passant par la droite directrice.

Les anciens faisaient encore une restriction, il fallait que la courbe directrice fût un *cercle* dont le plan était perpendiculaire au plan directeur.

Cela dit :

1° Prenons le plan directeur pour plan horizontal, et désignons-le par P.

Désignons par A la droite directrice, elle sera verticale, et dès lors perpendiculaire au plan P.

Faisons passer par la droite A un plan Q, et menons un plan N perpendiculaire à la fois au plan Q et au plan P; les deux plans Q et N se couperont suivant une droite Z parallèle à A.

Décrivons dans le plan N un cercle C, ayant son centre situé sur la droite Z; faisons mouvoir une droite G parallèlement au plan P et s'appuyant sur le cercle C et l'axe A, nous aurons le *conoïde* connu des anciens.

2° Prenons le plan directeur pour plan horizontal et désignons-le par P; désignons par A la droite directrice, et supposons-la verticale, ou, en d'autres termes, perpendiculaire au plan P.

Concevons un cylindre Δ de révolution ayant la droite A pour axe et pour base sur le plan P un cercle D du rayon R.

Menons par la droite A un plan Q coupant le cylindre Δ suivant une génératrice droite δ, et construisons le plan T tangent au cylindre Δ suivant la génératrice δ.

Traçons dans le plan T un cercle E, ayant son centre situé sur la droite δ; enroulons le plan T sur le cylindre Δ, la courbe plane E se transformera en une courbe à double courbure E tracée sur le cylindre Δ.

Faisons mouvoir une droite parallèlement au plan P et s'appuyant sur la droite A et la courbe à double courbure E, on aura le *conoïde* dont on se sert maintenant pour former la *douelle* des passages ou *portes* pratiqués dans une voûte annulaire, et qui constituent ce que l'on appelle *la voûte d'arête en tour ronde.*

Démontrons : 1° que si l'on coupe le *premier conoïde* par un plan quelconque N, mais parallèle au plan N, la section sera une ellipse dont l'un des axes sera toujours vertical et égal au rayon du cercle C; 2° que si l'on coupe le *second conoïde* par une surface cylindre de révolution quelconque Δ, mais ayant pour axe la droite A, la courbe E′ à double courbure que l'on obtiendra pour section, se développera sur un plan tangent au cylindre Δ suivant une ellipse E′ ayant toujours l'un de ses axes vertical et égal au rayon du cercle E.

1° *Du conoïde à courbe directrice plane.*

Soient LT la ligne de terre (*fig.* 49), $A^v$, $A^h$ les projections de la directrice droite A. Traçons dans le plan vertical le cercle C ayant son centre en *o* sur la ligne de terre et sur $A^v$. Coupons la surface conoïde par un plan N, parallèle au plan vertical de projection.

Je dis que la section sera une ellipse ayant l'un de ses demi-axes vertical et égal au rayon du cercle C, son autre axe étant horizontal et égal à $p'q'$.

Et en effet :

Partageons le rayon *op* du cercle C en *n* parties égales, on aura :

$$px^h = x^h y^h = y^h o.$$

Joignant le point $A^h$ aux points $p$, $x^h$, $y^h$, $o$, on aura les projections horizontales de diverses génératrices droites du conoïde; ces projections couperont la droite $H^n$, trace horizontale du plan N, en les points $p'$, $x'^h$, $y'^h$, $o'$, et l'on aura évidemment :

$$p'x'^h = x'^h y'^h = y'^h o'$$

Et les points $x'$, $y'$ de l'espace seront respectivement à la même hauteur au-dessus du plan horizontal que les points $x$, $y$; car les points $x$ et $x'$, $y$ et $y'$ déterminent deux à deux une génératrice droite du conoïde.

Cela posé :

Du point $p$ comme centre, et avec un rayon égal à $p'q'$, décrivons sur le plan horizontal le cercle 6, et du point $p$ menons une tangente à ce cercle 6; la droite $qm$ sera égale à $p'q'$, et si par les points $x^h$, $y^h$, $o$, nous menons des parallèles à

la droite $pm$, ces parallèles diviseront la droite $qm$ en des points $x'^h$, $y'^h$, $o'$, tels que l'on aura :

$$mx''^h = x''^h y''^h = y''^h o''$$

Et chacune des divisions $mx''^h$ de la droite $qm$ sera égale à l'une des divisions $px''^h$ de la droite $p'q'$.

Si ensuite on suppose que l'on mène par les divers points $x$, $y$, du cercle C des parallèles à la droite $pm$, on formera un cylindre Δ ayant le cercle C pour base sur le plan vertical de projection.

Ce cylindre Δ sera coupé par un plan $M_1$ vertical et ayant $qm$ pour trace horizontale suivant une courbe qui sera évidemment identique à la section faite dans le conoïde par le plan $N_1$, puisque ces deux courbes sont par construction évidemment superposables.

Or : la section faite dans le cylindre Δ par le plan $M_1$ est une ellipse ayant pour l'un de ses axes la droite $qm$, et l'autre de ses axes étant vertical et égal au diamètre du cercle C ; donc, etc.

De ce qui précède on déduit le corollaire suivant :

Supposons que la courbe C (*fig.* 49) est une ellipse ayant son centre en $o$ et $or$ et $op$ pour demi-axes.

Si un conoïde a pour directrice une ellipse ayant l'un de ses axes horizontal, et l'autre étant dès lors vertical et parallèle à la directrice droite A de ce conoïde, on pourra toujours trouver un plan parallèle au plan de l'ellipse directrice qui coupe la surface suivant un cercle ; et pour trouver ce plan, il suffira d'inscrire dans l'angle $pA^hq$ (en supposant que $pq$ soit le diamètre horizontal de l'ellipse directrice) une droite $p'q'$ parallèle à $pq$ et égale au double du demi-diamètre vertical $ro$ de cette ellipse directrice.

2° *Du conoïde à directrice à double courbure.*

Soit LT (tangente en $o$ au cercle D) la ligne de terre (*fig.* 50) ; traçons dans le plan vertical de projection le cercle $E_1$ ayant le point $o$ pour centre.

Considérons le cercle D comme la base d'un cylindre vertical, dès lors le plan vertical de projection sera tangent à ce cylindre suivant une génératrice ayant pour trace horizontale le point $o$. Enroulons le plan vertical sur ce cylindre, la courbe $E_1$ se transformera en une courbe à double courbure E qui se projettera horizontalement suivant l'arc $pq$ du cercle D, cet arc $pq$ rectifié étant égal en longueur à $p_1q_1$ diamètre du cercle $E_1$.

Du point $A^h$ comme centre, décrivons le cercle $D_1$ concentrique au cercle D,

**et regardons $D_1$ comme la base d'un cylindre vertical $N_1$; je dis que ce cylindre coupera le conoïde ayant la droite A et la courbe E pour directrice suivant une** courbe qui, planifiée, sera une ellipse.

Et en effet :

Au point $o'$ menons la droite $p_1'q_1'$ parallèle à LT, cette droite sera tangente en $o'$ au cercle $D_1$; prenons $o'p_1'$ égal à l'arc rectifié $o'p'$; prenons $o'q_1'$ égal à l'arc rectifié $o'q'$.

Les trois points $p$, $p'$, $A^h$ sont en ligne droite par construction; les trois points $o$, $o'$, $A^h$ sont aussi en ligne droite par construction; dès lors les trois poits $p_1$, $p_1'$, $A^h$ seront en ligne droite, puisque les arcs qui, dans deux cercle concentriques, sous-tendent un même angle sont entre eux comme les rayons des cercles.

Si donc l'on considère le conoïde auxiliaire engendré par une droite horizontale s'appuyant sur la directrice droite A et sur la courbe plane $E_1$, il sera coupé par le plan vertical ayant pour trace horizontal $p_1'$ $q_1'$ suivant une ellipse $\delta_1$. Et en enroulant la courbe $E_1$ sur le cylindre qui a pour base le cercle D et l'ellipe $\delta_1$ sur le cylindre qui a pour base le cercle $D_1$, on aura deux courbes E et $\delta$ telles que si on fait mouvoir une droite horizontale sur E et $\delta$, elle s'appuiera toujours sur la droite A et engendrera le premier conoïde considéré; car ce que nous avons dit de la droite $pp_1'A^h$ se transformant en la droite $pp'A^h$ se dira de toute autre génératrice horizontale appartenant soit au premier, soit au second conoïde; donc, etc.

On pourra dès lors déduire le corollaire suivant :

Si la courbe $E_1$ était une ellipse ayant pour ses demi-axes $or$ et $op_1$, on pourrait toujours trouver le cercle $D_1$ base du cylindre vertical qui couperait le conoïde ayant pour directrice la courbe à double courbure E suivant une courbe qui, planifiée, serait un cercle.

Pour cela, il suffirait de construire la droite $o'p_1'$ égale à $or$ (égale au demi-axe vertical de l'ellipse $E_1$) et traçant avec $A^ho'$ pour rayon le cercle $D_1$, l'arc $o'p'$ rectifié serait égal à la droite $o'p_1'$.

*Remarque.* Dans la solution du premier problème nous avons transformé le conoïde en un cylindre. Et dans la solution du second problème, nous avons transformé le conoïde à directrice à double courbure en un conoïde à directrice plane.

La transformation de surfaces en d'autres surfaces est un des modes de *recherche* et de *démonstration* les plus utiles et les plus féconds en géométrie descriptive.

On parvient ainsi à reconnaître sur une surface compliquée une propriété qui serait restée inaperçue, mais qui devient évidente en la faisant passer de la surface simple en laquelle est transformée la surface plus compliquée, sur cette dernière surface.

***La projection de la courbe intersection de la surface annulaire par le conoïde à directrice à double courbure est une spirale d'Archimède.***

**Supposons (*fig.* 51) quo la surface annulaire est engendrée par le cercle C.**

Prenons pour directrice à double courbure du conoïde, une courbe tracée sur le cylindre vertical D et telle que, planifiée, elle donne l'ellipse $E_1$.

Cherchons le cylindre qui coupera le conoïde suivant une courbe qui, planifiée, sera un cercle de même rayon que le cercle C.

(Comme les deux surfaces ont même naissance et même montée, les centres $g$ du cercle C et $o$ de l'ellipse $E_1$ sont sur le plan horizontal et le demi-axe vertical de l'ellipse $E_1$ est égal au rayon du cercle C; on a donc $or = gk$.)

Pour cela, nous prendrons $or' = or$; nous mènerons la droite $r'p_1'$ parallèle à $oA^h$ et coupant la droite $p_1A^h$ au point $p_1'$; nous mènerons la droite $p_1'o'$ parallèle à LT et coupant $oA^h$ au point $o'$; du point $A^h$, comme centre et avec $o'A^h$ pour rayon, nous décrirons le cercle $D_1$, et le cylindre vertical qui a pour base le cercle $D_1$ coupera le conoïde suivant une courbe $\delta$ qui se transformera en un cercle C' de même rayon que C.

Nous pourrons donc, au lieu de considérer la courbe E comme directrice du conoïde, lui substituer la courbe $\delta$.

**Or, l'on sait que pour trouver l'intersection de ces deux surfaces (annulaire et conoïde), il faut employer une série de plans horizontaux, coupant la surface annulaire suivant des cercles et la surface conoïde suivant des génératrices droites.**

**La construction de la projection horizontale de la courbe intersection des deux surfaces données se réduira donc à ce qui suit :**

**Partager le rayon du cercle C en $n$ parties égales par les points 1, 2, 3, 4; et décrire, du point $A^h$ comme centre et avec $A^h.1$, $A^h.2$, $A^h.3$, $A^h.4$, pour rayons, divers cercles.**

**Partager l'arc $o'q_1'$ en $n$ parties égales par les points 1'', 2'', 3'', 4'' (et il est évident que chaque petit arc rectifié sera égal à une des parties du rayon $gk$ du cercle C).**

**Joindre le point $A^h$ avec les points 1'', 2'', 3'', 4'', par diverses droites; les cercles et les droites ainsi obtenus se couperont en les points $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, qui appartiendront à la courbe $\gamma^h$ projection de la courbe d'intersection $\gamma$.**

**Or, il est évident par la construction même que la courbe $\gamma^h$ est une spirale d'Archimède, car désignant par $\rho$ le rayon vecteur ($A^h$ étant pris pour pôle) et par $\omega$ l'angle, on a évidemment $\frac{\rho}{\omega} =$ constante.**

**Si le conoïde, au lieu d'avoir une courbe à double courbure pour directrice,**

avait une courbe plane, alors la projection de l'intersection serait une courbe dont l'équation serait

$$\frac{\rho}{\tang \omega} = \text{constante}.$$

Et en effet :

Le conoïde aurait pour directrice le cercle C', on devrait donc partager le rayon $o'q_1'$ en $n$ parties égales par les points 1', 2', 3', 4', et unissant ces points au point $A^h$, on aurait des droites qui couperaient les cercles décrits, autour du point $A^h$ comme centre, par les points 1, 2, 3, 4, en des points $n$, $n'$, $n''$, $n'''$, qui formeraient une courbe $\gamma_1^h$ différente de $\gamma_h$.

Et il est évident, par la construction, que les accroissements de la tangente trigonométrique de l'angle $\omega$ sont proportionnels aux accroissements du rayon vecteur $\rho$.

Et il est évident, par la construction elle-même, que l'une et l'autre spirale passent par le point $A^h$ qui sera leur pôle.

Ainsi, l'épure de la voûte d'arête en tour ronde conduit, suivant les données, à une *spirale d'Archimède* ou à une *spirale tangentoïde* ayant le point $A^h$ pour *pôle*.

*Construction de la tangente en un point de la spirale d'Archimède.*

Si étant donnée une spirale d'Archimède $\gamma^h$, on peut parvenir à déterminer la surface annulaire et la surface conoïde à directrice à double courbure dont la courbe d'intersection $\gamma$ se projette suivant cette courbe $\gamma^h$, la construction de la tangente en un point $m^h$ de $\gamma^h$ ne sera pas difficile, puisqu'il suffira de construire la tangente au point $m$ de $\gamma$ et que cette tangente est l'intersection des plans tangents au point $m$ : 1° à la surface annulaire et 2° à la surface conoïde.

Le problème à résoudre est donc celui-ci :

*Étant donnée une spirale d'Archimède, construire une surface annulaire et une surface conoïde telles que leur intersection se projette suivant un arc de la courbe donnée.*

Soient donnés (*fig.* 52) la spirale d'Archimède $\gamma^h$ et son pôle $s$ et un point $m^h$ de cette courbe.

On prendra un point $x$ arbitraire sur $\gamma^h$, et l'on mènera la droite $sx$.

On mènera par le *pôle* $s$ deux droites $sp$ et $sq$, l'une à droite et l'autre à gauche de $sx$, et faisant avec cette droite $sx$ des angles égaux (on s'arrangera pour que le point $m^h$ soit compris entre les points $p$ et $q$ en lesquelles ses droites coupent la spirale $\gamma^h$).

Cela fait : du point $s$ comme centre et avec $sp$ pour rayon, on décrira un cercle qui viendra couper la droite $sq$ en $g$.

On décrira du même point $s$ comme centre, et avec $sx$ pour rayon, un cercle qui viendra couper la droite $sq$ en $k$; il est évident que le point $k$ sera le milieu de $qg$.

Du point $k$ comme centre, et avec $kg$ pour rayon, on décrira un demi-cercle C, et regardant $sq$ comme une ligne de terre L'T', le cercle C sera la courbe méridienne de la surface annulaire demandée, la verticale passant par le point $s$ étant l'axe de rotation de cette surface.

Cela fait : au point $o$, en lequel la droite $sx$ coupe le cercle $pog$, on mènera $op_1$ tangente en $o$ à ce cercle $pog$; et l'on prendra $op_1 =$ arc $op$.

On joindra le point $p_1$ au point $s$ par la droite $p_1s$, et l'on prendra $or'$ égal au rayon $kg$ du cercle C.

On mènera $p_1p_1'$ parallèle à $sx$ et coupant la droite $sp_1$ en $p_1'$.

On mènera $p_1'o'$ perpendiculaire à $sx$, et du point $s$ comme centre et avec $so'$ pour rayon on décrira le cercle $D_1$.

On prendra la droite $o'p'$ pour nouvelle ligne de terre LT, et on décrira du point $o'$ comme centre et avec $o'p'$ pour rayon le cercle C', et le cercle C' sera la transformée de la courbe à double courbure $\delta$ tracée sur le cylindre vertical ayant pour base le cercle D'; le conoïde cherché aura pour directrices la verticale passant par le point $s$ et la courbe à double courbure $\delta$.

La construction de la tangente au point $m^h$ de la spirale donnée $\gamma^h$ n'offrira plus de difficulté pour ceux qui savent ce que l'on enseigne ordinairement dans les cours de géométrie descriptive.

*Construction de la tangente en un point de la spirale tangentoïde.*

Le problème sera résolu si l'on trouve la surface annulaire et le conoïde à directrice plane dont l'intersection se projette suivant un arc de la courbe proposée.

On fera les mêmes constructions que précédemment pour obtenir la surface annulaire.

Ainsi (*fig.* 53), on mènera à droite et à gauche de $sx$ deux droites $sp_1$ et $sq_1$ et l'on supposera que les droites $sp_1$ et $sq$ font des angles égaux avec la droite $sx$.

Et pour obtenir la surface conoïde, on fera les constructions suivantes : sur la corde $pg$ qui coupe $sx$ au point $o$, on prendra $or' = gk$; on tracera $r'p_1'$ parallèle à $sx$ et coupant la droite $sp_1$ en $p_1'$; on mènera $p_1'o'$ perpendiculaire à $sx$ et cou-

pant $sx$ en $o'$; on décrira du point $o'$ comme centre, et avec $o'p.'$ comme rayon, le cercle C', et l'on prendra ce cercle C' pour la directrice plane du conoïde.

*Remarque*. Étant donné un problème à résoudre sur le plan; passer dans l'espace au système à trois dimensions, dont le système sur le plan serait la projection, et résoudre le problème sur le système de l'espace, est une méthode fort commune en géométrie descriptive, et qui facilite très-souvent la solution du problème proposé sur le plan. Car il arrive souvent que le problème à résoudre sur le *système* à trois dimensions est moins difficile ou que la solution apparait plus vite à l'esprit, que si l'on voulait s'obstiner à ne considérer que le *système-plan* proposé.

Nous devons faire remarquer : que pour la solution du problème précédent, nous avons eu soin de prendre la droite $sx$ qui divisait en deux parties égales l'angle $psq$ compris entre les droites qui représentaient les génératrices *extrêmes* du conoïde (celles qui sont situées sur le plan horizontal), telle qu'elle ne passait pas par le point $m^h$ de la courbe $\gamma^h$, point pour lequel on voulait construire la tangente. Et cela devait être, car l'on doit se rappeler que la courbe-intersection d'une surface annulaire et d'une surface conoïde, ayant même naissance et même montée, se compose de deux branches qui se croisent au point culminant, lequel point culminant n'est autre que l'intersection du cercle culminant de la surface annulaire et de la génératrice droite culminante du conoïde. Or, l'on voit que le cercle $xk$ (*fig*. 52 et 53) est la projection du cercle culminant de la surface annulaire engendrée par le cercle C, et que la droite $sx$ est la projection de la génératrice culminante du conoïde.

Et pour ce point culminant de la courbe-intersection des deux surfaces, la construction de la tangente échappe à la méthode ordinaire, puisque pour ce point culminant le plan tangent à la surface annulaire est horizontal, ainsi que le plan tangent à la surface conoïde.

Les deux plans tangents se confondant en seul plan, la méthode ordinaire ne peut conduire à la construction de la tangente.

Toutefois, la construction de cette tangente peut être effectuée par diverses considérations géométriques.

*Construction de la tangente au point culminant ou mieux au point multiple de la courbe-intersection d'une surface annulaire et d'une surface conoïde ayant même naissance et même montée.*

Soit (*fig*. 54) la courbe $\gamma^h$ projection de l'intersection de la courbe $\gamma$, intersection d'une surface annulaire et d'un conoïde ayant pour directrice courbe une courbe à double courbure.

(D'après les données particulières de la question, le cercle $D_,$ sera la base du cylindre qui coupe le conoïde suivant une courbe qui, planifiée, donne le cercle $B_,$.)

On propose de construire la tangente au point $m^h$ de $\gamma^h$.

Pour cela, on fera passer par $m^h$ le cercle $\lambda^h$ ayant $A^h$ pour centre, et la droite $G^h$ passant par le point $A^h$.

$\lambda^h$ sera la projection d'un cercle ou parallèle, tracé sur la surface annulaire et dont le plan sera distant du plan horizontal d'une quantité égale à $y^h y$.

$G^h$ sera la projection d'une génératrice droite du conoïde, distant du plan horizontal d'une quantité égale à $n_,^h n_,$; et l'on sait que $n_,^h n_, = y^h y$, puisque les cercles C et $B_,$ ont leurs rayons égaux.

Cela fait :

On construira la trace horizontale H' du plan T tangent à la surface annulaire au point $m$, et la trace horizontale H'' du plan $T_,$ tangent au conoïde au même point $m$.

(On sait construire ces traces) ; et en vertu de la construction, on a :

$$sy^h = n_,^h q_, = n^h q.$$

Or, si l'on suppose que la surface annulaire a pour courbe méridienne le cercle C' au lieu du cercle C, et que la surface conoïde a le cercle $B_,'$ de même rayon que le cercle C' au lieu du cercle $B_,$, pour transformée de la courbe à double courbure qui lui sert de directrice courbe, on aura toujours $y^h y' = n_,^h n_,$.

Par conséquent, les deux nouvelles surfaces se couperont suivant une courbe $\gamma'$ qui aura encore pour projection la courbe $\gamma^h$ (*).

Dans la construction de la tangente, au point $m^h$ de $\gamma^h$, on aura donc encore la sous-tangente du point $y'$ égale à la sous-tangente du point $n_,'$, tout comme on avait la sous-tangente $sy^h$ du point $y$ égale à la sous tangente $n_,^h q_,$ pour le point $n_,$; et par suite, égale à la sous-tangente $n^h q$ pour le point $n$, dont le point $n_,$ est le transformé.

On doit donc conclure de là que, dans la construction de la tangente, les deux lignes $sy^h$ et $n^h q$ doivent être égales sans s'inquiéter de leur longueur.

Et dès lors, la construction de la tangente au point $m^h$ de $\gamma^h$ ne devient plus qu'une construction plane, puisqu'elle se trouve indépendante des paramètres des deux surfaces annulaires et conoïdes.

(*) J'ai publié une note à ce sujet dans le *Bulletin de la Société philomatique*. Voyez la séance du 12 janvier 1833.

Par conséquent, la construction qui donne la tangente au point $m^h$, donnera la tangente en tout autre point de la courbe $\gamma^h$ et aussi au point $x^h$ projection du point culminant, car la figure nous démontre que ce point $x^h$ n'est pas un point singulier de la courbe $x^h$, son pôle $A^h$ est son seul point singulier.

Cela dit :

Appliquons la construction précédente au point $x^h$ de $\gamma^h$ projection du point culminant $x$ de $\gamma$, cette courbe $\gamma$ étant l'intersection des deux surfaces annulaire et conoïde de dimensions données.

1° *La courbe $\gamma^h$ étant une spirale d'Archimède :*

Nous porterons (*fig.* 55) sur le rayon vecteur $A^h x^h$ et à partir du point $x^h$, une longueur arbitraire $x^h s'$, et nous mènerons par ce point $s'$ une droite $H'$ perpendiculaire au rayon vecteur $A^h x^h$.

Du point $A^h$ comme centre et avec un rayon convenable nous décrirons un cercle $D_1$, tel que l'arc $p'o'$ rectifié soit égal au rayon $gk$ du cercle C, courbe méridienne de la surface annulaire.

Par le point $o'$ situé sur le rayon vecteur $A^h x^h$, nous mènerons la droite $o'h$ perpendiculaire à ce rayon vecteur, et nous prendrons $o'h = x^h s'$.

Nous joindrons les points $h$ et $A^h$ par une droite, et nous mènerons par le point $x^h$ une droite $x^h r$ parallèle à $o'h$ et coupant la droite $A^h h$ en $r$.

Par le point $r$ nous mènerons la droite $H''$ parallèle au rayon vecteur $A^h x^h$ et les deux droites $H'$ et $H''$ se couperont en un point $z$.

Enfin, unissant les points $z$ et $x^h$ par une droite $\theta^h$, nous aurons la tangente demandée.

Nous avons, dans les diverses figures que nous avons construites, conservé la même notation et celle que j'ai adoptée en *géométrie descriptive*, pour que le lecteur puisse plus facilement se rappeler, en suivant les constructions, les théorèmes géométriques qui servent de base à ces diverses constructions.

2° *La courbe $\gamma^h$ étant une spirale tangentoïde.*

Les constructions seront identiquement les mêmes ; seulement (*fig.* 56) l'on inscrira dans l'angle $\widehat{pA^h x^h}$ une droite $p'p'$ perpendiculaire à $A^h x^h$ et égale au double du rayon $gk$ du cercle C, courbe méridienne de la surface annulaire.

*Remarque.* Remarquons que (*fig.* 55 et 56) le rayon vecteur $A^h x^h$ est égal à la droite $gA^h$, c'est-à-dire à la distance du centre du cercle méridien de la surface annulaire à son axe A de rotation. Nous pourrons désigner cette distance par $l$.

La droite $o'A^h$ est toujours facile à construire, et nous la désignerons par $l'$.

Et comme $o'h = x^h s'$ est arbitraire, nous pourrons représenter ces deux lignes par $d$.

Dès lors, les triangles semblables $rx^hA^h$ et $ho'A^h$ nous donnent :

$$x^hA^h : A^ho' :: x^hr : o'h$$

d'où

$$l : l' :: x^hr : d$$

d'où l'on tire :

$$x^hr = \frac{d \cdot l}{l'}$$

Et si nous désignons par $\alpha$ l'angle que la tangente $\theta^h$ fait avec son rayon vecteur $A^hx^h$, nous aurons :

$$\text{tang } \alpha = \frac{x^hs'}{s'z}$$

Et comme

$$s'z = x^hr$$

on aura

$$\text{tang } \alpha = \frac{d \cdot l'}{d \cdot l} = \frac{l'}{l}$$

Par conséquent, $\alpha$ sera égal à un angle demi-droit lorsque l'on aura $l = l'$, et aussi lorsque le conoïde sera tel que le point $o'$ ne sera autre que le point $x^h$.

Ce qui précède nous permet de résoudre le problème suivant :

*Étant donnée une spirale d'Archimède, trouver le point de cette courbe pour lequel la tangente et le rayon vecteur font entre eux un angle donné.*

Lorsque (*fig.* 54) nous avons construit la tangente au point $m^h$ de la spirale $\gamma^h$, en nous servant des plans tangents au conoïde et à la surface annulaire, le point $m^h$ n'était point la projection du point culminant de la courbe à double courbure $\gamma$.

Or, pour ce point $m^h$, en désignant l'angle $\widehat{A^hm^hz}$ par $\varepsilon$, on a :

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{s'm^h}{s'z} \quad \text{ou} \quad = \frac{s'm^h}{m^hr}$$

Et comme les deux triangles $A^hm^hr$ et $A^hn^hh$ sont semblables, on a :

$$m^hr : A^hm^h :: n^hh : A^hn^h$$

Or, on peut représenter $A^hm^h$ par $\rho$ rayon vecteur du point $m^h$ de la spirale $\gamma^h$.

On peut représenter $A^h n^h$ par R rayon du cercle base du cylindre qui coupe le conoïde suivant une courbe à double courbure qui, planifiée, donne un cercle de même rayon que le cercle méridien de la surface annulaire.

Et par construction, on a $s'm^h = n^h h$.

Par conséquent :

$$m^h r = \frac{\rho . \overline{s'm^h}}{R} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{R}{\rho}$$

Donc, pour résoudre le problème proposé, on considérera la spirale donnée comme la projection de la courbe-intersection de deux surfaces, l'une conoïde et l'autre annulaire, ainsi qu'on l'a fait (*fig.* 52).

La construction de la *fig.* 52 effectuée, on construira un triangle rectangle (*fig.* 52 *bis*) $xmy$, pour lequel l'hypothénuse $xy$ fera avec la base l'angle $\varepsilon$ que la tangente à la spirale doit faire avec le rayon vecteur.

On prolongera $ym$ jusqu'en $p$, de manière que l'on ait $yp = R$, et menant $pq$ parallèle à $mx$, on aura en $pq$ la longueur du rayon vecteur.

Il suffira donc de décrire, du pôle de la spirale comme centre et avec un rayon égal à $pq$, un cercle qui coupera la spirale donnée au point demandé.

Ce qui précède permet de donner une nouvelle construction et assez simple de la tangente en un point d'une spirale d'Archimède.

Et en effet :

Ayant construit, comme (*fig.* 52), les deux surfaces dont l'intersection se projette suivant la spirale plane donnée $\gamma^h$, pour mener la tangente au point $m^h$, on mènera le rayon vecteur $s^h m^h$, lequel coupera le cercle D, (base du cylindre qui coupe le conoïde suivant une courbe qui se développe suivant un cercle de même rayon que le cercle méridien de la surface annulaire) en un point $v$.

Par le pôle $s^h$, on mènera $s^h u$ perpendiculaire sur $s^h m^h$, et l'on prendra $s^h u = s^h m^h = \rho$.

On unira les points $u$ et $v$, et menant par le point $m^h$ de la spirale une parallèle à la droite $uv$, on aura la tangente demandée.

## § III.

La spirale d'Archimède peut encore être la projection de la courbe intersection d'une surface rampante connue en coupe des pierres sous le nom de *vis Saint-Gilles* et d'un conoïde ayant pour directrice une courbe à double courbure qui ne se transforme point en une ellipse telle que les points de contact de ses

deux tangentes verticales sont situées sur un diamètre horizontal, comme lorsque l'on a une surface annulaire au lieu d'une vis Saint-Giles, mais qui se transforme en une ellipse telle que les points de contact de ses deux tangentes verticales sont situés sur un diamètre incliné à l'horizon.

C'est ce que nous allons démontrer.

Construisons (*fig.* 57), comme dans le cas d'une surface annulaire, la projection horizontale.

Le cercle C, au lieu d'engendrer une surface annulaire, engendrera une surface rampante.

Dès lors, chaque point $x$ du cercle C engendrera, non plus un cercle horizontal, mais une hélice cylindrique $\xi$ et toutes les hélices $\xi$ auront même *pas*.

Le diamètre $aa'$ du cercle C, au lieu d'engendrer un plan horizontal, engendrera une surface hélicoïde $\Sigma$ rectangulaire (surface du filet de vis carré).

L'ouverture du conoïde étant donnée par les droites $or^h$ et $or'^h$, nous pourrons toujours tracer un cercle B tel que l'arc rectifié $r^h q^h r'^h$ soit égal au diamètre $aa'$ du cercle C.

Nous construirons le plan M tangent en $q^h$ au cylindre vertical ayant la droite A pour axe et le cercle B pour base.

Le cylindre ayant le cercle B pour base coupera l'hélicoïde $\Sigma$ suivant une hélice $\delta$ dont on connaîtra l'inclinaison $\alpha$ par rapport au plan horizontal.

Dès lors, en menant sur le plan M une droite $r_1r_1'$ faisant avec une horizontale $vr_1'$ l'angle $\alpha$, et construisant sur les deux droites : 1° $\overline{qn}$ verticale et égale au rayon du cercle C ; et 2° $r_1r_1'$ telle que l'on a $[\overline{r_1r_1'} . \cos \alpha = \text{arc rectifié } r^h r'^h]$, une ellipse $E_1$ (ces deux droites $qn$ et $r_1r_1'$ étant des diamètres conjugués de cette ellipse $E_1$), en enroulant la courbe $E_1$ sur le cylindre ayant le cercle B pour base, on aura une courbe à double courbure E qui sera la directrice du conoïde, l'axe A étant la seconde directrice de cette surface gauche.

Et il est évident que si l'on coupe le conoïde et la surface rampante par une suite d'hélicoïdes rectangulaires parallèles entre elles et à la surface $\Sigma$, on obtiendra des hélices sur la surface rampante et des génératrices droites horizontales sur le conoïde qui se couperont en des points qui appartiendront à la courbe $\xi$ intersection des deux surfaces rampante et conoïde.

Et par la construction, on voit de suite aussi que la projection horizontale de la courbe $\xi$ sera identiquement celle que l'on obtenait lorsque les deux surfaces étaient l'une annulaire et l'autre conoïde, car l'on est conduit à exécuter, sur le plan horizontal de projection, et dans les deux cas des constructions identiques.

La méthode *géométrique* qui nous a permis de démontrer, avec une grande facilité et aussi avec simplicité, que la projection horizontale de l'intersection

d'un conoïde avec une surface *annulaire* ou avec une surface *rampante* était une spirale d'Archimède, nous conduit à *généraliser* le problème.

Et en effet :

Étant donnés un plan horizontal H et un axe vertical Z perçant ce plan H en un point $o$, nous pourrons faire passer par la droite Z un plan M et tracer dans ce plan M une courbe arbitraire $\delta$, et par un point $m$ de $\delta$ mener une droite X horizontale et coupant l'axe Z en un point $z$.

Nous pourrons ensuite concevoir un cylindre de révolution $\Delta$ ayant pour axe la droite Z et coupant le plan horizontal H suivant un cercle C dont le rayon R sera égal à la distance $mz$ du point $m$ de la courbe $\delta$ à l'axe Z.

Menons un plan T tangent au cylindre $\Delta$ suivant une génératrice L, et traçons dans ce plan T une courbe $\delta'$ identique à la courbe $\delta$ et telle que le point $m'$ de $\delta'$ soit l'homologue du point $m$ de $\delta$; et qu'ainsi menant dans le plan T et par ce point $m'$ une droite horizontale X', les deux droites X et X' se trouvent à la même hauteur au-dessus du plan horizontal H.

Et de plus, concevons que la courbe $\delta'$ est placée par rapport à la droite X', de la même manière que la courbe $\delta$ est placée par la droite X, et que par conséquent la tangente $\theta'$ en $m'$ à la courbe $\delta'$ fasse avec l'axe X' un angle égal à celui que fait la tangente $\theta$ en $m$ à la courbe $\delta$ avec la droite X.

Cela fait, enroulons le plan T sur le cylindre $\Delta$, la courbe plane $\delta'$ se transformera en une courbe $\delta'_1$ qui, tracée sur le cylindre $\Delta$, se projettera horizontalement suivant un arc du cercle C.

Imaginons maintenant que la courbe $\delta$ tourne autour de l'axe Z, elle engendrera une surface de révolution $\Sigma$.

Imaginons qu'une droite G se meuve, dans l'espace, parallèlement au plan H et en s'appuyant à la fois et sur l'axe Z et sur la courbe à double courbure $\delta'_1$; cette droite G engendrera un conoïde $\phi$.

Les surfaces $\Sigma$ et $\phi$ se couperont suivant une courbe $\xi$ dont la projection $\xi^h$ sur le plan H sera une spirale d'Archimède ayant le point $o$ pour *pôle* ou origine.

Et en effet : si je divise la droite X en parties égales à partir du point $m$ et par des points 1, 2, 3, 4, etc., et si je divise aussi la droite X' en parties égales à partir du point $m'$, et par des points 1', 2', 3', 4', etc. les divisions de X' étant égales entre elles et aux divisions de X, en élevant par les points 1, 2, 3, 4, etc. des verticales, elles couperont la courbe $\delta$ en des points $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, etc., et les verticales menées par les points 1', 2', 3', 4', etc. couperont la courbe $\delta'$ en des points $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$, $y'_4$, etc.

Or, il est évident que les droites X et X' étant considérées comme axe respectif des abscisses pour les courbes $\delta$ et $\delta'$, les ordonnées des points $y_1$ et $y'_1$, $y_2$ et $y'_2$, etc. seront égales entre elles.

Par conséquent, en mettant en projection sur le plan H, les cercles décrits par les divers points $y_1$, $y_2$, $y_3$, etc. de la courbe $\delta_1$ et les génératrices droites du conoïde $\psi$ passant respectivement par les points $y_1''$, $y_2''$, $y_3''$, etc. de la courbe à double courbure $\delta_1'$, et qui sont les transformés des points homologues $y_1'$, $y'$, $y_3'$, etc. de la courbe plane $\delta'$; les projections de ces cercles et de ces droites se couperont en des points qui appartiendront à la courbe $\xi^h$, laquelle se trouvera évidemment construite de la même manière que la spirale plane d'Archimède.

On pourrait encore concevoir le plan H, l'axe Z, le plan M, la courbe $\delta$, son point $m$ et la droite X, et le cylindre $\Delta$ passant par le point $m$, et mener au cylindre $\Delta$ un plan T tangent au point $m$, et tracer dans ce plan T et par le point $m$ une droite horizontale X′ et une courbe $\delta'$ qui passant par le point $m$ serait identique à la courbe $\delta$ et placée, par rapport à la droite X′, comme la courbe $\delta$ l'est par rapport à la droite X.

Cela fait : concevons que le point $m$ décrive sur le cylindre $\Delta$ une hélice $6$ faisant avec le plan horizontal H un angle $\alpha$.

Nous tracerons dans le plan T et par le point $m$ une droite $X_1'$ faisant avec X′ un angle $\alpha$, et par les divers points 1′, 2′, 3′, 4′, etc. de X′, nous élèverons des verticales qui perceront la droite $X_1'$ en des points $1_1'$, $2_1'$, $3_1'$, $4_1'$, etc., et nous transformerons la courbe plane $\delta'$ (et dans le plan T) en une courbe $\delta''$, qui aura pour axe des abscisses la droite $X_1'$, pour origine le point $m'$, et dont les ordonnées seront verticales et respectivement égales aux ordonnées de la courbe $\delta'$.

On enroulera cette courbe $\delta''$ sur le cylindre $\Delta$, et l'on aura une courbe à double courbure $\delta_1''$.

En faisant mouvoir la courbe $\delta$ sur l'hélice $6$, la droite X restant toujours horizontale en s'appuyant sur l'axe Z, l'on engendrera une surface *rampante* $\Sigma_1$.

En faisant mouvoir une droite G sur l'axe Z et la courbe à double courbure $\delta_1''$, et parallèlement au plan horizontal H, l'on engendrera un conoïde $\psi_1$.

Les deux surfaces $\Sigma_1$ et $\psi_1$ se couperont suivant une courbe $\xi$, dont la projection $\xi^h$ sur le plan H sera évidemment une spirale d'Archimède.

Tout ce qui précède peut s'appliquer à la construction de la *tangentoïde*, considérée comme étant sur le plan H la projection de l'intersection d'un conoïde et d'une surface de *révolution* ou d'une surface *rampante*.

§ IV.

*Nouvelle construction de la tangente en un point de la spirale d'Archimède.*

Supposons une spirale d'Archimède complète, et dès lors composée de ses deux branches E et E' ayant au sommet $o$, la droite $o$D pour tangente (*fig.* 58).

En considérant la droite D comme l'origine des angles $\omega$, l'équation de cette courbe sera :

$$\rho = a\omega \qquad (1)$$

Si l'on prend un point $m$ sur la branche E, et que du point $o$ comme centre et avec le rayon vecteur $om$ pour rayon on décrive un cercle venant couper la droite D au point $p$, on aura, en désignant l'arc $mp$ par $x$ et $om$ par $\rho$ :

$$x : \rho :: \omega : 1$$

d'où

$$x = \rho . \omega$$

Et en vertu de l'équation (1), on aura :

$$x = \frac{\rho^2}{a} \qquad (2)$$

De sorte que si au point $p$ on élève une perpendiculaire à la droite D et égale à l'arc rectifié $pm$ on aura le point $q$ qui appartiendra à une parabole représentée par l'équation (2) et ayant dès lors son sommet au point $o$, origine de la spirale, et étant rapportée aux deux axes rectangulaires $o$D et $ok$ ($o$D étant l'axe des $\rho$ et $ok$ l'axe des $x$).

Cela posé :

Si l'on voulait construire la tangente $\theta$ au point $m$ de la spirale, on construirait la tangente $t$ au point $q$ de la parabole, on transformerait cette tangente $t$ en une spirale hyperbolique $\gamma$ ayant le point $o$ pour point asymptote et cette courbe serait tangente en $m$ à la spirale d'Archimède, et dès lors construisant la tangente en $m$ à la spirale hyperbolique $\gamma$, on aurait la tangente demandée $\theta$; et cela aurait lieu en vertu du théorème que nous avons établi lorsque nous avons examiné les diverses propriétés géométriques dont jouissait la spirale hyperbolique.

Si l'on distingue deux branches sur la parabole, l'une $o$P et l'autre $o$P', ces deux branches étant considérées comme se réunissant au sommet $o$, on voit de suite que la branche P sera la transformée de la branche E de la spirale, et que la branche P' sera la transformée de la seconde branche E' de la même spirale.

*Simplification dont la construction précédente est susceptible.*

Considérons (*fig.* 59) une branche E de la spirale d'Archimède; supposons que son origine soit au point $o$, et que sa tangente en $o$ soit la droite $o$D, et supposons que les angles $\omega$ seront comptés dans la direction indiquée par la flèche $y$ et à partir de la droite D.

Cette droite D coupera une demi-révolution de la spirale E en deux points $o$ et $m$.

Si l'on veut compter les angles à partir de D, mais dans le sens de la flèche $y'$, il faudra dans l'équation :

$$\rho = a\omega$$

remplacer $\omega$ par $(\pi - \omega')$.

Et l'équation de la spirale E sera dès lors :

$$\rho = a(\pi - \omega') \qquad (3)$$

| | | |
|---|---|---|
| Cette équation pour. . . . | $\omega' = o$ donnera | $\rho = a\pi$ |
| —— pour. . . . | $\omega' = \pi$ donnera | $\rho = o$ |
| ou, en d'autres termes, pour | $\omega' = o$ on trouve | le point $m$ |
| —— pour | $\omega' = \pi$ on trouve | le point $o$ |

Transformant maintenant la spirale ainsi que nous l'avons fait ci dessus, on aura pour l'équation de la transformée :

$$x = \frac{\rho^2}{a^2} - \pi . \rho \qquad (4)$$

Cette équation (4) est celle d'une parabole qui passe par l'origine $o$ et par le point $m$ (*); et qui a pour axe des $\rho$ la droite D, et pour axe des $x$ une per-

(*) C'est en 1817, lorsque j'étais sous-lieutenant d'artillerie à l'école d'application de Metz, que j'ai trouvé cette transformation remarquable de la spirale d'Archimède.

Ampère, alors inspecteur général de l'université, étant venu à Metz, je lui fis part de mes résultats; aussitôt il me dit que cette propriété lui était connue, mais qu'il ne pouvait me dire dans quel ouvrage il l'avait lue; mais que très-certainement pour lui elle n'était pas nouvelle.

Et longtemps après cette époque, Ampère n'a jamais pu retrouver dans sa mémoire le nom de l'auteur qui le premier avait donné cette transformation.

Mais, sans aucun doute, avant 1817 cette transformation était connue, puisque Ampère me l'a dit; on connaît l'immense mémoire dont ce savant était doué. Le nom de l'*auteur*, il est vrai, était oublié, mais l'existence de la *propriété géométrique* était restée dans sa mémoire.

pendiculaire à la droite D; et qui a le point $o$ pour origine de ses coordonnées, puisque l'équation (4) est satisfaite par $x=o$ et $\rho=o$.

La parabole et la spirale jouissent, pour le point $m$, d'une propriété remarquable : *elles sont tangentes l'une à l'autre en ce point* m.

En effet :

Si, sur le milieu $l$ de la droite $om$, on mène la droite $lq$ perpendiculaire à $om$, cette droite $lq$ sera l'axe infini de la parabole.

Si donc, on prend $\overline{lq}=2.\overline{nl}$, en joignant les points $q$ et $m$ on aura la tangente en $m$ à la parabole : (puisque la sous-tangente est double de l'abscisse dans la parabole).

Si, au point $m$ on mène la normale à la parabole, $lr$ sera la sous-normale.

Calculons cette sous-normale; on a :

$$\overline{rl}\,.\,\overline{lq}=\overline{lm}^2 \qquad (5)$$

Or :

$$\overline{lm}=\tfrac{1}{2}.\overline{om}=\tfrac{1}{2}.\rho=\tfrac{1}{2}.a\pi$$

et

$$\overline{lq}=2.\overline{ln}=\frac{\pi^2.a}{2}$$

L'équation (5) donnera donc :

$$\overline{rl}=\frac{a}{2}$$

Mais en menant $op$ perpendiculaire sur $om$, on aura :

$$\overline{op}=2.\overline{lr}$$

puisque

$$\overline{lm}=\tfrac{1}{2}.\overline{om}$$

On aura donc : $\overline{op}=a$.

Or, pour la spirale, la sous-normale est égale à $a$ en vertu de l'équation de cette courbe, qui est : $\rho=a(\pi-\omega')$.

La droite $pm$ est donc normale à la spirale; la droite $mq$ est donc tangente à cette même spirale.

Si maintenant, au lieu de prendre la droite $o$D pour origine des angles $\omega'$, on prenait la droite D', l'équation de la spirale serait alors :

$$\rho=a(\text{B}-\omega').$$

Et l'on voit que, si l'on transformait la spirale sur le rayon vecteur $om'$,

comme on l'a fait pour le rayon vecteur *om*; il faudrait, dans tous les calculs précédents, remplacer $\pi$ par B, et dès lors on arriverait au même résultat, savoir : que la parabole (ayant pour origine le point *o*, pour axe des $\rho$ la droite D' et pour axe des $x$ une perpendiculaire à D' menée par le point *o*) passerait par le point *m'* et aurait en ce point *m'* même tangente avec la spirale.

Par conséquent, la construction de la tangente en un point *m'* d'une spirale E, dont l'équation n'est point connue (cette spirale étant donnée par son tracé), sera la suivante.

De l'origine *o*, comme centre et avec un rayon *ol'* égal à la moitié du rayon vecteur *om'*, on décrira un cercle coupant la courbe E au point *b*.

On mènera par le point *l'* une perpendiculaire à *om'*, et on portera sur cette perpendiculaire une droite *l'q'* égale au double de l'arc rectifié *l'b*.

En joignant les points *q'* et *m'*, on aura la tangente demandée.

§ V.

*Du lieu géométrique des foyers des sections elliptiques d'un conoïde droit ou oblique.*

Concevons les deux plans de projection, horizontal H et vertical V.

Traçons dans le plan V un cercle C ayant le point *o* pour centre.

Menons une droite Z perpendiculaire au plan H.

Concevons par le centre *o* un plan horizontal M, et par la droite Z un plan N parallèle au plan V.

Le cercle C pourra occuper sur le plan V deux positions spéciales par rapport à la droite Z ; ainsi, élevant par le centre *o* une droite Y perpendiculaire au plan V, cette droite Y pourra s'appuyer sur la droite Z ou ne pas la rencontrer.

En faisant mouvoir une droite G parallèlement au plan H, et s'appuyant pendant son mouvement sur la droite Z et sur le cercle C, on engendre la surface gauche Σ, connue des géomètres sous le nom de *conoïde*.

Ce conoïde sera dit *droit*, si la droite Y coupe la droite Z.

Ce conoïde sera dit *oblique*, si la droite Y ne coupe pas la droite Z.

Cela posé :

On sait, par ce qui a été démontré précédemment, que si l'on conçoit un plan vertical V' parallèle au plan V et tel que les deux plans V et V' soient également distants de la droite Z, ce plan V' coupera le conoïde Σ suivant un

cercle C′ de même rayon que le cercle C, et que cela aura lieu que le conoïde soit *droit* ou *oblique*.

L'on sait aussi, que tout plan P parallèle au plan V coupe le conoïde suivant une ellipse dont le grand axe est parallèle à la droite Z, si le plan P est situé entre les plans V et V′; et suivant une ellipse dont le grand axe est parallèle à la droite I intersection des plans de projection H et V, si le plan P est situé au delà du plan V ou du plan V′, par rapport à la droite Z.

Cela posé :

Il est évident que : 1° désignant par E, E′, E″, etc. les ellipses sections du conoïde par les plans P situés entre les plans V et V′, le lieu de leurs foyers sera une courbe plane $\alpha$, située dans le plan A lequel passe par la droite Z et le centre $o$; et cela aura lieu que le conoïde soit *droit* ou *oblique*.

2° Désignant par $E_1$, $E_1'$, $E_1''$, etc. les ellipses sections du conoïde, par les plans P situés au delà des plans V et V′; le lieu des foyers de ces courbes sera une courbe plane $6$, située dans un plan B, qui passant par le centre $o$ du cercle C, sera parallèle au plan horizontal H; et cela aura lieu que le conoïde soit *droit* ou *oblique*.

On voit donc de suite, que la courbe $\alpha$ située dans le plan A sera une courbe fermée, et que la courbe $6$ située dans le plan B sera une courbe composée de deux branches infinies.

1° *La courbe $\alpha$ est une ellipse.*

Et en effet :

Désignons par $i$ le point en lequel la droite Z est coupée par le plan B, et par G et G′ les deux génératrices droites suivant lesquelles le conoïde $\Sigma$ est coupé par le plan B.

Menons un plan P′ parallèle au plan V et compris entre les plans V et V′, ce plan P′ coupera la droite $oi$ qui unit le point $i$ avec le centre $o$ du cercle C, en un point $p'$ et la droite G en un point $g'$.

Ce plan P′ coupera le conoïde $\Sigma$ suivant une ellipse E′ qui aura pour demi petit axe la droite $\overline{p'g'}$, et dont le demi grand axe sera parallèle à la droite Z (c'est à dire vertical) et égal au rayon R du cercle C.

Le foyer $f'$ de l'ellipse E′ aura donc pour hauteur au-dessus du plan horizontal H, une droite $\overline{p'f'}$ qui sera telle que l'on aura :

$$\overline{p'f'}^2 = R^2 - \overline{p'g'}^2 \quad (1)$$

Désignons par $\mu$ l'angle que la droite G fait avec la droite $oi$; par $\lambda$ l'angle que la droite G fait avec la droite $\overline{g'p'}$.

On aura dans le triangle $ip'g'$,

$$\overline{p'g'} : \sin\mu :: \overline{ip'} : \sin\lambda.$$

D'où l'on tire :

$$\overline{p'g'} = \overline{ip'}\frac{\sin\mu}{\sin\lambda} \qquad (2)$$

Portant la valeur $\overline{p'g'}$ (2) dans l'équation (1), on aura :

$$\overline{p'f'}^2 = R^2 - \overline{ip'}^2\frac{\sin^2\mu}{\sin^2\lambda}$$

Désignant dans le plan (Z, o) ou A de la courbe $\alpha$, $\overline{p'f'}$ par $y$ et $\overline{ip}$ par $x$, on aura :

$$y^2 + x^2\left(\frac{\sin\mu}{\sin\lambda}\right)^2 = R^2 \qquad (3)$$

Cette équation (3) est celle d'une ellipse rapportée aux axes rectangulaires $\overline{oi}$ et Z, le point $i$ étant l'origine des coordonnées et en même temps le centre de la courbe. Dans le cas que nous venons d'examiner, le conoïde $\Sigma$ est *oblique*.

Si les angles $\mu$ et $\lambda$ sont complémentaires, alors la droite $\overline{p'g'}$ est perpendiculaire sur la droite $\overline{oi}$, alors le conoïde est *droit*, et l'ellipse $\alpha$ a pour équation

$$y^2 + x^2 . \operatorname{tang}^2\mu = R^2 \qquad (4)$$

Ainsi, que le conoïde soit *droit* ou *oblique*, la courbe $\alpha$ est toujours une ellipse ayant le point $i$ pour centre et ses axes dirigés suivant les droites rectangulaires entre elles Z et $oi$.

L'axe dirigé suivant Z est égal à 2R ou au diamètre du cercle C ; l'axe dirigé suivant $oi$ est égal à la droite $oo'$, c'est-à-dire à la distance des centres des deux cercles C et C' situés dans les plans V et V'.

2° *La courbe* $\mathcal{E}$ *est une hyperbole.*

Et en effet, désignons par $i$ le point en lequel la droite Z est coupée par le plan B, par G et G' les deux génératrices droites suivant lesquelles le conoïde $\Sigma$ est coupé par ce même plan B.

Menons un plan P″ parallèle au plan V et situé au delà du plan V ou du plan V', ce plan P″ coupera la droite $oi$ qui unit le point $i$ avec le centre $o$ du cercle C en un point $p''$ et la droite G en un point $g''$.

Ce plan P″ coupera le conoïde $\Sigma$ suivant une ellipse E″ qui aura pour demi grand axe la droite $g''p''$, et dont le demi petit axe sera parallèle à la droite Z et égal au rayon R du cercle C.

Concevons l'arête culminante du conoïde $\Sigma$, par rapport au plan horizontal H ; cette arête, désignée par K, sera la génératrice de contact du conoïde $\Sigma$ et d'un plan tangent à ce conoïde, mené parallèlement au plan B.

Cette droite K sera dans le plan A qui passe par la droite Z et le centre $o$ du cercle C.

La distance de cette droite K à la droite $\overline{oi}$, sera égale au rayon R du cercle C.

Et le plan P″ coupera la droite K en un point $q''$; on aura donc : $\overline{q''p''} = R$.

Cela posé :

Si du point $q''$, comme centre et avec un rayon égal à $\overline{p''g''}$, nous décrivons dans le plan P″ un cercle $\delta$, ce cercle $\delta$ coupera la droite $\overline{p''g''}$ en un point $f''$ qui sera l'un des foyers de l'ellipse E″.

Et l'on aura :

$$\overline{q''f''}^2 = R^2 + \overline{f''g''}^2 \qquad (5)$$

Désignons par $\mu$ l'angle que la droite G fait avec la droite $\overline{oi}$; par $\lambda$ l'angle que la droite G fait avec la droite $\overline{g''p''}$;

On aura dans le triangle $ip''g''$ ;

$$\overline{p''g''} : \sin\mu :: ip'' : \sin\lambda$$

D'où l'on tire :

$$\overline{p''g''} = \overline{ip''} \cdot \frac{\sin\mu}{\sin\lambda} \qquad (6)$$

Portant la valeur $\overline{p''g''}$ (6) dans l'équation (5) et remarquant que $\overline{p''g''} = \overline{q''f''}$, on aura :

$$\overline{ip''}^2 \left(\frac{\sin\mu}{\sin\lambda}\right)^2 = R^2 + \overline{f''g''}^2 \qquad (7)$$

Et désignant dans le plan B, $\overline{ip''}$ par $x$ et $\overline{f''g''}$ par $y$,

On aura :

$$x^2 \cdot \left(\frac{\sin\mu}{\sin\lambda}\right)^2 - y^2 = R^2 \qquad (8)$$

Cette équation (8) est celle d'une hyperbole rapportée aux axes obliques $oi$ et $ib$, en désignant par $ib$ la droite menée par le point $i$ et dans le plan B et parallèlement à la droite $p''g''$.

Le point $i$ sera l'origine des coordonnées et sera en même temps le centre de l'hyperbole.

Si les angles $\mu$ et $\lambda$ sont complémentaires, alors on a :

$$x^2 \cdot \text{tang}^2\mu - y^2 = R^2 \qquad (9)$$

Et dans ce cas, l'hyperbole $\mathfrak{G}$ est rapportée aux axes rectangulaires $\overline{oi}$ et $\overline{ib}$.

Il est facile de reconnaître que dans les deux cas, les droites G et G' sont les asymptotes de l'hyperbole $\mathfrak{G}$.

Dans le cas du conoïde *oblique*, on a pour équation de l'hyperbole $\mathfrak{G}$ l'équation (8).

Dans le cas du conoïde *droit*, on a pour l'équation de l'hyperbole $\mathfrak{G}$ l'équation (9).

Dans le 1[er] *cas* : les demi-diamètres conjugués de l'hyperbole $\mathfrak{G}$, sont dirigés suivant les droites ou axes obliques $\overline{oi}$ et $\overline{ib}$ et ont pour valeur, savoir : R pour l'axe non-transverse dirigé suivant $\overline{ib}$, et $\left(R \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \mu}\right)$ pour l'axe transverse dirigé suivant $oi$; et les points en lesquels l'hyperbole est coupée par le diamètre transverse, ne sont autres que les centres $o$ et $o'$ des cercles C et C' situés dans les plans V et V'.

Dans le 2[e] *cas* : les axes de l'hyperbole $\mathfrak{G}$, sont dirigés suivant les droites ou axes rectangulaires $\overline{oi}$ et $\overline{ib}$ et ont pour valeur, savoir : 2R pour l'axe non-transverse dirigé suivant $\overline{ib}$, et $\frac{\text{tang}\,\mu}{2R}$ pour l'axe transverse dirigé suivant $\overline{oi}$; et les sommets de l'hyperbole ne sont autres que les centres $o$ et $o'$ des cercles C et C' situés dans les plans V et V'.

*Nouveau conoïde elliptique.*

En vertu de ce qui précède, on voit que si l'on a un plan horizontal A ; si par un point $i$ de ce plan A on mène une droite G, faisant avec ce plan A un angle $\mu'$, et qu'on la projette orthogonalement sur le plan A suivant une droite $G^h$; si par le point $i$ on mène dans le plan A une droite Z perpendiculaire à $G^h$; si par cette droite Z on mène un plan X, faisant avec la droite G un angle $\lambda'$; on pourra faire mouvoir parallèlement au plan X, une droite d'une longueur constante R, et de telle manière que l'une de ses extrémités r parcourant la droite G, son autre extrémité $r'$ s'appuie sur le plan A.

On engendrera ainsi, un conoïde $\varphi$ qui jouira de la propriété d'être coupé par le plan A suivant une ellipse E, ayant le point $i$ pour centre et ses axes dirigés suivant les droites $G^h$ et Z.

Le demi-axe dirigé suivant Z sera égal à R, et le demi-iaxe dirigé suivant $G^h$ sera égal à : $R \frac{\sin \lambda'}{\sin \mu'}$.

L'angle $\lambda'$ pourra être droit, alors la droite mobile R fera constamment un angle droit avec la droite G, tandis que, lorsque l'angle $\lambda'$ est aigu, la droite R fait en chacune de ses positions dans l'espace un angle différent avec la droite G.

Dans le cas où l'angle $\lambda'$ est droit, le demi-axe de l'ellipse E dirigé suivant la droite $G^h$ aura pour valeur $\frac{R}{\sin \mu'}$.

Et l'on voit de suite que la réciproque est vraie, savoir :

Que se donnant : 1° sur un plan A une ellipse E ayant son centre en un point $i$ et ses axes égaux à 2R et 2L (l'axe 2R coupant l'ellipse E en les deux points $r$ et $r'$, et l'axe 2L coupant l'ellipse E en les deux points $l$ et $l'$, en sorte que les quatre points $r$, $r'$, $l$ et $l'$ seront les quatre sommets de l'ellipse E), et 2° une droite G passant par le point $i$ et située dans le plan U, lequel sera mené par l'axe 2L, et dès lors perpendiculairement au plan A, et 3° un plan X passant par l'axe 2R ; si l'on fait mouvoir une droite K parallèlement au plan X et s'appuyant pendant son mouvement sur la droite G et sur l'ellipse E, chaque génératrice K aura sa partie interceptée par la droite G et le plan A égal à R, si toutefois le plan X et la droite G sont dirigés dans l'espace de manière à satisfaire aux conditions ci-après :

Du point $l$ comme centre, et avec un rayon égal à R, décrivons dans le plan U un cercle D, la droite G devra couper ou au moins toucher ce cercle D.

La droite G coupant le cercle D en deux points $d$ et $d'$, le plan X passant par l'axe 2R devra être parallèle à l'une ou à l'autre des droites $dl$ ou $d'l$.

Et en désignant par X le plan parallèle à la droite $dl$ et par X' le plan parallèle à la droite $d'l$, on voit que la *réciproque* est vraie, en vertu de la proposition *directe* énoncée précédemment ; car en vertu de la proposition directe, on sait qu'en faisant mouvoir une droite d'une longueur constante R parallèlement au plan X ou au plan X', l'une de ses extrémités parcourant la droite G, et son autre extrémité s'appuyant sur le plan A, le conoïde $\varphi$ (ainsi engendré) sera coupé par le plan A suivant une ellipse E' ayant le point $i$ pour centre et ses axes égaux à 2R et 2L.

La proposition *réciproque* nous démontre que tant que la droite G coupera le cercle D, il existera deux conoïdes du système $\varphi$ (ayant une *directrice* droite G) s'entrecoupant suivant la même ellipse E et ayant pour plan *directeur*, l'un le plan X et l'autre le plan X'.

Et que si la droite G est tangente au cercle D, alors il n'existera qu'un seul conoïde $\varphi$ ; mais alors les deux plans X et X' se confondent en un seul plan qui est

perpendiculaire à la droite G dans l'espace, ou, en d'autres termes, la génératrice droite du conoïde $\varphi$ se meut en s'appuyant sur l'ellipse E et sur la droite G et en coupant cette droite G sous l'angle droit.

On sait que si l'on coupe un cylindre de révolution par un plan oblique à son axe G et de manière à avoir pour section une ellipse E, en faisant mouvoir une droite K sur l'ellipse E et sur l'axe G de manière à ce que cette génératrice mobile K coupe toujours sous un angle constant $\gamma$ l'axe G, on engendre un conoïde $\chi$ qui jouit de la propriété que toutes les parties de ses génératrices droites K interceptées entre l'axe G et l'ellipse E sont constantes (*).

Ce conoïde $\chi$ a un cône *directeur* qui est de révolution et qui a pour axe l'axe G et dont le demi-angle au sommet est égal à $\gamma$.

Si l'angle $\gamma$ est droit, le conoïde $\chi$ n'est autre que le cônoïde $\varphi$, pour lequel nous avons vu ci dessus que la génératrice droite se mouvait parallèlement à un plan X perpendiculaire à la *directrice* droite G.

Il existe donc trois espèces de conoïdes distincts entre eux :

1° Les conoïdes $\Sigma$ ayant une droite et une ellipse pour *directrices* et un plan *directeur*, et pour lesquels les génératrices droites coupent la directrice droite sous un angle constant et qui est droit, et pour lesquels les parties de génératrices droites interceptées par la directrice droite et la directrice elliptique ne sont point égales entre elles, en d'autres termes varient en longueur de génératrice à génératrice ;

2° Les conoïdes $\varphi$ ayant une droite et une ellipse pour *directrices* et un plan *directeur*, et pour lesquels les génératrices droites coupent la directrice droite sous un angle variable de génératrice à génératrice, et pour lesquels les parties des génératrices droites interceptées entre la directrice droite et la directrice elliptique sont constantes et égales à l'un des demi-axes de l'ellipse directrice ;

3° Les conoïdes $\chi$ ayant une droite et une ellipse *directrices* et un cône *directeur*, et pour lesquels les génératrices droites coupent la directrice droite sous un angle constant, et pour lesquels les parties des génératrices droites interceptées entre la directrice droite et la directrice elliptique sont constantes, sont toutes égales entre elles.

Nous avons démontré précédemment que les conoïdes du système $\Sigma$ jouissent d'une propriété qui est remarquable, savoir que tous les plans parallèles au plan de l'ellipse directrice coupent ces conoïdes suivant des ellipses qui ont un axe constant.

(*) *Voyez* mon rapport sur le compas à ellipse de M. *Baradelle* fils, imprimé dans le Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale : tome 40e (avril 1841).

Cette propriété, pour les conoïdes du genre $\Sigma$, n'est qu'un cas particulier d'une propriété plus générale, savoir : que si l'on coupe un conoïde du système $\Sigma$ ou du système $\varphi$, par des plans parallèles entre eux et à la directrice droite Z, les courbes de sections seront des courbes de même nature et du même genre.

C'est ce que nous allons démontrer.

Concevons 1° un plan V sur lequel on a tracé une courbe arbitraire C; 2° un plan H coupant le plan V suivant une droite I et sous un angle arbitraire $\alpha$; 3° une droite Z, dirigée d'une manière arbitraire par rapport au plan H et coupant ce plan en un point $h$, mais cette droite Z étant dirigée parallèlement au plan V.

Imaginons une droite G se mouvant parallèlement au plan H en s'appuyant sur la droite Z et la courbe C.

On engendrera un conoïde $\Sigma'$ dont le mode de génération est le même que celui des conoïdes elliptiques $\Sigma$.

Menons un plan Q parallèle au plan V; ce plan Q coupera le conoïde $\Sigma'$ suivant une courbe E.

Je dis, que l'on pourra toujours construire un cylindre $\Delta$, ayant la courbe C pour *directrice*, et tel qu'il soit coupé par un certain plan Q, suivant une courbe $E_1$ identique avec la courbe E; en d'autres termes, je dis que les courbes E et $E_1$ seront superposables.

Et en effet :

Concevons une suite de génératrices droites G, G', G'', G''',..... de la surface $\Sigma'$; menons par la droite Z et chacune de ces génératrices un plan, nous aurons les plans sécants X, X', X'', X''',..... qui couperont le plan H suivant les droites K, K', K'', K''',..... lesquelles passeront toutes par le point $h$ et couperont la droite I aux points $p$, $p'$, $p''$, $p'''$,..... et couperont la droite J intersection du plan H et du plan Q, aux points $q$, $q'$, $q''$, $q'''$.....

Or, il est évident que si les points $p$, $p'$, $p''$,..... sont également espacés entre eux, les points $q$, $q'$, $q''$,..... seront aussi également espacés entre eux, et qu'une division $pp'$ de I sera à la division correspondante $qq'$ de J, comme $hp$ et $hq$ ou comme $hp'$ et $hq'$, etc. sont entre elles.

Il est encore évident, que les plans X, X', X'',..... couperont : 1° le plan V suivant des droites P, P', P'',..... parallèles entre elles et coupant la courbe C en les points $r$, $r'$, $r''$; et 2° le plan Q, suivant des droites R, R', R'',..... parallèles entre elles et aux droites P, P', P'',..... et coupant la courbe E aux points $t$, $t'$, $t''$.....

Il est évident que l'on aura : $lq = rp$, $t'q' = r'p'$, $t''q'' = r''p''$,..... puisque les droites G, G', G'',..... sont parallèles au plan H.

Cela posé :

Nous pouvons toujours concevoir que le plan H soit choisi de telle manière qu'il coupe la courbe C en un point $m$.

Dès lors, désignant par G la génératrice qui passe par le point $m$, cette génératrice sera dans le plan H et les points $p$ et $r$ de la courbe C' se confondront avec le point $m$, et les points $q$ et $t$ de la courbe E se confondront en un point $n$ qui sera sur la courbe E, et qui sera celui en lequel cette courbe E coupe la génératrice droite G.

Cela posé :

Menons par la droite I un plan quelconque H', et décrivons dans ce plan et du point $m$ comme centre et avec un rayon égal à $b$ divisions $q'$ de la droite J (six divisions, par exemple), un cercle $\delta$; ensuite d'un point $y$ situé sur la droite I et correspondant à $b$ divisions $pp'$ de cette droite I (le même nombre de divisions que ci-dessus, et ainsi six divisions, par exemple), menons une tangente T au cercle $\delta$ et touchant ce cercle en un point $t$.

Il est évident que la droite $mt$ sera égale à $b$ divisions $qq'$, et que si par les points $p$, $p'$, $p''$,..... de I, on mène des parallèles à la droite T, ces droites diviseront la droite $mt$ en divisions égales entre elles et à l'une des divisions $qq'$, $q'q''$.....

Enfin, si l'on regarde la courbe C comme directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite T, ce cylindre sera coupé par le plan Y, mené par la droite $mt$ parallèlement à la droite Z suivant une courbe E, qui sera superposable avec la courbe E, puisque ces deux courbes auront même ordonnée pour une même abscisse [ayant soin de prendre pour origine des abscisses (comptées sur $mt$), le point $m$ pour la courbe E, et pour origine des abscisses (comptées sur J), le point $n$ pour la courbe E].

Il est évident que les conoïdes du système $\varphi$ jouissent de la même propriété ; savoir : que si on coupe un de ces conoïdes par des plans parallèles entre eux et à la directrice droite Z, deux quelconques des sections planes obtenues pourront toujours être placées dans l'espace de telle manière, qu'en leurs nouvelles positions, on puisse les envelopper par un cylindre.

De ce qui précède, on peut conclure le *Théorème* suivant :

*Toute surface gauche engendrée par une droite G se mouvant parallèlement à un plan H en s'appuyant sur une droite Z et sur une courbe arbitraire à simple ou à double courbure C, est coupée par deux plans X et X' parallèles entre eux et à la directrice droite Z, suivant deux courbes E et E' telles que si par la droite I, intersection du plan directeur H et du plan sécant X, on mène une suite de plans P, $P_{,,}$, $P_{,}$, $P$,.....et par*

*la courbe* E *une suite de cylindres* $\Delta$, $\Delta_{,}$, $\Delta_{,,}$, $\Delta_{,,,}$..... *ayant leurs génératrices droites respectivement parallèles aux plans* P, $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$..... *On pourra toujours mener par une droite* Z, *parallèle à la droite* Z *et située dans le plan* X, *une suite de plans* R, $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$.... *tels qu'ils coupent respectivement les cylindres* $\Delta$, $\Delta_{,}$, $\Delta_{,,}$, $\Delta_{,,,}$..... *suivant des courbes* D, $D_{,}$, $D_{,,}$, $D_{,,,}$..... *toutes identiques ou superposables entre elles et à la section* E'.

Mais cet énoncé a besoin d'être complété en ce qui concerne les cylindres $\Delta$, $\Delta_{,}$, $\Delta_{,,}$,.... car on ne pourra mener qu'un seul cylindre parallèle à l'un quelconque des plans P, $P_{,}$, $P_{,,}$,.... Et en effet : imaginons deux plans quelconques Y et Y' passant par la directrice droite Z et coupant la droite I intersection du plan directeur H et du plan X en les points *a* et *b* et coupant la droite I' intersection des plans H et X' en les points *a'* et *b'*.

Sur *ab*, comme hypoténuse, on construira un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit sera égal à $\overline{a'b'}$; on aura ainsi un triangle *abm*.

En faisant tourner ce triangle autour de *ab* comme axe, le sommet *m* de l'angle droit décrira un cercle $\xi$ dont le plan sera perpendiculaire à la droite *ab* et dont le centre sera situé sur cette même droite *ab*.

On concevra deux cônes de révolution ayant *ab* pour axe commun et le cercle $\xi$ pour base commune, l'un de ces cônes A aura le point *a* pour sommet, et l'autre B aura le point *b* pour sommet.

Cela posé :

Le plan P coupera le cône A suivant une droite K et le cône B suivant une droite L, les génératrices du cylindre $\Delta$ seront parallèles à la droite K, et le plan R sera parallèle à la droite L.

Et l'on doit observer que cette construction est bien celle que nous avons employée ci-dessus, lorsque nous avons transformé le conoïde général du genre $\Sigma$ en un cylindre.

Parmi les conoïdes du genre $\Sigma$, nous devons faire remarquer le conoïde particulier $\Sigma$, engendrée de la manière suivante :

Concevons : 1° deux plans V et H se coupant suivant une droite I, et faisant entre eux un angle aigu $\alpha'$; 2° une droite Z parallèle aux plans V, et dirigée dans l'espace de manière à faire un angle droit avec la droite I, sans couper cette droite et perçant le plan H au point *h*.

D'un point *o* situé sur la droite I, décrivons dans le plan V un cercle C d'un rayon arbitraire R.

Cela posé :

Imaginons une droite G se mouvant parallèlement au plan H en s'appuyant sur la droite Z et sur le cercle C ; on obtiendra un conoïde $\Sigma$.

Il pourra arriver deux cas : 1° la droite *oh* pourra être perpendiculaire à la

droite I, et dans ce cas le plan H sera perpendiculaire au plan (Z, $o$), et 3° la droite $oh$ pourra être oblique à la droite I, et dans ce cas le plan H sera oblique par rapport au plan (Z, $o$).

Nous désignerons par $\Sigma'_{,}$ le premier conoïde et par $\Sigma''_{,}$ le second conoïde.

Cela posé :

Nous savons, d'après ce qui a été dit ci-dessus, que si l'on mène deux plans parallèles entre eux et à la directrice droite Z, les deux sections seront des *sections cylindriques*.

Par conséquent, tout plan X parallèle au plan V coupera les conoïdes $\Sigma'_{,}$ et $\Sigma''_{,}$ suivant des ellipses dont les centres seront situés sur la droite $oh$ et dont les axes seront respectivement parallèles aux droites I et Z (qui sont rectangulaires entre elles). Le demi-axe parallèle à Z sera constant et sera pour chaque ellipse de section égal à R ou au rayon du cercle C.

Le lieu des foyers de ces ellipses de section sera soit pour le conoïde $\Sigma'_{,}$, soit pour le conoïde $\Sigma''_{,}$ : 1° une ellipse $e$ unissant tous les foyers des sections faites par des plans X compris entre les plans V et V′ (le plan V′ parallèle au plan V, étant distant de la droite Z, ainsi que le plan V l'est de cette même droite Z ; ou, en d'autres termes, le plan V′ coupant soit le conoïde $\Sigma'_{,}$, soit le conoïde $\Sigma''_{,}$ suivant un cercle C′ du rayon R et dont le centre $o'$ sera situé sur la droite $oh$, et de telle sorte que l'on a : $\overline{oh}=\overline{o'h}$).

2° Une hyperbole $e_{,}$, unissant tous les foyers des sections elliptiques données par les plans X situés au delà des plans V et V′.

L'ellipse $e$ sera située dans le plan (Z, $o$) ;

L'hyperbole $e_{,}$ sera située dans le plan H.

Cela posé :

1° Il est évident que l'hyperbole $e_{,}$ aura son centre au point $h$ et son axe transverse dirigé suivant $oo'$, et son axe non-transverse dirigé parallèlement à la droite I, lorsque l'on aura pris le conoïde $\Sigma'_{,}$.

2° Il est évident que l'hyperbole $e_{,}$ aura son centre au point $h$ et l'un de ses diamètres dirigé suivant $oo'$, et son diamètre conjugué dirigé parallèlement à la droite I, lorsque l'on aura pris le conoïde $\Sigma''_{,}$.

Les conoïdes $\Sigma'_{,}$ et $\Sigma''_{,}$ nous conduisent donc comme les conoïdes *droit* et *oblique* (ceux pour lesquels les plans V et H sont rectangulaires entre eux), à des hyperboles construites, l'une sur ses axes et l'autre sur un système de diamètres conjugués.

Ainsi, les conoïdes $\Sigma'_{,}$ et $\Sigma''_{,}$, en ce qui concerne l'hyperbole $e_{,}$, ne nous apprennent rien de nouveau; mais si nous examinons l'ellipse $e$, nous arriverons à des résultats nouveaux.

Et en effet :

Les conoïdes droit et oblique, ceux pour lesquels les plans V et H étaient rectangulaires entre eux, nous donnaient pour le lieu des foyers de leurs sections elliptiques, une ellipse rapportée à ses axes, tandis que les conoïdes $\Sigma_{,}'$ et $\Sigma_{,}''$ (pour lesquels les plans V et H se coupent sous un angle aigu $\alpha'$) nous donnent pour le lieu des foyers de leurs sections elliptiques, une ellipse rapportée à ses diamètres conjugués, dirigés l'un suivant Z et l'autre suivant $oo'$.

Ceci nous conduit donc encore à un second nouveau conoïde elliptique, et engendré de la manière suivante (lorsque nous considérons l'ellipse $e$ comme étant le lieu des foyers des sections elliptiques du conoïde $\Sigma_{,}'$).

*Construction d'un second nouveau conoïde elliptique.*

Étant donnés un plan A et un point $i$ sur ce plan, menons par ce point $i$ et dans le plan A, deux droites M et M′ comprenant entre elles un angle aigu $\epsilon$.

Portons sur M, à partir du point $i$, une longueur $\overline{im}$, nous aurons le point $m$.

Portons sur M′, à partir du point $i$, une longueur $\overline{im'}$, nous aurons le point $m'$.

Construisons sur $\overline{im}$ et $\overline{im'}$ comme demi-diamètres conjugués une ellipse $e$, ayant le point $i$ pour centre.

Menons par la droite M un plan H perpendiculaire au plan A; traçons dans ce plan H, du point $m$ comme centre et avec $im'$ comme rayon, un cercle $\delta$;

Menons du point $i$, une droite G située dans le plan H et coupant le cercle $\delta$ en deux points $g$ et $g'$;

Si l'on fait mouvoir sur la droite G et l'ellipse $e$ une droite d'une longueur constante $im'$, cette droite pourra engendrer deux conoïdes l'un $\varphi_{,}$, l'autre $\varphi_{,}'$; le premier ayant pour plan directeur nn plan U, passant par la droite M′ et mené parallèlement au rayon $mg$, et le second ayant pour plan directeur un plan U′, passant par la même droite M′ et mené parallèlement au rayon $mg'$.

Nous retombons donc sur ce qui existait dans le cas où l'on avait pour directrice courbe du conoïde $\varphi$ une ellipse tracée sur ses axes.

Mais si nous considérons l'ellipse $e$ comme le lieu des foyers des sections elliptiques du conoïde $\Sigma_{,}''$, nous devons nous rappeler que le plan H n'était plus perpendiculaire au plan (Z, $o$); dès lors, le nouveau conoïde elliptique devra être engendré de la manière suivante.

Étant donné un plan A et un point $i$ sur ce plan, menons par ce point $i$ et dans le plan A, deux droites M et M′, comprenant entre elles un angle aigu $\epsilon$.

Portons sur M et à partir du point $i$ une longueur $im$, nous aurons le point $m$.

Portons sur M′ et à partir du point $i$ une longueur $im'$, nous aurons le point $m'$.

Construisons sur $im$ et $im'$, comme demi-diamètres conjugués, une ellipse $e$ ayant le point i pour centre.

Cela posé :

Menons par le point $m$ et dans le plan A une droite M″ parallèle à M′, et par le point $m$ un plan Q perpendiculaire à M″; puis ensuite décrivons du point $m$ comme centre et avec un rayon égal à $im'$ et dans le plan Q, un cercle $\delta$; enfin, imaginons le cône F, ayant le cercle $\delta$ pour base ou directrice et pour sommet le point $i$.

Puis, encore, menons par la droite M un plan arbitraire P; ce plan P coupera le cône F suivant une génératrice G, et le cercle $\delta$ en un point $g$, et le plan Q suivant une droite $mg$; enfin, menons par la droite M′ un plan U parallèle au rayon $mg$.

Cela fait :

Si l'on fait mouvoir une droite K parallèlement au plan U et s'appuyant à la fois sur la droite directrice G et sur l'ellipse directrice $e$, on engendrera un conoïde $\varphi'$ qui jouira de la propriété suivante, savoir :

Que les parties des génératrices droites K interceptées entre les directrices G et $e$ seront égales entre elles et au demi-diamètre $im'$ de l'ellipse $e$.

En y réfléchissant, on voit que ce que nous avons démontré dans ce § V, nous permettrait de construire un compas apte à tracer des ellipses non-seulement sur leurs axes, mais aussi sur leurs diamètres conjugués, et qui pourrait encore tracer des hyperboles non-seulement sur leurs axes, mais aussi sur leurs diamètres conjugués.

## § VI.

Les conoïdes qui ont 1° pour directrices une droite $\Sigma$ et une ellipse E, la droite Z passant par le centre $o$ de l'ellipse E, et ayant un plan directeur U passant par le point $o$, comme les conoïdes $\varphi$; ou 2° un cône directeur $\Delta$ et de révolution ayant la droite Z pour axe, comme les conoïdes $\chi$; ces conoïdes $\varphi$ et $\chi$, dont il a été parlé dans le § V précédent, jouissant de la propriété remarquable, savoir : que la partie de leurs génératrices droites interceptée entre les directrices Z et E est constante; ces conoïdes, dis-je, jouissent encore d'une propriété assez singulière et qui est la suivante.

I. Si, pour les conoïdes $\varphi$, on trace sur le plan directeur U une suite de cercles concentriques D, D′, D″,..... ayant tous pour centre commun le point $o$; les cylindres K, K′, K″,..... qui auront respectivement pour bases les cercles D, D′, D″,..... et qui auront leurs génératrices droites parallèles à la droite Z, couperont le conoïde $\varphi$ suivant des ellipses, dont les plans passeront tous par le demi-axe ou le demi-diamètre de l'ellipse E par lequel passe le plan directeur U.

II. Si, pour les conoïdes $\chi$, on imagine une suite de cylindres de révolution, ayant tous la droite Z pour axe commun; ces cylindres couperont le conoïde $\chi$ suivant des ellipses.

Démontrons d'abord la propriété énoncée pour les conoïdes $\varphi$.

I. *Sections elliptiques des conoïdes du genre* $\varphi$.

Soit l'ellipse $e$ (*fig.* 60), ayant pour demi-axes ou demi-diamètres conjugués $im$ et $im'$, et le point $i$ pour centre.

Soit G la directrice droite du conoïde $\varphi$ et $e$ sa directrice courbe.

Le plan (M, G) fera avec le plan de l'ellipse $e$ un angle droit ou aigu.

La droite $mg$, située dans le plan (M, G) et qui sera une génératrice droite du conoïde $\varphi$, sera égale en longueur à R.

Menons par la droite M′ un plan P, ayant pour trace sur le plan (M, G) la droite $iy_1$.

Menons un plan X parallèle au plan directeur U, lequel passant par la droite M$^t$ est parallèle à la droite $mg$; ce plan X coupera : 1° le plan de l'ellipse $e$ suivant la droite $ap$; 2° le plan (M, G) suivant la droite $qp$ parallèle à $mg$; et 3° le conoïde $\varphi$ suivant la droite $qa$, dont la longueur sera égale à R; et 4° le plan P suivant la droite $a'p'$.

Or, $ip$ et $pa$ étant les coordonnées rectangulaires ou obliques du point $a$ de l'ellipse $e$, (suivant que $im$ et $im'$ seront les demi-axes ou les demi-diamètres conjugués de l'ellipse $e$); $ip'$ et $p'a'$ seront les coordonnées rectangulaires ou obliques du point $a'$ de la section $e'$ du conoïde $\varphi$ par le plan P.

Cela posé :

L'équation de l'ellipse $e$ sera :

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Or, les deux triangles semblables $qap$ et $qa'p'$ donnent :

$$\overline{ap} : \overline{a'p'} :: \overline{pq} : \overline{qp'}.$$

Désignant $\overline{ap}$ par $x$ et $\overline{a'p'}$ par $x_1$, on aura :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{\overline{pq}}{\overline{qp'}} = \text{constante} = C$$

Car le rapport $\frac{pq}{p'q}$ sera constant, quel que soit le point $a$ que l'on considère sur la section $e'$.

Dans le triangle $ipp'$, on aura aussi :

$$\frac{\overline{ip}}{\overline{ip'}} = \text{constante} = C_1$$

Ou

$$\frac{y}{y_1} = C_1$$

Par conséquent, l'équation (1) se transformera en l'équation

$$\frac{C_1^2}{a^2} y_1^2 + \frac{C^2}{b^2} x_1^2 = 1 \qquad (2)$$

Cette équation (2) sera celle de la section $e'$ ;

Cette équation (2) est celle d'une ellipse, donc la courbe $e'$ est une ellipse.

Mais comme le rapport $\frac{pq}{pq'}$ est constant, quel que soit le point à considérer sur la courbe $e'$, l'on aura aussi le rapport $\frac{qa}{qa'}$ constant; et comme $\overline{qa}$ est toujours égal à R ou à $\overline{gm}$, on aura aussi $\overline{qa'}$ constant et égal à $\overline{gg'}$, c'est-à-dire à la partie de la droite $gm$ interceptée entre la droite G et la trace $iy_1$ du plan sécant P.

Par conséquent, les droites $\overline{gg'}$, $\overline{qa'}$, etc. se projetteront sur le plan directeur U du conoïde $\varphi$ suivant un cercle ayant le point $i$ pour centre et son rayon égal à $\overline{gg'}$.

On pourrait démontrer cette propriété immédiatement et sans employer l'équation de l'ellipse $e$. Et en effet, en vertu de ce que l'on a : $\frac{qp}{qp'}$ = constante, on a aussi : $\frac{qa}{qa'}$ = constante; et comme on a $qa = gm = R$, et cela quelle que soit la position du point $a$ sur l'ellipse $e$, on aura $qa' = gg'$ = constante.

Par conséquent, le plan P coupe le conoïde $\varphi$ suivant une courbe $e'$ telle que si l'on fait mouvoir sur la droite G et sur cette courbe $e'$, et parallèlement au plan directeur U, une droite K, les parties de cette droite K interceptées (en ses diverses positions) entre les directrices G et $e'$ seront constantes, seront égales

entre elles. La courbe $e'$ est donc, en vertu de ce qui a été dit sur les conoïdes $\varphi$, § V, une ellipse tracée dans le plan P, ayant le point $i$ pour centre et ayant ses demi-axes ou demi-diamètres conjugués dirigés suivant $ig$ et $im'$; le demi-axe ou demi-diamètre dirigé suivant $ig$ étant égal à $\overline{ig}$ et le demi-axe ou demi-diamètre dirigé suivant $im'$ étant égal à $\overline{im''}=\overline{gg'}$.

II. *Sections elliptiques des conoïdes du genre* $\chi$.

Concevons un cylindre $\Delta$ de révolution, ayant pour axe la droite A (*fig.* 61); et coupé par un plan perpendiculaire à cet axe A, suivant un cercle C projeté en $cb$ et ayant son rayon égal à R.

Menons un plan perpendiculaire au plan méridien X, et coupant le cylindre $\Delta$ suivant une ellipse E projetée sur le plan X, suivant la droite $ab$.

Imaginons un cône droit B, ayant le cercle C (projeté en $cb$) pour base et pour sommet le point $s$ situé sur l'axe A.

Imaginons la surface réglée $\chi$ engendrée par une droite s'appuyant sur l'axe A, l'ellipse E et se mouvant parallèlement au cône B.

Cette surface gauche $\chi$ aura dans le plan X deux génératrices, savoir : $sb$ et $s_{,}a$; $sb$ étant la génératrice du cône B, et $s_{,}a$ étant parallèle à la génératrice $sc$ de ce cône B.

On aura donc $\overline{ss_{,}}=\overline{ca}$, et en désignant le grand axe $ab$ de l'ellipse E par M, et son petit axe par 2R (se rappelant que R est la longueur du rayon du cercle C) on aura $\overline{ca}^2=\overline{M}^2+\overline{4R}^2$.

Coupons le cône B par un plan U parallèle au plan du cercle C; ce plan U coupera le cône B suivant un cercle C' projeté sur le plan X suivant la droite $c'b'$ parallèle à $cb$.

Et le cylindre de révolution $\Delta'$ qui aura le cercle C' pour section droite, coupera les génératrices $sb$ et $s_{,}a$ de la surface $\chi$ en les points $b'$ et $a'$, et l'on aura $\overline{c'a'}=\overline{ca}$.

Or, si l'on conçoit l'ellipse E' (projetée suivant $a'b'$ sur le plan X) et ayant pour grand axe $\overline{a'b'}$, et pour petit axe le diamètre $\overline{c'b'}$ du cercle C'; cette ellipse E' sera évidemment une section du cylindre $\Delta'$.

Maintenant, si l'on engendre une surface réglée $\chi'$ par une droite s'appuyant sur l'axe A et sur l'ellipse E', et se mouvant parallèlement au cône B; je dis que les deux surfaces $\chi$ et $\chi'$ ne sont en réalité qu'une seule et même surface, et en effet : les génératrices de la surface $\chi$ font avec l'axe A un angle constant et qui est égal à celui que les génératrices de la surface $\chi'$ font avec ce même axe

A, c'est-à-dire égal à l'angle $\gamma$ que la génératrice du cône B fait avec l'axe de révolution de ce cône; ou, en d'autres termes, égal au demi-angle au sommet de ce cône B. Si donc je mène un plan méridien X′ coupant l'ellipse E en un point $x$ et l'ellipse E′ en un point $x'$, il faudra, pour que la proposition énoncée soit vraie, que la droite $xx'$ fasse avec l'axe A un angle $\gamma$; ou, en d'autres termes, il faudra que la génératrice $sb$ en passant du plan X dans le plan X′ soit descendu le long de l'axe A de la même quantité pour les surfaces $\chi$ et $\chi'$.

Concevons donc le cône *directeur* de révolution (*fig.* 61) ayant son sommet en $s$ sur l'axe A (cet axe A étant vertical).

Prenons pour plan vertical de projection le plan méridien X.

Coupons le cône directeur par deux plans horizontaux, et dès lors perpendiculaires à son axe A, nous aurons les cercles C et C′.

Regardons ces cercles comme les sections droites de deux cylindres B et B′ de révolution et ayant pour axe commun l'axe A.

Coupons le cylindre B par un plan perpendiculaire au plan vertical X, nous aurons une ellipse E dont la projection horizontale $E^h$ ne sera autre que le cercle $C^h$ et dont la projection verticale $E^v$ ne sera autre que la droite $ab$.

Coupons le cône directeur par un plan méridien X′, nous obtiendrons dans ce cône et pour section une génératrice dont les projections seront $sx_1^v$ (projection verticale) et $A^h x^h$ (projection horizontale).

Descendant cette génératrice parallèlement à elle-même jusqu'à ce que le point $x_1$ situé sur le cercle C se trouve en $x$ sur l'ellipse E, on aura la génératrice du conoïde $\chi$, et dont les projections seront $px^v$ (verticale) et $A^h x^h$ (horizontale).

Pour une *évolution*, égale à deux angles droits, autour de l'axe A, la génératrice $sb$ du cône directeur prendra la position $sc$, et en la descendant parallèlement à elle-même d'une quantité égale à $ca$, on aura en $s'a$ la génératrice du conoïde $\chi$.

Or, l'on a : $ca = c'a'$; donc en menant la droite $a'b'$ on aura la projection verticale de l'ellipse E′ intersection du conoïde $\chi$, si toutefois les trois points $a'$, $x''$ et $b'$ sont en ligne droite.

Et en effet : ces trois points sont en ligne droite.

Car, menant dans le plan vertical X et par les points $x'$ et $x''$ des perpendiculaires à l'axe A, on aura, $ca : qa :: cb : qx'$, puisque les trois points $a$, $x'$ et $b$ sont en ligne droite.

Pour que les trois points $a'$, $x''$ et $b'$ soient en ligne droite, il faudra que l'on ait aussi.

$$c'a' : q'a' :: c'b' : q'x'' \qquad (1)$$

Or :

$$ca = c'a' \text{ et } cq = c'q' = sp = x_,''x'' = x_,'x'.$$

La proportion (1) pourra donc s'écrire ainsi :

$$ca : qa :: c'b' : q'x'' \qquad (2)$$

Mais, par construction, on a :

$$q'x'' = c'x_,''.$$

La proportion (2) pourra donc s'écrire ainsi :

$$ca : qa :: c'b' : c'x_,'' \qquad (3)$$

Mais les trois points $s$, $x_,''$ et $x_,'$ étant en ligne droite, on a :

$$c'b' : c'x_,'' :: cb : cx_,'.$$

La proportion (3) pourra donc s'écrire ainsi :

$$ca : qa :: cb : cx_,' \qquad (4)$$

Mais $cx_,' = qx'$ par construction, on a donc :

$$ca : qa :: cb : qx' \qquad (5)$$

Ainsi, en posant la proportion (1) on retombe sur la proportion (5) qui est vraie, la proportion (1) est donc aussi vraie ; ainsi les trois points $a'$, $x''$ et $b'$ sont en ligne droite.

Ainsi, il est démontré que le conoïde $\chi$ est coupé suivant des ellipses, non semblables entre elles et non situées dans des plans parallèles, par une suite de cylindres de révolution ayant l'axe A pour axe commun.

---

ADDITION AU § III DU CHAPITRE II.

A la fin du § III de ce second chapitre (page 132), j'ai dit que la construction de la *tangentoïde* pouvait être déduite en considérant cette courbe comme la projection sur le plan horizontal H de l'intersection : 1° d'une surface de révolution ayant pour courbe méridienne une courbe arbitraire C et d'un conoïde ayant pour directrice

courbe, une courbe identique à cette même courbe plane C; et 2° d'une surface rampante et d'un conoïde construit d'après les considérations géométriques et générales exposées au sujet de la *spirale d'Archimède* dans l'article qui terminait ce § III.

Au sujet de la *tangentoïde*, nous croyons devoir entrer dans quelques détails, crainte de n'avoir pas été bien compris.

Étant donné un axe A perpendiculaire au plan horizontal H, menons par cet axe un plan, et traçons dans ce plan une courbe arbitraire C et une droite X perpendiculaire à l'axe A, où, en d'autres termes, horizontale et coupant l'axe A au point $d$ et la courbe C en un point $m$.

Concevons le cylindre de révolution B ayant pour axe la droite A et pour section droite le cercle D décrit dans un plan horizontal, et du point $d$ comme centre et avec $md$ pour rayon.

Menons au point $m$ un plan T tangent au cylindre B, et traçons dans ce plan une droite L passant par le point $m$ et faisant avec le plan horizontal H un angle $\alpha$.

Plions la droite L sur le cylindre B, nous aurons une hélice $\xi$, et en faisant mouvoir le plan de la courbe C autour de l'axe A, le point $m$ décrivant l'hélice $\xi$, la courbe C engendrera une surface rampante hélicoïdale $\Sigma$.

Cela fait : menons dans le plan T et par le point $m$ une droite Y parallèle au plan horizontal H.

Faisons tourner le plan de la courbe C autour de la génératrice droite J du cylindre B et passant par le point $m$, pour le recoucher sur le plan T, la courbe C viendra prendre la position C′ et la droite X se superposera sur la droite Y.

Cela fait : concevons la surface de filet de vis carré V engendrée par une droite se mouvant parallèlement au plan horizontal H en s'appuyant sur l'axe A et l'hélice $\xi$, cette surface V sera coupée par le plan T suivant une courbe $\varphi$ qui ne sera autre que la courbe décrite dans le premier chapitre (*fig.* 17).

Cela dit : partageons la droite X, et à partir du point $m$, en parties égales par les points 1, 2, 3, 4,.... etc.; considérons les droites X et J comme les axes des coordonnées rectangulaires de la courbe C, le point $m$ étant l'origine des coordonnées. Aux points 1, 2, 3, 4,... correspondront les ordonnées verticales $y_1$, $y_2$, $y_3$,.... de la courbe C.

Partageons la droite Y, et à partir du point $m$, en parties égales entre elles et aux parties de la droite X, par des points 1′, 2′, 3′,.... etc. Le point $m$ étant l'origine des coordonnées et les droites J et Y, les axes des coordonnées rectangulaires de la courbe C′; aux points 1′, 2′, 3′,... etc., correspondront les ordonnées verticales $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$,... etc., et l'on aura, puisque les courbes C et C′ sont iden-

tiques, $y_1 = y_1'$, $y_2 = y_2'$, $y_3 = y_3'$,.... etc.; les verticales passant par les points 1′, 2′, 3′,.... de la droite Y, couperont la courbe $\varphi$ en des points 1″, 2″, 3″,.... etc.; et si, à partir de ces points, on porte sur les verticales des longueurs $y_1'' = y_1'$, $y_2'' = y_2'$, $y_3'' = y_3'$,.... etc., on déterminera une courbe plane C″ située dans le plan T.

Cette courbe aura ses abscisses curvilignes comptées sur la courbe $\varphi$ et à partir de l'origine *m*, et ses ordonnées rectilignes comptées sur la droite J, et aussi à partir du même point *m*.

Cela posé :

Si l'on fait mouvoir une droite G parallèlement au plan H en s'appuyant sur l'axe A et sur la courbe plane C″, on engendrera un conoïde $\Sigma'$.

Et il est évident, si l'on se rappelle ce qui a été dit au sujet de la *spirale d'Archimède*, que la courbe intersection de la surface *rampante* $\Sigma$ et du conoïde $\Sigma'$ se projettera sur le plan horizontal H suivant une *tangentoïde*.

---

# CHAPITRE III.

## ESSAI DE NOMENCLATURE GRAPHIQUE DES CONIQUES PLANES DU 4ᵉ ET DU 3ᵉ DEGRÉ; ET ENSUITE DE L'UTILITÉ ET DE L'EMPLOI DES COURBES D'ERREUR.

Je me propose d'abord :

1° De donner la construction des nœuds et des points de rebroussement que peut présenter dans son cours la projection horizontale ou verticale de la courbe intersection de deux surfaces en général, ce qui me conduit à un essai de nomenclature *graphique* des coniques planes du quatrième et du troisième degré, appelant *conique à double courbure*, la courbe-intersection de deux cônes, du second degré, et *conique plane* la projection sur un plan de la conique à double courbure.

2° De déduire de la construction de ces nœuds, celle du point en lequel la génératrice droite d'une surface développable se trouve tangente à la courbe de contact d'une surface donnée et de cette même surface développable.

Je me propose ensuite :

3° De construire la tangente à la projection horizontale ou verticale de la courbe-intersection de deux surfaces données, cette tangente étant construite parallèlement à une droite donnée sur le plan de projection.

4° De déduire de la construction de cette tangente parallèle à une droite, celle d'une tangente commune à deux courbes situées dans un même plan, et par suite de montrer l'utilité et l'emploi des *courbes d'erreur*, pour la solution de divers autres problèmes.

Ces divers problèmes ne sont pas sans intérêt, sous le point de vue graphique; puisqu'il faut, après avoir construit les divers points de la projection de la courbe d'intersection ou de contact de deux surfaces, unir les points par un trait continu et arriver ainsi à obtenir, le plus approximativement que faire se peut, le tracé rigoureux ou géométrique de la projection de la courbe de l'espace.

Pour obtenir un semblable résultat, il faut donc employer tous les moyens de vérification que les méthodes de la géométrie descriptive mettent à notre disposition.

On doit dès lors concevoir que la détermination des points singuliers et des points limites, dans certains cas, de la courbe-intersection de deux surfaces doit être utile et nécessaire pour que l'épure soit aussi exacte que possible, et qu'ainsi les erreurs soient peu considérables lorsque l'on passera de l'épure au tracé ou à la construction en grand et à l'échelle réelle soit sur le terrain, soit dans l'espace; ou, en d'autres termes, lorsqu'on se servira de l'*épure* qui est toujours exécutée à une petite échelle pour construire le *relief* de grandeur naturelle.

## § I<sup>er</sup>.

*Construction des nœuds et des points de rebroussement que peut présenter la projection horizontale ou verticale de la courbe-intersection de deux surfaces.*

Concevons deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ se coupant suivant une courbe C; désignons par $C^h$ la projection horizontale de cette courbe C, et par $C^v$ sa projection verticale.

Si $C^h$ présente un nœud, c'est que deux points $m$ et $n$ de la courbe C se projettent horizontalement en un seul et même point.

Pour déterminer les nœuds de la courbe $C^h$, il faut donc chercher les points de C tels que $m$ et $n$ et pour lesquels la corde $nm$ qui les unit se trouve verticale.

Si l'on conçoit toutes les cordes verticales de la surface $\Sigma$, et qu'on prenne le point milieu de chacune d'elles, tous ces points *milieux* détermineront une surface $\delta$ qui sera la surface diamétrale de $\Sigma$ et la surface $\delta$ passera par le point $o$ milieu de la corde $mn$.

Si l'on conçoit de même toutes les cordes verticales de la surface $\Sigma'$, et qu'on prenne le point *milieu* de chacune d'elles, tous ces points *milieux* détermineront

une surface $\delta'$ qui sera la surface diamétrale de $\Sigma'$, et $\delta'$ passera par le point $o$ milieu de la corde $mn$.

Les deux surfaces $\delta$ et $\delta'$ se couperont suivant une courbe $\gamma$ qui passera donc par le point $o$ milieu de $mn$.

Par conséquent, $\gamma^h$ passera par $o^h$ qui ne sera autre que la projection horizontale des deux points $m$ et $n$.

La courbe $\gamma^h$ coupera donc la courbe $C^h$ aux points qui seront les nœuds demandés.

Si $\gamma^h$ ne coupe pas $C^h$, c'est que cette projection $C^h$ n'aura pas de nœuds.

Par une méthode analogue, on trouverait les nœuds qui peuvent exister sur la courbe $C^v$; ces nœuds seront situés sur la courbe $\lambda^v$ projection verticale de la courbe $\lambda$ intersection des deux surfaces diamétrales $\Delta$ et $\Delta'$, la première $\Delta$ pour la surface $\Sigma$ par rapport aux cordes parallèles entre elles et perpendiculaires au plan vertical, la seconde $\Delta'$ pour la surface $\Sigma'$ par rapport aux cordes ayant aussi leur direction perpendiculaire au même plan vertical de projection.

Si l'on considère le cylindre V qui projette horizontalement la courbe $\gamma$ intersection des deux surfaces diamétrales $\delta$ et $\delta'$, on voit de suite que ce cylindre V coupera la surface $\Sigma$ suivant une courbe U et la surface $\Sigma'$ suivant un courbe U', et ces deux courbes U et U' seront telles que les points en lesquels elles se couperont ou se toucheront, appartiendront à la courbe C intersection des surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$.

Les deux courbes U et U' ne pourront donc se couper qu'en un nombre de points, tels que, deux à deux ou trois à trois ou $n$ à $n$, ils seront situés sur des verticales dont les pieds sur le plan horizontal seront les *nœuds* de la courbe $C^h$.

Les deux courbes U et U' peuvent se toucher en un ou plusieurs points, et pour chacun de ces points la tangente commune à U et U' sera verticale; par conséquent, si l'on considère le cylindre vertical B tangent à la surface $\Sigma$ suivant le contour apparent A et le cylindre vertical B' tangent à $\Sigma'$ suivant le contour apparent A', les deux courbes A et A' se croiseront au point de contact $p$ des courbes U et U'.

Dès lors, les projections $A^h$ et $A'^h$ des contours apparents des deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ sur le plan horizontal se couperont en un point $p^h$ projection du point $p$, et ce point sera un point de *rebroussement* de la courbe $C^h$.

La courbe $C^h$ aura donc autant de points de *rebroussement* qu'il y aura de points de contact entre les courbes U et U'.

Si pour le point $p$ les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ avaient même plan tangent, alors la courbe C aurait un nœud ou point multiple en ce point $p$ et les deux branches

de $C^h$ qui passent par $p^h$ auraient en ce point $p^h$ même tangente ; les courbes A et $A'^h$ seraient aussi tangentes en $p^h$ et entre elles et avec $C^h$.

Le point $p^h$ offrirait donc pour $C^h$ un *nœud*, mais d'une espèce particulière ; les deux branches de la courbe ne se croisant pas en ce point $p^h$, mais étant tangentes l'une à l'autre en ce point ; et ce point sera dit *nœud simple*.

*Applications à quelques exemples.*

I. *Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se coupent.*

Supposons que l'axe de rotation de l'une des surfaces soit vertical, et que le plan des deux axes se trouve parallèle au plan vertical de projection.

La projection verticale $C^v$ de la courbe C intersection des deux surfaces ne peut présenter de *nœuds*, car les deux surfaces diamétrales $\Delta$ et $\Delta'$ ne sont autres que le plan des axes, quelles que soient les courbes méridiennes des deux surfaces de révolution.

Dès lors, la courbe $\lambda$ peut être une droite quelconque située sur les deux plans confondus $\Delta$ et $\Delta'$ ; il y a donc une infinité de *nœuds*, car chaque point de la courbe $C^v$ peut être considéré comme un *nœud*, en ce sens que chacun des points de cette courbe $C^v$ est la projection verticale de deux points de la courbe C ; ainsi, la courbe $C^v$ ne peut, en aucun cas, présenter de *nœuds réels*.

Examinons la projection horizontale $C^h$ de la courbe C.

Si l'on construit la surface diamétrale par rapport aux cordes verticales pour l'une et l'autre surface de révolution, la projection sur le plan horizontal de la courbe $\gamma$ intersection des deux surfaces diamétrales $\delta$ et $\delta'$ coupera ou ne coupera pas $C^h$.

Si $\gamma^h$ coupe $C^h$, elle la coupera en un nombre pair de points, parce que le plan des axes coupe chacune des deux surfaces de révolution en deux parties symétriques.

Et l'on voit aussi que la courbe $\gamma$ sera symétrique par rapport au plan des axes, car ce plan coupera en deux parties symétriques chacune des deux surfaces diamétrales $\delta$ et $\delta'$.

Ainsi, les *nœuds* de la courbe $C^h$ seront symétriquement placés par rapport à la trace horizontale du plan des axes et seront situés deux à deux sur des perpendiculaires à cette trace.

Il faut, pour obtenir l'intersection $\gamma$ des deux surfaces $\delta$ et $\delta'$, définir le mode de génération de ces deux surfaces, il faut pouvoir et savoir écrire graphiquement ces deux surfaces.

Or, en supposant que la surface de révolution Σ est celle dont l'axe est vertical, tandis que l'axe de la surface de révolution Σ' est oblique par rapport au plan horizontal, tout en étant parallèle au plan vertical de projection, on voit de suite :

1° Que la surface diamétrale δ prise par rapport aux cordes verticales, sera une surface de révolution dont la courbe méridienne M s'obtiendra en menant dans le plan méridien de la surface Σ et qui est parallèle au plan vertical do projection, une suite de cordes parallèles à l'axe de révolution et prenant les points milieux de ces cordes.

2° Que pour déterminer la surface diamètrale δ', prise par rapport aux cordes verticales de la surface Σ', il faudra imaginer une suite de plans parallèles entre eux et au plan vertical de projection, tels que Y, Y', Y",..... etc. lesquels couperont la surface Σ' et respectivement suivant des courbes X, X', X",..... etc.; et que prenant les milieux des cordes parallèles à l'axe de la surface Σ, et tracées dans les plans des diverses courbes X, X', X", etc., on aura successivement les courbes α, α', α",..... etc. lesquelles courbes définiront la surface diamètrale δ'.

Ainsi, dans le cas qui nous occupe, la surface diamétrale δ de Σ est une surface de révolution définie par sa courbe méridienne M et son axe de révolution qui n'est autre que celui de Σ et la surface diamétrale δ' de Σ' est définie par une suite de sections planes α, α', α".... etc. parallèles entre elles et au plan vertical de projection.

Les deux surfaces diamétrales δ et δ' étant complétement définies, ainsi qu'on vient de le dire, il faut construire leur courbe d'intersèction γ, en d'autres termes il faut construire par points les projections $\gamma^h$ et $\gamma^v$ de la courbe γ.

Pour trouver l'intersection de deux surfaces, l'une de révolution et l'autre définie, par une suite de sections planes et parallèles, il faut absolument considérer la surface de révolution comme étant définie aussi par une suite de sections planes et parallèles; les plans des sections faites dans la surface de révolution ayant même direction que ceux des sections faites dans la seconde surface.

Il vaut donc mieux considérer tout de suite la surface diamétrale δ comme définie de la même manière que la surface δ'.

Dès lors, on coupera les deux surfaces Σ et Σ' par une suite de plans verticaux parallèles entre eux et au plan vertical de projection, savoir : Y, Y', Y",..... etc., lesquels couperont la surface Σ, et respectivement suivant des courbes parallèles entre elles, savoir : E, E', E",..... etc. et aussi la surface Σ' suivant des courbes parallèles entre elles, savoir : X, X', X",..... etc.

On prendra les milieux des cordes verticales pour chacune de ces courbes, on aura donc :

La courbe $e$, diamètre de E.
— $e'$ — E', etc.
— $\alpha$ — X.
— $\alpha'$ — X', etc.

Les courbes $e$, $e'$, $e''$, etc. définiront et représenteront la surface $\delta$.

Les courbes $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, etc. définiront et représenteront la surface $\delta'$.

Les courbes $e$ et $\alpha$, $e'$ et $\alpha'$, $e''$ et $\alpha''$;...... etc. se couperont en des points qui détermineront la courbe $\gamma$ intersection des surfaces $\delta$ et $\delta'$; et la projection $\gamma^h$ contiendra les *nœuds* de la courbe $C^h$.

Le mode de construction que je viens d'exposer est celui que l'on devra toujours suivre, lorsqu'il s'agira de deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ quelconques; quel que soit, d'ailleurs, le mode de définition et de représentation de ces deux surfaces.

II. *Intersection : 1° de deux surfaces cylindriques*, ou 2° *de deux surfaces coniques*, ou 3° *d'une surface cylindrique et d'une surface conique.*

Il est évident : 1° que la surface diamétrale d'un cylindre est aussi un cylindre dont les génératrices sont parallèles à celui de la surface donnée; 2° que la surface diamétrale d'un cône est aussi un cône ayant même sommet que la surface donnée.

Cela posé :

Étant donné un cylindre $\Sigma$, pour avoir le cylindre diamétral $\delta$ par rapport aux cordes parallèles et perpendiculaires au plan horizontal de projection, il faudra construire la trace verticale V de ce cylindre $\Sigma$ et construire la courbe P, lieu des milieux des cordes (de la courbe V) perpendiculaires à la ligne de terre.

Cette courbe P sera la directrice du cylindre diamétral $\delta$.

Si l'on veut avoir le cylindre diamétral $\Delta$ par rapport aux cordes parallèles et perpendiculaires au plan vertical de projection, il faudra construire la trace horizontale H du cylindre $\Sigma$ et construire la courbe Q lieu des milieux des cordes de la courbe H et perpendiculaires à la ligne de terre. Cette courbe Q sera la directrice du cylindre diamétral $\Delta$.

Si l'on donnait un cône $\Sigma$, on ferait les mêmes constructions pour obtenir les directrices des deux cônes diamétraux $\delta$ et $\Delta$.

Cela posé :

Concevons deux cylindres $\Sigma$ et $\Sigma'$ se coupant suivant une courbe C dont on a construit les projections $C^h$ et $C^v$.

Construisons les *nœuds* et les points de *rebroussement* de la courbe $C^h$, si toutefois ils existent.

D'après tout ce qui précède, il faudra :

1° Construire les traces verticales V et V' des deux cylindres Σ et Σ';

2° Construire les courbes P et P' lieux des milieux des cordes des courbes V et V', ces cordes étant perpendiculaires à la ligne de terre;

3° Construire la courbe γ intersection des deux cylindres diamétraux ayant respectivement pour traces verticales les courbes P et P'.

Et la courbe $\gamma^h$ coupera la courbe $C^h$ en des points qui seront ou des *nœuds* ou des points de *rebroussement*.

Il n'y aura évidemment ni *nœuds* ni points de *rebroussement*, si les deux courbes $\gamma^h$ et $C^h$ ne se coupent pas.

Examinons maintenant comment nous pourrons reconnaître si les points communs entre les courbes $\gamma^h$ et $C^h$ sont des *nœuds* ou des points de *rebroussement*.

Nous chercherons les deux courbes intersection des deux cylindres Σ et Σ' par le cylindre K qui projette horizontalement la courbe γ.

Désignons par U l'intersection du cylindre Σ par le cylindre K, et par U' l'intersection des deux cylindres Σ' et K.

1° Les deux courbes U et U' se couperont en des points qui seront deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, etc., sur des perpendiculaires au plan horizontal.

Ces points d'intersection se projetteront sur le plan horizontal et suivant des *nœuds* ou *des points multiples double*, *triple*, *quadruple*, etc., ainsi nommés parce que les deux, ou trois, ou quatre branches de la courbe $C^h$ qui passent par chacun d'eux, ont chacune et en chacun de ces points une tangente distincte.

2° Les deux courbes U et U' se toucheront en un certain nombre de points, mais pour chacun de ces points de contact la tangente commune aux deux courbes U et U' sera verticale.

La projection horizontale de chacun de ces points de contact donnera pour $C^h$, un point de *rebroussement*.

3° Il pourra arriver que pour un point de contact des deux courbes U et U' les deux cylindres Σ et Σ' aient même plan tangent, plan qui dès lors serait perpendiculaire au plan horizontal; dans ce cas le point de *rebroussement* serait changé sur la courbe $C^h$ en un point *multiple simple*, ainsi nommé parce que les branches de la courbe $C^h$ qui passeraient par ce point auraient en ce point même tangente.

*Remarque*. D'après ce qui vient d'être exposé ci-dessus (2° et 3°), on voit que les courbes C et γ peuvent se couper ou non; mais l'on voit aussi que les points en lesquels la courbe C (intersection des deux cylindres Σ et Σ', est coupée par la courbe γ intersection des deux cylindres diamétraux δ et δ') se projettent toujours sur $C^h$ en des points *multiples simples* si les cylindres Σ et Σ' ont en chacun de ces points un plan tangent commun, ou en des *points de rebroussement* si les deux

courbes U et U′ ont en chacun de ces points une tangente commune et perpendiculaire au plan horizontal.

Nous ferons usage plus tard de cette remarque.

On voit de suite que tout ce qui précède s'appliquera *mot pour mot* à l'intersection de deux cônes ou d'un cône et d'un cylindre, quelles que soient les courbes *directrices* de ces surfaces.

III. *Application à deux cônes du second degré.*

Pour un cône du second degré, on sait que la surface diamétrale est un plan.

Ainsi, étant donnés deux cônes du second degré $\Sigma$ et $\Sigma'$, et ayant construit la courbe C intersection de ces deux cônes, ayant par conséquent construit par points les projections $C^h$ et $C^v$ de la courbe C, on demande de déterminer les *nœuds* et les points de *rebroussement* que la courbe $C^h$ peut présenter dans son cours.

Les deux surfaces coniques diamétrales $\delta$ et $\delta'$ deviennent deux plans, lesquels se coupent suivant une droite $\gamma$.

Le cylindre K est donc un plan perpendiculaire au plan horizontal de projection et ayant $\gamma^h$ pour trace horizontale.

Le plan K coupe donc les deux cônes $\Sigma$ et $\Sigma'$ suivant deux sections coniques U et U′.

Cela posé, deux sections coniques peuvent :

1° Se couper en quatre points.

La courbe $C^h$ peut donc avoir deux *nœuds* ou points *multiples doubles*, et ne peut en avoir davantage.

2° Se couper en deux points et se toucher en un point.

La courbe $C^h$ peut donc présenter un *nœud double* et un point de *rebroussement*, si, pour le point de contact des courbes U et U′, les deux cônes n'ont pas un plan tangent commun ; ou un *nœud double* et un *nœud simple*, si, pour le point de contact des courbes U et U′, les deux cônes ont un plan tangent commun, auquel cas ce plan tangent sera perpendiculaire au plan horizontal de projection.

3° Se toucher en deux points.

Alors la courbe $C^h$ peut présenter deux points de *rebroussement* ; ou présenter un point de *rebroussement* et un *nœud simple.*

4° Se toucher en un seul point.

La courbe $C^h$ peut alors présenter un seul *nœud simple* ; ou présenter un seul point de *rebroussement.*

5° Se couper en deux points.

La courbe $C^h$ peut alors présenter un seul *nœud double.*

D'après ce qui précède, on voit que la projection $C^h$ ou $C^v$ de la courbe C intersection de deux cônes du second degré ou de deux cylindres du second degré ou

d'un cône du second degré et d'un cylindre du second degré, ne pourra jamais présenter trois *nœuds doubles* ou trois points de *rebroussement* ou deux *nœuds simples*.

*Nomenclature des coniques planes du quatrième et du troisième degré.*

La discussion précédente n'est pas sans intérêt, car elle trouve son application lorsque l'on veut faire la nomenclature des coniques planes du quatrième et du troisième degré, désignant ainsi la projection de la courbe intersection de deux cônes du second degré, courbe qui est une courbe du quatrième ou du troisième degré. Suivant les diverses positions que les deux cônes peuvent affecter l'un par rapport à l'autre dans l'espace, cette projection peut présenter toutes les formes diverses que peut affecter la conique plane du quatrième et du troisième degré.

Nous pourrons donc, d'après ce qui précède, affirmer qu'une conique plane du quatrième degré peut présenter et ne peut présenter dans son cours que :

1° Deux points multiples doubles;
2° Deux points de rebroussement;
3° Un point multiple double et un point de rebroussement;
4° Un point multiple double et un point multiple simple;
5° Un point multiple simple et un point de rebroussement;
6° Un point multiple double;
7° Un point multiple simple;
8° Un point de rebroussement.

Si nous nous rappelons que la courbe intersection de deux cônes du second degré peut être composée de plusieurs branches offrant chacune l'une des trois formes suivantes, ou 1° une branche fermée dite *elliptique*, ou 2° une branche infinie dite *parabolique* et sans asymptote, ou 3° une branche infinie dite *hyperbolique* et ayant une asymptote; et si l'on remarque en construisant l'épure de la branche *hyperbolique* que si l'on prend sur cette branche un point divisant en deux arcs infinis la branche *hyperbolique*, ces deux arcs ont pour asymptote commune l'asymptote construite, nous voyons de suite que la courbe intersection de deux cônes du second degré peut être composée ainsi qu'il suit :

1° De quatre branches hyperboliques ;
2° De deux branches hyperboliques et d'une branche parabolique;
3° De deux branches paraboliques;
4° D'une branche parabolique et d'une branche elliptique;
5° De deux branches hyperbolique et d'une branche elliptique;
6° De deux branches elliptiques;
7° D'une seule branche elliptique.

Mais dans chacun de ces sept cas, la courbe d'intersection des deux cônes

pourra-t-elle présenter des nœuds doubles ou simples, et des points de rebroussement; ou ne présentera-t-elle aucun de ces points singuliers?

Et ainsi, existe-t-il 8 fois 8 courbes de formes diverses, et ainsi 64 courbes?

C'est ce que nous examinerons et discuterons ci-après :

Et d'abord, il pourrait arriver que les asymptotes à la courbe de l'espace ne fussent pas toutes inclinées par rapport au plan horizontal, une d'entre elles et une seule pourrait être verticale.

Dès lors, la projection horizontale de la courbe de l'espace passerait par le pied de cette asymptote; et en ce point qui serait la projection horizontale des deux points situés à l'infini sur la courbe hyperbolique de l'espace, la projection horizontale de la courbe de l'espace aurait un rayon de courbure nul.

Et ce point remarquable ne serait pas un point de rebroussement; mais, 1° un point *d'inflexion simple*, ou 2° un point *aigu* tel que la courbe avant et après ce point serait située d'un même côté de la tangente (*).

Pour que ce point existe, il faut que l'une des asymptotes soit verticale, et comme une seule des asymptotes peut être verticale, on voit que la courbe du quatrième degré ne pourra jamais avoir qu'un seul point tel que celui que nous venons d'indiquer, et que ce point ne pourra exister que sur la projection d'une courbe hyperbolique.

On ne pourra donc combiner que les quatre cas où les branches hyperboliques se présentent avec ceux des huit cas où l'on a des *nœuds doubles* et des points de *rebroussement*, attendu que le *nœud simple* exclut le point indiqué précédemment; et en effet :

Le *nœud simple* est la projection du point multiple de la courbe de l'espace lorsque les deux cônes ont en ce point multiple un plan tangent commun perpendiculaire au plan horizontal.

Or, il est bien évident que si les deux cônes ont un plan tangent commun vertical, ils ne pourront pas, lorsqu'on superposera leurs sommets, se couper suivant des génératrices telles que l'une d'elles soit verticale.

Pourrons-nous combiner les trois cas *hyperboliques* avec les cinq cas où l'on n'a que des *nœuds doubles* ou des points de *rebroussement*, et avec celui où ces points singuliers n'existent pas?

Et dès lors la courbe du quatrième degré peut-elle affecter dix-huit nouvelles formes?

C'est ce que nous examinerons et discuterons ci-après.

(*) *Voyez* dans le chapitre VII la discussion relative aux points singuliers, qu'une courbe plane peut présenter dans son cours; discussion qui est établie en regardant une courbe plane comme la projection, sur un plan, d'une courbe à double courbure.

Si, enfin, on remarque qu'une courbe de l'espace peut être telle que pour un de ses points (celui pour lequel la tangente n'est pas verticale) le plan osculateur peut être vertical; on voit que la projection horizontale de cette courbe présentera un point pour lequel le rayon de courbure sera infini, ce point pourrait être, 1° un point *d'inflexion double*, ou 2° un point *méplat*.

Pour compléter la *nomenclature graphique* des coniques planes du quatrième degré, il faudrait donc rechercher si un semblable point peut exister sur la projection de la courbe intersection de deux cônes, et combien cette courbe de l'espace peut en présenter lorsque les deux cônes sont du second degré et enfin voir si un pareil point peut coexister avec les divers points singuliers dont nous avons parlé plus haut.

Par ce qui précède, on voit donc que, quoique le travail doive être long, la géométrie descriptive permet de donner la nomenclature graphique et complète des coniques planes du quatrième degré, cette nomenclature étant fondée sur des différences essentielles de forme; la collection des tracés de toutes les coniques planes du quatrième degré ne serait pas, je crois, sans intérêt pour la géométrie des courbes.

Examinons et discutons maintenant les deux questions posées ci-dessus.

*Première question.* Les sept combinaisons que l'on peut faire entre les branches elliptiques, hyperboliques et paraboliques, peuvent-elles coexister avec les huit combinaisons qui peuvent avoir lieu entre les trois points singuliers, *nœud double*, *nœud simple* et *point de rebroussement?*

Pour résoudre cette question, concevons la droite $\gamma$ intersection des deux plans diamétraux $\delta$ et $\delta'$, construits par rapport aux cordes verticales; concevons le plan K mené par la droite $\gamma$ et perpendiculairement au plan horizontal.

Imaginons enfin les deux sections coniques U et U' suivant lesquelles le plan K coupe les deux cônes du second degré.

Nous pourrons toujours représenter les deux cônes en imaginant hors du plan K deux points S et S', lesquels seront respectivement les sommets des cônes ayant les courbes U et U' pour directrices ou bases ou traces sur le plan K.

Les deux cônes (S, U) et (S', U') se couperont suivant une courbe C dont la projection $C^h$ sur tout plan P perpendiculaire au plan K sera du quatrième degré.

Rappelons-nous que pour que la projection $C^h$ sur le plan P affecte dans son cours les divers points singuliers, *nœuds* et *points de rebroussement*, il faut que les deux courbes U et U' se coupent: 1° en quatre points ou en deux points situés deux à deux sur une perpendiculaire au plan P, ou 2° se touchent en deux points ou en un seul point pour chacun desquels la tangente soit perpendiculaire au plan P, ou 3° se coupent en deux points et se touchent en un point, tels que la

tangente au point de contact soit perpendiculaire au plan P et parallèle à la droite qui unit les deux points d'intersection.

Et rappelons-nous encore que si nous prenons le milieu des cordes de la courbe U ainsi que les milieux des cordes de la courbe U′, ces cordes étant pour l'une et l'autre courbes dirigées perpendiculairement au plan P, ces points milieux seront sur une seule et même droite, qui ne sera autre que la droite $\gamma$.

Cela posé :

Supposons que les deux courbes U et U′ sont deux ellipses; imaginons la droite qui unit les sommets S et S′ des deux cônes donnés; et désignons par $p$ le point en lequel cette droite perce le plan P; concevons que le cône (S′, U′) reste fixe et que le cône (S, U) se meuve parallèlement à lui-même, son sommet parcourant la droite (S, S′) qui unit les deux sommets S et S′ jusqu'à ce que le sommet mobile S se superpose sur le sommet fixe S′; et désignons par U″ la courbe-section du cône mobile (en la position où les sommets S et S′ sont superposés) par le plan K.

Les deux courbes U′ et U″ seront semblables et semblablement placées par rapport au point $p$ qui sera leur pôle de similitude.

Les deux courbes U′ et U″ seront donc deux ellipses.

Comment U′ et U″ pourront-elles se comporter l'une par rapport à l'autre, en vertu des positions respectives des courbes U et U′ ?

1° *Si les deux courbes* U *et* U′ *se coupent en quatre points*, les deux courbes U′ et U″ pourront :

1° Se couper en quatre points;

2° Se couper en deux points et se toucher en un point;

3° Se couper en deux points;

4° Se toucher en un point;

5° N'avoir aucun point commun;

6° Se toucher en deux points.

Les deux courbes U′ et U″ ne pourront pas avoir un seul point d'intersection; par conséquent la courbe du quatrième degré ne pourra, dans aucun cas, être composée d'une branche *hyperbolique* et d'une branche *elliptique*.

Ainsi, avec deux *nœuds doubles*, on a sept courbes distinctes.

2° *Si les deux courbes* U *et* U′ *se coupent en deux points et se touchent en un point*, les deux courbes U′ et U″ présenteront les mêmes positions que celles indiquées ci-dessus, n° 1.

Ainsi, avec un *nœud double* et un *point de rebroussement*, on aura sept courbes distinctes.

3° *Si les deux courbes* U *et* U′ *se coupent en deux points et se touchent en un point*, le

point $p$ pourra être placé sur la tangente verticale au point de contact des deux courbes U et U'; dans ce cas, le point de rebroussement devient un *nœud simple*.

Pour cette position particulière du point $p$, les deux courbes U' et U'' peuvent affecter les positions indiquées ci-dessus, n° 1 et n° 2.

Ainsi, avec un *nœud double* et un *nœud simple* la courbe du quatrième degré ne peut pas être composée d'une branche *hyperbolique* et d'une branche *elliptique*; on aura donc sept courbes distinctes.

4° *Si les deux courbes* U *et* U' *se coupent en deux points*, les deux courbes U' et U'' pourront présenter les mêmes relations de position que celles indiquées dans les numéros précédents; ainsi, on aura encore sept courbes distinctes.

Pour tous les autres cas, on ferait les mêmes remarques.

Ainsi, l'on peut affirmer que la conique plane du quatrième degré peut toujours présenter l'un des huit cas pour les points singuliers, *nœud double*, *nœud simple* et point de *rebroussement*, avec l'une quelconque des six combinaisons que l'on peut faire entre les branches hyperboliques, paraboliques et elliptiques, on aura donc huit fois sept courbes, ou cinquante-six courbes présentant des points singuliers tels que *nœud double*, *nœud simple* et point de *rebroussement* et sept courbes ne présentant aucun de ces points remarquables, et dès lors en tout soixante-trois courbes distinctes.

Maintenant, examinons et discutons les cas où une des asymptotes de la courbe intersection des deux cônes du second degré sera perpendiculaire au plan horizontal P.

On sait que tout plan parallèle à une génératrice du cône du second degré coupe ce cône suivant une courbe qui est ou une *parabole* ou une *hyperbole*; on sait aussi que si la génératrice du cône n'est pas parallèle à une ligne de plus grande pente du plan sécant, la section est une *hyperbole*, et que si cette génératrice est parallèle à la ligne de plus grande pente du plan sécant, la section est une *parabole*.

Si donc nous concevons deux génératrices, l'une G du cône (S, U) et l'autre $G_1$ du cône (S', U') telles qu'elles soient parallèles entre elles et de plus perpendiculaires au plan horizontal P, le plan K qui coupe les deux cônes suivant les courbes U et U' étant vertical, les deux génératrices G et $G_1$ seront parallèles au plan K.

Dès lors, le plan K coupera le cône (S, U) suivant une *hyperbole* ou une *parabole*, et ce même plan K coupera le cône (S', U') suivant une *hyperbole* ou une *parabole*.

On peut toujours concevoir que le plan K coupe les deux cônes suivant des *hyperboles*, car on peut toujours, sans changer la base des deux cônes, faire varier de position dans l'espace les sommets des deux cônes pour que cela ait lieu.

Ainsi, admettons que les deux courbes U et U' seront des *hyperboles*.

Mais lorsqu'un plan est parallèle à deux génératrices d'un cône du second degré, la courbe *hyperbole* de section a ses asymptotes parallèles aux deux génératrices.

Par conséquent, les deux courbes U et U′ auront une asymptote commune qui sera verticale et parallèle à la fois aux deux génératrices G du cône (S, U) et G, du cône (S′, U′).

Or : 1° deux hyperboles qui ont une asymptote commune ne peuvent jamais se couper suivant quatre points ou deux points situés deux à deux sur des droites parallèles à l'asymptote commune; ainsi la projection sur le plan P de la courbe intersection des deux cônes (S, U) et (S′, U′) ne pourra pas, dans ce cas, présenter de *nœud double*.

Or : 2° deux hyperboles qui ont une asymptote commune ne peuvent jamais être en contact par un ou deux points tels que la tangente en chacun de ces points soit parallèle à l'asymptote commune.

Par conséquent, l'asymptote commune aux deux hyperboles U et U′ étant verticale, ces deux courbes U et U′ ne pourront pas être en contact par un ou deux points tels qu'en ces points la tangente soit verticale.

Ainsi, la projection de la courbe intersection des deux cônes (S, U) et (S′, U′) ne pourra pas présenter de *nœud simple*, ni de point de *rebroussement*.

Dès lors, toutes les fois que la conique plane du quatrième degré offrira un point pour lequel le rayon de courbure sera nul, elle ne pourra offrir de points tels que *nœud double*, *nœud simple*, et *point de rebroussement*. Et comme ce point, pour lequel le rayon de courbure est nul, ne peut exister qu'autant que la courbe d'intersection des deux cônes se trouve composée de branches dont une au moins soit *hyperbolique*, et que trois cas seuls offrent des branches *hyperboliques*, on voit que la courbe du quatrième degré présentera trois formes diverses pour lesquelles le point singulier que nous venons d'examiner subsistera, et subsistera à l'exclusion de tout autre point singulier tel que *nœud double*, *nœud simple*, *point de rebroussement*.

Ainsi, la conique plane du quatrième degré peut présenter soixante-six formes variées et essentiellement distinctes.

Il resterait maintenant à examiner si la courbe intersection de deux cônes du second degré ne peut pas présenter dans son cours un point situé à distance finie pour lequel la tangente ne serait pas verticale, et tel que le plan osculateur de la courbe de l'espace et en ce point fût perpendiculaire au plan horizontal, auquel cas la projection horizontale de la courbe intersection des deux cônes aurait un point pour lequel le rayon de courbure serait infini.

Nous avons vu précédemment que la courbe intersection de deux cônes du second degré pourrait avoir un plan osculateur perpendiculaire au plan horizontal, mais, dans les cas examinés, la tangente au point considéré était verticale.

On peut facilement résoudre la question par la considération suivante :

Imaginons deux sections coniques L et L′ situées dans un plan vertical ; on peut toujours concevoir que ces deux courbes auront un contact du second ordre en un point $x$ ; on pourra toujours aussi concevoir que ces deux courbes sont respectivement les bases de deux cônes, l'un (S, L) ayant son sommet en un point S de l'espace et l'autre (S′, L′) ayant son sommet en un autre point S′ de l'espace.

Il est bien évident que les deux cônes (S, L) et (S′, L′) se couperont suivant une courbe I du quatrième degré qui passera par le point $x$, et que cette courbe I aura en ce point $x$ un contact du second ordre soit avec la courbe L, soit avec la courbe L′.

Par conséquent, la projection $I^h$, sur le plan horizontal, de la courbe I aura pour le point $x^h$ un rayon de courbure infini.

La conique plane du quatrième degré peut donc, dans certains cas, présenter un point pour lequel le rayon de courbure est infini.

Cela dit :

On pourra toujours placer les sommet S et S′ dans l'espace de manière à ce que les deux cônes se coupent :

1° Suivant quatre branches hyperboliques ;

2° Suivant deux branches hyperboliques et une branche parabolique ;

3° Suivant deux branches hyperboliques et une branche elliptique ;

4° Suivant deux branches paraboliques ;

5° Suivant une branche parabolique et une branche elliptique ;

6° Suivant deux branches elliptiques.

On ne pourra pas avoir une seule branche elliptique ou courbe *d'arrachement*, parce que, de quelque manière que l'on coupe ces deux cônes, dans le cas particulier qui nous occupe en ce moment, par un plan, les deux sections ne pourront s'envelopper, et dès lors le contact du second ordre ne pourrait exister.

On aura donc encore six nouvelles courbes du quatrième degré.

Ainsi, on trouve soixante-douze courbes du quatrième degré ou coniques planes.

Je n'ai pu encore parvenir à démontrer si le point pour lequel le rayon de courbure est infini pouvait coexister avec les points singuliers dont l'existence a été reconnue, savoir : *nœud double*, *nœud simple*, *point de rebroussement*.

Mais j'ai pu démontrer que lorsqu'il existe un point pour lequel le rayon de courbure est infini, il ne peut pas exister de point pour lequel le rayon de courbure soit nul.

Et en effet : les deux courbes L et L′ situées dans un plan vertical et ayant au

point $x$ un contact du second ordre ne peuvent être que des ellipses ou des hyperboles, puisque deux paraboles osculatrices se confondent, puisqu'il n'existe qu'une seule parabole osculatrice en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole.

Or, pour qu'une asymptote soit verticale, il faudra que le plan des deux courbes L et L' coupe les cônes suivant des paraboles; les deux courbes L et L' se confondraient dans ce cas en une seule courbe, en une parabole qui serait elle-même la courbe I intersection des deux cônes; la projection $I^{a}$ serait donc une droite, la courbe du quatrième degré ne serait donc autre, dans ce cas, qu'une droite.

Les courbes L et L' peuvent avoir un contact du troisième ordre, et elles ne peuvent avoir entre elles un contact d'un ordre plus élevé; par conséquent, la conique plane du quatrième degré peut présenter un point pour lequel la tangente a un contact du troisième ordre avec la courbe.

Et il est évident qu'il n'existera pas, sur la conique plane du quatrième degré, de point pour lequel la tangente ait un contact plus élevé que le troisième ordre.

Nous pouvons encore avoir six courbes présentant cette particularité : ainsi nous obtenons soixante-dix-huit courbes différentes représentées par l'équation du quatrième degré qui, comme on le sait, renferme huit constantes arbitraires.

Je vais maintenant démontrer que la conique plane du quatrième degré peut avoir deux points pour chacun desquels le rayon de courbure est infini.

Et en effet:

Concevons deux plans verticaux R et R' se coupant suivant une droite verticale Z.

Concevons dans le plan R une courbe du second degré U coupant la droite Z aux points $m$ et $n$.

Concevons dans le plan R' une courbe du second degré U' coupant la droite Z aux mêmes points $m$ et $n$.

Imaginons une section conique X ayant avec la courbe U un contact du second ordre en un point $x$, et désignons par $p$ et $q$ les points en lesquels la courbe X coupe la droite Z.

On peut toujours imaginer une courbe X' osculatrice du second ordre en un certain point $x'$ (*) à la courbe U' et passant par les points $p$ et $q$; car cinq points déterminent une section conique plane lorsque ces cinq points sont deux à deux

---

(*) Je dis un certain point $x'$, car on ne peut pas fixer la position de ce point à l'avance. Le problème: faire passer par deux points donnés une section conique osculatrice du troisième ordre à une section conique donnée, est un problème *déterminé* qui n'a qu'un nombre limité de solutions.



sur des droites différentes, lorsque ces cinq points ne sont pas en ligne droite trois à trois.

Or, le contact du second ordre établit que la courbe X' a trois points successifs et infiniment voisins, communs avec la courbe U'; par ces trois points (non en ligne droite) et les deux points $p$ et $q$, on peut donc toujours concevoir une section conique plane X'.

Or, par deux courbes du second degré qui ont une corde commune, on peut toujours faire passer deux cônes du second degré, nous pourrons donc toujours envelopper les deux courbes U et U' par un cône $\Sigma$ et les deux courbes X et X' par un cône $\Sigma'$.

Et comme nous pourrons toujours nous arranger pour que les points $x$ et $x'$ soient placés, le premier sur la courbe U et le deuxième sur la courbe U' de telle manière que la tangente en $x$ à U ne soit pas parallèle à la tangente en $x'$ à U', il est évident que les deux cônes $\Sigma$ et $\Sigma'$ n'auront pas une génératrice commune; par conséquent, ils se couperont suivant une courbe I passant par les points $x$ et $x'$.

La conique plane du quatrième degré peut donc présenter dans son cours deux points pour lesquels le rayon de courbure soit infini; et cette courbe ne pourra en présenter davantage, parce que deux sections coniques qui ont une corde commune ou une tangente commune déterminent un cône du second degré, et suffisent pour le déterminer.

Ainsi, on aurait encore de nouvelles formes de la conique plane du quatrième degré, qu'il faudrait ajouter aux soixante-dix-huit formes précédemment trouvées.

Je n'ai pu, dans le cas de deux points pour lesquels le rayon de courbure est infini, déterminer le nombre des formes que pourrait présenter la conique plane du quatrième degré.

La démonstration précédente pouvant ne pas paraître rigoureuse, et donner lieu dès lors à des objections, je crois devoir exposer la démonstration suivante, contre laquelle aucune objection ne peut être élevée.

Concevons dans un plan R une section conique U; construisons en un point $x$ de la courbe U la section conique X ayant avec U et en ce point $x$ un contact du second ordre.

Construisons en un autre point $y$ de la courbe U une seconde section conique Y ayant en ce point $y$ un contact du second ordre avec cette même courbe U.

Comme l'on peut, pour un point d'une courbe du second degré, construire une infinité d'ellipses ou d'hyperboles osculatrices du second ordre de cette courbe proposée, on pourra toujours se procurer deux courbes X et Y telles qu'elles se coupent en deux points $p$ et $q$.

Désignons par K la droite qui unit les points $p$ et $q$.

Cela posé :

Faisons passer par la droite K un plan R′ coupant la courbe U en deux points $m$ et $n$.

Nous pourrons toujours tracer dans le plan R′ une section conique U′ passant par les points $m$ et $n$.

Les deux courbes U et U′ ayant une corde commune $mn$ pourront être enveloppées par un cône dont je désigne le sommet par S.

Cela posé :

Concevons la génératrice S$y$ de ce cône; elle coupera la courbe U′ en un point $x'$.

Et si nous imaginons un second cône ayant pour directrice la courbe Y et pour sommet le point S, ce cône sera osculateur du cône (S, U) tout le long de la génératrice S$y$ et l'osculation sera du second ordre.

Par conséquent, le cône osculateur (S, Y) sera coupé par le plan R′ suivant une courbe X′ ayant une osculation du second ordre au point $x'$ avec la courbe U′; et cette courbe X′ passera évidemment par les points $p$ et $q$ de la courbe X, lesquels sont situés sur la droite K.

Les deux courbes X et X′ ayant une corde commune $pq$, pourront être enveloppées par un cône du second degré, lequel aura évidemment pour sommet un point autre que le point S, et que je désigne par S′.

Les deux cônes (S, U) et (S′, X) n'auront donc aucune génératrice commune soit d'intersection, soit de contact.

Désignant par $z$, $z'$, $z''$ les trois points successifs qui forment le contact du second ordre au point $x$ entre les courbes U et X, et par $z_{,}$, $z_{,}'$, $z_{,}''$ les trois points successifs qui forment le contact du second ordre au point $x'$ entre les courbes U′ et X′, on voit que les génératrices S$z$, S$z'$, S$z''$ couperont respectivement les génératrices S′$z$, S′$z'$, S′$z''$, aux points $z$, $z'$, $z''$; par conséquent, la courbe I intersection des cônes (S, U) et (S′, X) passera par les points $z$, $z'$, $z''$. Il en sera de même pour les points $z_{,}$, $z_{,}'$, $z_{,}''$; dès lors, il est bien évident que la courbe I passera par les points $x$ et $x'$, et aura en ces points un contact du second ordre avec les courbes U et U′.

Par conséquent, les plans R et R′ seront des plans osculateurs de la courbe I pour les points $x$ et $x'$.

Si donc on projette la courbe I sur un plan perpendiculaire à la droite K intersection des plans R et R′, la projection aura deux points pour lesquels le rayon de courbure sera infini.

Ainsi, une conique plane du quatrième degré peut présenter dans son cours

deux points pour lesquels la tangente se trouve avoir un contact du second ordre avec la courbe.

Peut-être parviendrai-je plus tard à résoudre toutes les questions et à compléter ainsi la nomenclature graphique des coniques planes du quatrième degré.

Toutefois, je dois faire remarquer que la nomenclature fournie par les considérations géométriques qui sont *propres* à la géométrie descriptive me paraît devoir être préférée à celle donnée par les considérations *analytiques*; et en effet, qu'est-ce qui peut mieux caractériser les différences essentielles qui distinguent plusieurs courbes de la même famille, ou, en d'autres termes, représentées par une équation du même degré, si ce n'est les variétés essentielles que peut présenter la forme de la courbe? Et qu'est-ce qui modifie la forme? Les points singuliers, sans aucun doute.

De plus, combien il serait difficile d'effectuer les tracés des diverses coniques planes du quatrième degré d'après leurs équations; tandis que la géométrie descriptive fournit un moyen simple de les construire, puisque pour avoir chacune d'elles il suffit de construire la projection horizontale de l'intersection de deux cônes ayant pour bases des sections coniques, et qu'il sera toujours facile, en vertu de ce que nous avons dit précédemment, de déterminer les données de l'épure pour chaque cas.

Aussi, la géométrie descriptive me paraît-elle pouvoir permettre un jour d'exécuter avec quelque facilité une *monographie* complète, non-seulement des coniques planes du quatrième degré, mais même de toutes les courbes du quatrième degré; car les coniques planes ne forment qu'une classe, puisque l'équation générale des courbes du quatrième degré renferme quatorze constantes arbitraires, et que l'équation de la conique plane du quatrième degré ne renferme que huit constantes arbitraires.

On peut, par des considérations géométriques analogues à celles qui précèdent, parvenir à déterminer la nomenclature des coniques planes du troisième degré qui sont représentées par l'équation du quatrième degré renfermant huit constantes arbitraires lorsque cette équation peut être décomposée en deux facteurs, l'un du troisième degré et l'autre du premier degré.

Et en effet, on peut, dans ce cas, concevoir deux cônes ayant une génératrice commune G; ces deux cônes se couperont alors suivant la droite G et une courbe I qui sera du troisième degré.

Les deux bases B et B′ des deux cônes (S, B) et (S′, B′) donnés auront donc dans ce cas un point commun $m$, lequel sera la trace horizontale de la génératrice G, laquelle contiendra les deux sommets S et S′.

Les deux courbes B et B′ pourront, 1° se couper au point $m$, 2° être tangentes au point $m$.

Dans le *premier cas*, si l'on fait glisser le sommet S′ le long de la droite G pour venir se superposer sur le sommet S, auquel cas le cône mobile sera coupé en sa nouvelle position et par le plan horizontal suivant une courbe B″ semblable à la courbe B par rapport au point $m$ considéré comme *pôle* de similitude, on voit de suite que les deux courbes B et B″ se croisant au point $m$ pourraient :

1° Se couper en un second point ;

2° Se couper en trois autres points ;

3° Se couper en un second point et être en contact par un point.

La conique plane du troisième degré pourra donc être composée de :

1° Une branche hyperbolique ;

2° Trois branches hyperboliques ;

3° Une branche hyperbolique et une branche parabolique.

Et dans tous ces cas, la droite G représentera une branche *hyperbolique* de l'intersection totale.

Dans le *deuxième cas*, les deux courbes B et B″ seront tangentes l'une à l'autre au point $m$ ; elles pourront donc :

1° Se toucher en un second point ;

2° Se couper en deux points ;

3° N'avoir que le point $m$ commun.

Dès lors, la conique plane du troisième degré pourra être composée :

1° D'une branche parabolique ;

2° De deux branches hyperboliques ;

3° D'une seule branche elliptique.

Et dans les trois cas la droite G représentera une branche *parabolique* de l'intersection totale.

La conique plane du troisième degré peut donc affecter six formes différentes.

Examinons maintenant de quelle nature sont les points singuliers que la conique plane du troisième degré peut offrir dans son cours.

Imaginons les plans diamétraux des deux cônes par rapport aux cordes verticales ; concevons le plan vertical R passant par la droite $\gamma$ intersection de ces deux plans diamétraux et coupant les cônes suivant les deux courbes U et U′, et rappelons-nous que ces deux sections coniques U et U′ ont chacune un diamètre dirigé suivant la droite $\gamma$.

Dans le *premier cas*, les deux courbes U et U′ se couperont en un point $n$, lequel sera le point de rencontre de la génératrice G et du plan R ; puisque les deux cônes U et U′ ont chacun un diamètre dirigé suivant la droite $\gamma$, ces deux courbes

devront nécessairement se couper en un second point $a'$ tel que les points $a$ et $a'$ soient situés sur une verticale ; dès lors il pourra arriver :

1° Que U et U' n'aient en commun que les points $a$ et $a'$, et alors la conique plane du troisième degré n'offrira aucun point singulier ;

2° Que U et U' se coupent en deux nouveaux points nécessairement situés sur une verticale, et alors la conique plane du troisième degré offrira un *nœud double;*

3° Que U et U' se touchent en un point pour lequel la tangente sera nécessairement verticale, et alors la conique plane du troisième degré offrira un point de *rebroussement*.

Ainsi, dans le *premier cas*, on peut avoir neuf courbes différentes; on ne pourra pas avoir de *nœud simple*, parce que la courbe-intersection des deux cônes devrait offrir un point *multiple* pour que le *nœud simple* pût exister : ce qui est évidemment impossible.

Dans le *deuxième cas*, les courbes U et U' se toucheront en un point $b$ qui sera celui en lequel la droite G est coupée par le plan R ; et forcément ces deux courbes se toucheront en un autre point $b'$ situé avec $b$ sur une verticale.

Dans ce cas, les courbes du troisième degré n'ont aucun point singulier ; mais l'on peut toujours concevoir que le plan tangent commun aux deux cônes le long de la droite G soit vertical, alors les deux courbes U et U' auront une tangente commune et verticale; dès lors les points $b$ et $b'$ se réuniront en un seul point.

Dès lors, les deux courbes U et U' pourront :

1° Se couper en deux points, et alors la conique plane du troisième degré offrira un *nœud double;*

2° Se toucher en un second point pour lequel la tangente sera verticale, et alors la conique plane du troisième degré offrira un point de *rebroussement*.

La conique plane du troisième degré ne pourra présenter de *nœud simple*, par la même raison indiquée ci dessus.

Ainsi, dans le *deuxième cas*, on peut avoir neuf courbes différentes.

On pourra toujours s'arranger pour que l'une des asymptotes soit verticale ; dès lors on aura quatre courbes du troisième degré (à branches hyperboliques) offrant chacune un point pour lequel le rayon de courbure est nul; et ce point exclut tout autre point singulier.

Ainsi, nous trouvons vingt-deux courbes différentes pour les coniques planes du troisième degré.

Examinons maintenant si la conique plane du troisième degré peut avoir un point tel que son rayon de courbure soit infini.

On sait que lorsque deux cônes du second degré se touchent ou se coupent suivant une génératrice G, laquelle droite contient dès lors les sommets S et S'

de ces cônes, la courbe I intersection des deux surfaces passe par les sommets S et S′ et ne coupe la droite G qu'en ces deux points S et S′.

On sait encore que, lorsque deux cônes du second degré ont deux plans tangents communs, ils se coupent suivant deux courbes planes qui sont alors deux sections coniques.

Si donc on conçoit un plan vertical R sur lequel on trace deux sections coniques A et A′ ayant en un point $x$ un contact du second ordre, et si par ce point $x$ on conçoit une droite G et sur cette droite G deux points S et S′, ces points pourront être considérés comme les sommets de deux cônes (S, A) et (S′, A′), lesquels seront en contact tout le long de la génératrice G et la courbe I intersection de ces deux cônes passera par les points S et S′ et ne coupera la droite G qu'en ces seuls points S et S′.

De plus, en établissant que les deux courbes A et A′ ont un contact du second ordre, c'est établir que les deux cônes ont deux plans tangents communs (ces plans tangents étant successifs et infiniment voisins) se coupant suivant la droite G.

Donc les deux cônes ainsi construits se couperont suivant deux sections coniques, et l'une de ces sections coniques ne sera autre que la droite G, laquelle jouera dans ce cas le rôle de *parabole*.

La conique plane du troisième degré ne peut donc présenter dans son cours de point pour lequel le rayon de courbure soit infini.

Les diverses recherches précédentes, touchant les formes que peut présenter la conique plane du quatrième et du troisième degré, sont très-incomplètes; mais, cependant, tout incomplètes qu'elles sont, elles doivent nous faire concevoir l'espérance de voir un jour la *géométrie descriptive* nous fournir une collection d'*épures* représentant le tracé exact de toutes les formes variées que peut présenter la conique plane du quatrième et du troisième degré.

Et de plus, ces recherches ne nous donnent-elles pas le droit de dire que la géométrie descriptive n'est pas seulement *un art* donnant les moyens de représenter rigoureusement les formes de l'espace limité par des surfaces, mais qu'elle est vraiment une *science*, puisqu'elle permet de découvrir certaines propriétés géométriques dont les surfaces et les courbes jouissent, en vertu de leur forme et de leur mode de génération ; et de découvrir aussi toutes les propriétés géométriques relatives aux relations de positions qui peuvent exister entre certains groupes de points, de courbes ou de surfaces.

Aussi, je crois que l'on peut dire que la *géométrie descriptive*, ou la langue *graphique*, est éminemment apte à exprimer et à faire découvrir les *relations de position*, et que l'*analyse*, ou la langue *algébrique*, est éminemment apte à exprimer et à faire découvrir les relations *métriques*.

§ II.

Dans ce qui précède, nous avons, en ne nous servant que des méthodes de la *géométrie descriptive*, essayé d'établir une nomenclature des coniques du quatrième et du troisième degré, en fondant cette nomenclature sur les *points singuliers* que les diverses courbes composant cette *famille* pouvaient présenter.

Nous allons maintenant démontrer que la projection, sur un plan, de la courbe à double courbure, intersection de deux surface du second degré, est toujours une *conique plane* du quatrième degré, et, dans certains cas, une *conique plane* du troisième degré.

Théorème 1. *Par huit points situés trois à trois dans des plans différents, on peut toujours faire passer deux surfaces coniques du second degré;* ou, en d'autres termes : *par les huit points sommets d'un octogone gauche (dont, par conséquent, trois côtés consécutifs ne sont pas situés dans un même plan), on peut toujours faire passer deux cônes du second degré.*

*Démonstration.* Par huit points situés trois à trois dans des plans différents, on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre, puisque neuf points situés trois à trois dans des plans différents déterminent toujours une surface du second ordre, et qu'ils n'en déterminent qu'une seule.

Parmi toutes ces surfaces du second ordre déterminées par huit points de l'espace, ne peut-il pas exister un cône du second degré ?

Et si un cône du second degré peut toujours passer par huit points situés dans l'espace et placés trois à trois dans des plans différents, n'en peut-il passer qu'un seul ou plusieurs ?

Telles sont les questions que je me propose de résoudre.

Désignant par $\alpha$, $6$, $\gamma$, les coordonnées du sommet d'un cône, on sait que l'équation générale des surfaces coniques est de la forme :

$$f\left(\frac{y-6}{z-\gamma}, \frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)=0$$

L'équation d'un cône du second degré sera donc :

$$\left(\frac{y-6}{z-\gamma}\right)^2+\text{A}\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)^2+\text{B}\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)\left(\frac{y-6}{z-\gamma}\right)+\text{C}\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)+\text{D}\left(\frac{y-6}{z-\gamma}\right)+\text{E}=0$$

Ou, après avoir ordonné :

$$\left.\begin{array}{r|r|r|r} y^2 + Ax^2 + Ez^2 + Bxy - 2\beta & y - 2A\alpha & x - C\alpha & z + \beta^2 \\ + Cxz - B\alpha & - B\beta & - D\beta & + A\alpha^2 \\ + Dyz - D\gamma & - C\gamma & - 2E\gamma & + E\gamma^2 \\ & & & + 2B\alpha\beta \\ & & & + 2C\alpha\gamma \\ & & & + 2D\gamma\beta \end{array}\right\} = 0 \qquad (1)$$

Or, si l'on se donne les coordonnées

$$(x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), \ldots\ldots (x_8, y_8, z_8)$$

des huit points de l'espace, et que l'on substitue les valeurs de ces coordonnées à la place de $(x, y, z)$ dans l'équation (1), on obtiendra huit équations, dans lesquelles entreront les cinq coefficients A, B, C, D, E et les trois coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma)$ du sommet du cône à déterminer.

On aura donc autant d'équations que de quantités à déterminer.

Ainsi : *on peut toujours faire passer par huit points de l'espace situés trois à trois dans des plans différents une surface conique du second ordre.*

Cela démontré, l'équation :

$$\begin{array}{l} y^2 + Ax^2 + Ez^2 + Byz + My + Nx + Pz + K = 0 \qquad (2) \\ \qquad\qquad\qquad\quad + Cxz \\ \qquad\qquad\qquad\quad + Dyz \end{array}$$

représentera toujours un cône, si l'on pose les quatre équations de condition suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} M + 2\beta + B\alpha + D\gamma = 0 \\ N + 2A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \\ P + C\alpha + D\beta + 2E\gamma = 0 \\ K = \beta^2 + A\alpha^2 + E\gamma^2 + 2B\alpha\beta + 2C\alpha\gamma + 2D\beta\gamma \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Or, si l'on se donne les coordonnées de huit points de l'espace, on pourra toujours substituer les valeurs de ces coordonnées à la place de $(x, y, z)$ dans l'équation (2) et déterminer les quantités A, B, C, D, E, M, N, P, au nombre de huit, en fonctions des coordonnées des huit points et de la quantité K.

Ensuite, dans les équations (3), on pourra remplacer les coefficients A, B, C,... par les valeurs trouvées.

Or, remarquons que K entre au premier degré dans l'équation (2); par conséquent, les valeurs des coefficients A, B, C,.... seront de la forme :

$$A = VK + U,\quad B = V'K + U',\quad C = V''K + U'', \ldots.$$

V et U, V' et U', V'' et U'',.... étant des fonctions dans lesquelles il n'entre que les coordonnées des huit points de l'espace.

En un mot, A, B, C,.... seront des fonctions linéaires de K.

Les trois premières équations (3) pourront donc être écrites de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{r} 2\beta + \alpha(V'K + U') + \gamma(V'''K + U''') + (M_1K + M_2) = 0 \\ 2\alpha(VK + U) + \beta(V'K + U') + \gamma(V''K + U'') + (N_1K + N_2) = 0 \\ \alpha(V''K + U'') + \beta(V'''K + U''') + 2\gamma(V_4K + U_4) + (P_1K + P_2) = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Les équations (4) serviront à déterminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en fonctions de K.

Et l'on trouvera pour $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, des fonctions du quatrième degré en K.

Substituant donc ces valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dans la dernière équation (3), on trouvera une équation du huitième degré en K.

Or, cette équation ne pourra avoir qu'un nombre pair de racines réelles; et comme nous avons vu ci-dessus que par huit points de l'espace, on pouvait toujours faire passer une surface conique, nous savons que cette équation du huitième degré en K doit admettre une racine réelle, et par conséquent au moins deux racines réelles.

Ainsi : *par huit points de l'espace situés trois à trois dans des plans différents, on peut toujours faire passer deux surfaces coniques du second degré ;* ce qu'il fallait démontrer.

Nous venons de démontrer que par les huit sommets d'un octogone gauche on pouvait toujours faire passer deux cônes du second degré ; il resterait à démontrer qu'on ne peut faire passer que deux cônes.

L'équation du huitième degré en K nous montre qu'il ne peut exister trois cônes passant par la courbe qui unit les huit points de l'espace, car K ne peut avoir seulement trois valeurs réelles ; il faut, si K a trois valeurs réelles, qu'il en ait nécessairement quatre. Il faudrait donc discuter l'équation du huitième degré en K, et prouver qu'elle n'admet que deux racines réelles. Or, les calculs seraient trop longs.

L'équation en K précédemment donnée ne peut donc nous servir pour résoudre, d'une manière prompte et simple, la question posée ci-dessus. Dès lors, nous allons recourir aux considérations géométriques.

Désignons par C la courbe qui unit les huit points de l'espace; par S le sommet du premier cône qui enveloppe la courbe C; par S' le sommet du deuxième cône qui enveloppe aussi la même courbe C.

Par la droite SS' des sommets, faisons passer un plan sécant P.

Ce plan P coupera le cône (S, C) suivant deux génératrices G et G'; ce même plan coupera le cône (S', C) suivant deux génératrices H et H'.

Ces quatre génératrices se couperont deux à deux en quatre points, qui seront ceux en lesquels la courbe C est coupée par le plan P, et l'on voit évidemment, par ce qui précède, qu'un plan ne peut couper la courbe-intersection de deux surfaces du second ordre en plus de quatre points.

Désignons par $m$ le point intersection de G et H
$m'$ . . . . . . . . . . . . . G et H'
$m''$ . . . . . . . . . . . . . G' et H
$m'''$. . . . . . . . . . . . . G' et H'

Désignons par T le plan tangent au cône (S, C) suivant G.
T' . . . . . . . . . . . . . . . . . suivant G'
Θ le plan tangent au cône (S', C) suivant H
Θ' . . . . . . . . . . . . . . . . . suivant H'.

Les deux plans T et T' se couperont suivant une droite X.

Les deux plans Θ et Θ' se couperont suivant une droite Y.

Les plans T et T' couperont la droite Y respectivement aux points $y$ et $y'$.

Les plans Θ et Θ' couperont la droite X respectivement aux points $x$ et $x'$.

Les plans tangents T, T', Θ et Θ' se couperont deux à deux suivant les tangents à la courbe C aux divers points $m$, $m'$, $m''$, $m'''$.

Désignons par $t$ la tangente au point $m$
$t'$ . . . . . . . . . . . . . $m'$
$t''$ . . . . . . . . . . . . . $m''$
$t'''$ . . . . . . . . . . . . . $m'''$

La droite. . . $t$ passera par les points $m$, $x$, $y$
$t'$ . . . . . . . . . . . . . $m'$, $x$, $y'$
$t''$ . . . . . . . . . . . . . $m''$, $x'$, $y$
$t'''$ . . . . . . . . . . . . . $m'''$, $x'$, $y'$

Or, par $t$ et $t'$, par $t''$ et $t'''$ passent les plans tangents du système Θ au cône (S', C).

Or, par $t$ et $t''$, par $t'$ et $t'''$ passent les plans tangents du système T au cône (S, C)

Pour qu'il y ait un troisième cône, il faudrait que l'on pût faire passer deux plans, l'un par $t'$ et $t''$, l'autre par $t$ et $t'''$.

Or, cela est impossible, puisque $t'$ et $t''$, $t$ et $t'''$ ne se couperont deux à deux qu'autant que les droites X et Y se couperont, et alors $t'$ et $t'''$ se couperont en un seul et même point qui ne sera autre que celui en lequel X et Y se couperont.

Or X et Y ne se couperont qu'autant que la courbe C ne sera autre que deux courbes planes A et B, en d'autres termes, qu'autant que la courbe C ne sera autre que deux sections coniques.

Et alors le point de rencontre des droites X et Y sera situé sur la droite intersection des plans des courbes A et B.

Ce n'est donc que lorsque les deux cônes (S, C) et (S', C) se couperont suivant deux courbes planes A et B que leur courbe d'intersection pourra être enveloppée par trois cônes du troisième degré; et dans ce cas, le troisième cône ne sera autre que les deux plans des courbes A et B, dont se compose la courbe C.

Ainsi, la courbe géométrique et à double courbure qui passe par les huit sommets d'un octogone gauche, est située et ne peut être située que sur deux cônes du second degré.

Démontrons maintenant que la courbe-intersection de deux surfaces du second ordre, n'est autre que la courbe géométrique passant par les huit sommets d'un octogone gauche.

On sait que par huit points de l'espace l'on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre, et que par neuf points de l'espace on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre.

Désignons par $\Sigma$ la surface du second ordre qui passe par neuf points donnés; par S et S' les deux cônes du second ordre qui passent par huit de ces neuf points.

Désignons par C la courbe-intersection des cônes S et S'; par B l'intersection de $\Sigma$ et S; et par B' l'intersection de $\Sigma$ et S'.

Je dis que les trois courbes à double courbure C, B et B' ne sont qu'une seule et même courbe.

Et en effet :

L'intersection de deux surfaces du second degré est une courbe du quatrième degré.

Si deux surfaces se coupent suivant une courbe du quatrième degré, et que l'une des surfaces soit du second degré, il faut nécessairement que la seconde surface soit du second degré.

Or si le cône S et la surface $\Sigma$ se coupent suivant une courbe B différente de la courbe C, comme les courbes B et C passent toutes deux par les huit mêmes points, il s'ensuivrait que l'on pourrait faire passer par huit points de l'espace plus de deux surfaces coniques du second degré. Donc, etc.

Puisque d'après ce qui a été dit ci-dessus : *l'intersection de deux surfaces du*

*second ordre peut toujours être enveloppée par deux cônes du second degré*, l'on n'a qu'à examiner les propriétés dont jouit la projection de la courbe-intersection de deux cônes du second degré, pour connaître toutes les propriétés dont peut jouir la projection de la courbe-intersection de deux surfaces du second ordre ; c'est ce qui nous a engagé à donner à la courbe géométrique intersection de deux surfaces du second ordre le nom de *conique à double courbure du quatrième degré*, et par suite le nom de *conique plane du quatrième degré* à la projection sur un plan de la conique à double courbure.

Mais il peut arriver que l'un des cônes enveloppant la courbe-intersection de deux surfaces du second ordre devienne un cylindre ; il peut arriver aussi que les deux cônes enveloppant cette courbe deviennent l'un et l'autre un cylindre du second degré.

On doit donc, lorsque l'on considère la projection sur un plan de la courbe-intersection de deux cônes du second degré, comme représentant toutes les coniques planes du quatrième degré, supposer les cas où 1° le sommet de chacun des deux cônes, ou 2° le sommet d'un seul des deux cônes serait transporté à l'infini.

Par conséquent, la projection (sur un plan) de la courbe-intersection :

1° de deux cônes du second degré,

2° d'un cône et d'un cylindre du second degré,

3° de deux cylindres du second degré,

représentera toutes les *coniques planes* du quatrième degré.

Lorsque l'on combinera : 1° un cône et un cylindre, et 2° deux cylindres (du second degré) entre eux, on devra remarquer qu'il existe trois cylindres du second degré :

1° Le cylindre ayant pour section droite une *ellipse* ou un cercle ;

2° Le cylindre ayant pour section droite une *parabole* ;

3° Le cylindre ayant pour section droite une *hyperbole*.

Huit points de l'espace déterminant une courbe géométrique à double courbure, huit points situés sur un plan détermineront toujours une courbe géométrique.

Cette courbe plane sera du quatrième degré. Si l'on prend donc l'équation générale des courbes du quatrième degré, et qui est :

$$\left.\begin{array}{r} x^4 + Dy^4 + Hx^3y \\ + Ax^3 + Ey^3 + Kxy^3 \\ + Bx^2 + Fy^2 + Lx^2y^2 \\ + Cx + Gy + Mx^2y \\ + Ny^2x \\ + Pxy \\ + Q \end{array}\right\} = 0$$

On pourra donner à six, des quatorze coefficients, des valeurs arbitraires et déterminer les huit autres par la condition que la courbe passe par les huit points donnés.

On obtiendra donc la valeur de ces huit coefficients en fonction des coordonnées des huit points et des valeurs attribuées aux six coefficients choisis arbitrairement.

L'équation à laquelle on parviendra sera du quatrième degré et représentera une conique plane du quatrième degré; par cette méthode, on n'obtient qu'une courbe particulière, mais par la méthode suivante on peut obtenir l'équation générale des coniques planes du quatrième degré, en considérant les équations de deux cônes ayant pour base sur le plan $xy$, l'un la courbe ayant pour équation : $y^2+mx^2+nx+q=0$, l'autre ayant pour équation : $y^2+ax^2+bxy+cx+dy+f=0$.

Ces deux cônes auront pour équation; le premier

$$(y-\beta)^2+m(x-\alpha)^2+n(x-\alpha)(z-\gamma)+q(z-\gamma)^2=0$$

le deuxième

$$(y-\beta')^2+a(x-\alpha')^2+b(x-\alpha')(y-\beta')+c(x-\alpha')(z-\gamma')+d(y-\beta')(z-\gamma')+f(z-\gamma')^2=0$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les coordonnées du sommet du premier cône;
$\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ étant les coordonnées du sommet du second cône.

En éliminant $z$ entre ces deux équations, on aura l'équation générale des coniques planes du quatrième degré, renfermant les quatorze constantes

$$m,\ n,\ q,\ a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'.$$

On pourra attribuer à six de ces quatorze constantes des valeurs arbitraires; les huit autres seront déterminées en fonction des coordonnées des huit points et des valeurs attribuées aux six constantes arbitrairement choisies; et l'on obtiendrait l'équation d'une conique plane particulière.

Mais on pourra simplifier l'équation de la conique plane du quatrième degré, en supposant que l'origine des coordonnées se trouve sur l'une des bases des deux cônes, ainsi on pourra, sans affecter la généralité de l'équation de la conique plane, supposer que $q=0$.

Dès lors, l'élimination de $z$ sera facile, et l'on aura pour l'équation générale des coniques planes du quatrième degré :

$$(y-\beta')^2+a(x-\alpha')^2+b(x-\alpha')(y-\beta')+\left\{c(x-\alpha')+d(y-\beta')\right\}\left\{\frac{n(x-\alpha)\gamma-(y-\beta)^2-m(x-\alpha)^2}{n(x-\alpha)}-\gamma'\right\}+$$
$$+\left[\frac{n(x-\alpha)\gamma-(y-\beta)^2-m(x-\alpha)^2}{n(x-\alpha)}-\gamma'\right]^2=0$$

Cette équation ne renferme plus que treize constantes arbitraires, on pourra donc donner des valeurs à six d'entre elles, et les sept autres seront déterminées en fonction de ces valeurs et des coordonnées des huit points par lesquels la conique plane particulière doit passer.

On aura donc une équation de condition qui devra être satisfaite. Cette équation de condition sera celle qui établit que l'origine des coordonnées est située sur la section conique, base de l'un des deux cônes.

En général, on pourrait choisir les coordonnées des deux sommets pour les six constantes auxquelles on attribue des valeurs arbitraires.

On sera conduit, dans ce cas, à calculer les coefficients $m$, $n$, $a$, $b$, $c$, $d$, $f$, qui, étant connus, permettront de construire les bases des deux cônes; et par suite les deux cônes seront connus de forme et de position.

Il est donc évident qu'au moyen de la géométrie descriptive, on pourra toujours construire la conique plane du quatrième degré assujettie à passer par huit points donnés.

THÉORÈME 2. *Par cinq points de l'espace et une droite, on peut toujours faire passer deux cônes du second degré.*

En effet : l'équation du cône du second degré dont les coordonnées du sommet sont représentées par $(\alpha, \beta, \gamma)$ est, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, page 178.

$$\left.\begin{array}{r|r|r|r} y^2 + Ax^2 + Ez^2 + Bxy - 2\beta & y - 2A\alpha & x - C\alpha & z + \beta^2 \\ + Cxz - B\alpha & - B\beta & - D\beta & + A\alpha^2 \\ + Dyz - D\gamma & - C\gamma & - 2E\gamma & + E\gamma^2 \\ & & & + 2B\alpha\beta \\ & & & + 2C\alpha\gamma \\ & & & + 2D\beta y \end{array}\right\} = 0 \qquad (1)$$

Représentons par $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$,..... $(x_1, y_1, z_1)$ les coordonnées des cinq points de l'espace, et par

$$\left.\begin{array}{l} x - \alpha = m(z - \gamma) \\ \gamma - \beta = n(z - \gamma) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

les équations de la droite donnée dans l'espace.

La droite devra être tout entière sur la surface conique, il faudra donc que les équations (1) et (2) aient lieu en même temps.

En tirant des équations (2) les valeurs de $x$ et $y$ et les substituant dans l'équation (1), on aura une équation de la forme :

$$Xz^2 + Yz + Z = 0$$

qui devra être satisfaite, quel que soit $z$; on aura donc, les équations de condition :

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0 \qquad (3).$$

Or, X, Y, Z sont des fonctions des coefficients A, B, C, D, E, et des coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ du sommet du cône.

En remplaçant $x$, $y$, $z$ dans l'équation (1) par les valeurs des coordonnées des cinq points de l'espace, on obtiendra cinq équations qui, avec les trois équations de condition (3), serviront à déterminer les huit indéterminées A, B, C, D, E, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Ainsi, on aura autant d'équations que d'indéterminées; on doit donc conclure : *qu'il passe toujours un cône du second degré, par une droite et par cinq points de l'espace.*

Cela posé :

Qui nous empêche de prendre sur la droite de l'espace trois points $a$, $b$, $c$, lesquels, avec les cinq points primitivement considérés, formeront un groupe de huit points.

Désignant par $(x', y' z')$, $(x''', y'', z'')$, $(x''', y''', z''')$ les coordonnées de ces trois points $a$, $b$, $c$, on devra avoir les équations de condition suivante :

$$\left.\begin{aligned} y' &= y'' + \frac{y'' - y'''}{z'' - z'''}(z' - z'') \\ x' &= x'' + \frac{x'' - x'''}{z'' - z'''}(z' - z'') \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

En remplaçant $x$, $y$, $z$ dans l'équation (1) par les valeurs des coordonnées des cinq premiers points et des points $b$ et $c$, et ensuite par $z'$ et les valeurs de $y'$ et de $x'$ tirées des équations (4), on obtiendra toujours une équation du huitième degré en K telle que celle que nous avons obtenue précédemment lorsque nous avons donné la démonstration du *théorème* 1.

Et comme nous venons de démontrer ci-dessus que, par une droite ou par trois points en ligne droite et par cinq autres points de l'espace, on pouvait toujours faire passer un cône du second degré, cette équation du huitième degré en K admet nécessairement une valeur réelle pour K, et comme l'équation est de degré pair, elle admet au moins deux valeurs réelles pour K.

Ainsi, *par une droite et par cinq points de l'espace, ou par huit points de l'espace dont trois sont en ligne droite, on peut toujours faire passer deux cônes du second degré.*

Par conséquent, *par sept points de l'espace on peut toujours faire passer deux cônes du second degré ayant une génératrice droite commune.*

Ainsi, l'équation du troisième degré provenant de l'équation du quatrième degré (représentant une conique plane du quatrième degré) divisible en deux facteurs, l'un du troisième et l'autre du premier degré, représente toutes les *coniques planes* du troisième degré.

Ainsi, la projection, sur un plan, de la courbe-intersection de deux cônes du second degré ayant une génératrice droite commune peut représenter toutes les *coniques planes* du troisième degré.

Pour les *coniques planes* du troisième degré, nous ferons la même remarque que pour les *coniques planes* du quatrième degré.

Ainsi, les deux cônes ayant une génératrice commune peuvent être tels que le sommet de l'un d'eux se transporte à l'infini, auquel cas on aurait à considérer la projection, sur un plan, de la courbe-intersection d'un cône et d'un cylindre du second degré ayant une génératrice commune.

On ne pourra supposer que les deux cônes se transforment en deux cylindres ayant une génératrice commune, car on n'obtiendrait que des droites pour l'intersection.

Ainsi, pour avoir la nomenclature complète des *coniques planes* du troisième degré, il faudra considérer la projection sur un plan de l'intersection :

1° De deux cônes du second degré ayant une génératrice commune;

2° D'un cône et d'un cylindre du second degré ayant une génératrice commune, et dans ce dernier cas combiner, avec un cône du second degré, le cylindre ayant pour section droite : 1° une *ellipse* ou un cercle, 2° une *parabole*, 3° une *hyperbole*.

## § III.

Le problème suivant : *Construction du point en lequel la courbe de contact d'une surface quelconque et d'une surface développable a pour tangente la génératrice de la surface développable passant par ce point*, peut facilement être résolu au moyen des surfaces diamétrales de la surface courbe et de la surface développable données. Et ce problème sera une nouvelle application de ce qui a été exposé au commencement du § Ier de ce troisième chapitre.

Hachette est le premier qui se soit occupé de ce problème, et qui en ait donné

la solution : il remarqua que ce point particulier ne pouvait exister qu'autant que la surface courbe avait, en ce point, des rayons de courbure dirigés en sens inverse, et dès lors il démontra que l'hyperboloïde à une nappe et de révolution, osculateur en ce point et à la surface courbe, devait avoir une de ses deux génératrices droites qui se croisaient en ce point, ou 1° passant par le sommet du cône tangent à la surface courbe, ou 2° parallèle aux génératrices du cylindre tangent à la surface courbe, ou 3° tangente à l'arête de rebroussement de la surface développable tangente à la surface courbe.

Et ensuite, au moyen d'une courbe d'erreur, il parvint à construire le point cherché, dans le cas où la surface courbe étant une surface de révolution, était enveloppée : 1° par un cône, ou 2° par un cylindre.

Depuis, j'ai repris le problème, et j'y ai ajouté quelques considérations nouvelles qui ont été publiées dans le *Bulletin de la Société philomatique* (*), mais dans la note que j'ai donnée à la Société philomatique, j'ai employé les surfaces osculatrices du second degré ainsi que l'avait fait HACHETTE.

Aujourd'hui, je vais donner une construction nouvelle de ce point remarquable; cette construction est moins élégante, sans aucun doute, sous le point de vue de *géométrie théorique*, que celle due à HACHETTE ; mais elle a un grand avantage, celui de pouvoir s'appliquer à toute surface courbe, et quelle que soit la surface enveloppe et tangente à la surface courbe donnée; car, il faut bien le reconnaître, la solution graphique du problème n'est possible qu'autant que l'on connaît les deux rayons de courbure maximum et minimum, pour un point quelconque de la surface courbe proposée lorsqu'on veut employer le mode de solution proposé par HACHETTE. Or, il n'est pas facile de déterminer la longueur de ces rayons de courbure pour toutes les surfaces, et pour n'en citer qu'un exemple, pour une surface définie par une suite de sections parallèles. Si cette méthode s'applique avec avantage aux surfaces de révolution (et remarquons que *Hachette* ne l'a appliqué graphiquement qu'à ce genre de surface), c'est que l'on connaît immédiatement, pour un point quelconque d'une telle surface, les rayons de courbure maximum et minimum.

La solution donnée par HACHETTE n'est donc pas générale sous le point de vue *graphique*, quoique complète sous le point de vue *géométrique* ou *théorique*.

Et il me sera permis de rappeler ici, car c'est vraiment ici le lieu, que très-souvent les solutions *géométriques* les plus élégantes devaient être modifiées pour les rendre *graphiques*; que souvent aussi elles devaient être abandonnées pour y

(*) Voyez le Bulletin de la Société philomatique. Séance du 8 décembre 1832.

substituer des solutions moins élégantes sous le point de vue *théorique*, mais se prêtant avec facilité aux constructions *graphiques*.

I. *Construction du point* p, *de la courbe de contact* C, *d'un cylindre* P *et d'une surface quelconque* Σ, *pour lequel la tangente à la courbe de contact* C *n'est autre qu'une génératrice du cylindre enveloppe* P.

D'après ce qui a été dit (§ Ier), si l'on coupe le cylindre P par un plan Q perpendiculaire à ses génératrices droites, le point *p* cherché se projettera orthogonalement sur le plan Q en un point $p'$, en lequel la section droite B du cylindre P par le plan Q offrira un point de *rebroussement*.

On peut toujours considérer la courbe C comme étant l'intersection de deux surfaces, Σ qui est connu et Σ′ que l'on peut imaginer; dès lors, le problème proposé n'est autre qu'un de ceux résolus dans le § Ier.

Si donc nous construisons la surface diamétrale $\delta$ de la surface donnée Σ par rapport aux cordes de cette surface parallèles aux génératrices droites du cylindre enveloppe P, la surface $\delta$ coupera la surface Σ suivant une courbe $\gamma$, laquelle coupera la courbe C au point *p* cherché.

II. *Construction du point* p, *de la courbe de contact* C, *d'un cône* P *et d'une surface quelconque* Σ, *pour lequel la tangente à la courbe de contact* C *n'est autre qu'une génératrice droite du cône enveloppe* P.

Désignons par G, $G_1$, $G_2$, $G_3$,..... les diverses génératrices du cône, et par $p$, $p_1$, $p_2$, $p_3$,..... les points en lesquels ces génératrices rencontrent respectivement la courbe C de contact.

Nous pourrons toujours projeter orthogonalement la courbe C en C′ sur un plan arbitraire R.

Nous pourrons toujours obtenir les projections G′, $G'_1$, $G'_2$, $G'_3$,...., sur le plan R des génératrices G, $G_1$, $G_2$, $G_3$,.... nous pourrons toujours construire une quelconque des surfaces cylindriques diamétrales du cylindre K projetant la courbe C en la courbe C′.

Désignons par $\delta$ la courbe diamétrale de C′ par rapport aux cordes parallèles à G′; par $\delta'$ celle obtenue par rapport aux cordes parallèles à $G'_1$, et ainsi de suite.

Les cylindres ayant pour section droite respective les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$..... ne seront autres que ceux qui partagent en deux parties égales les cordes du cylindre K parallèles ou à la génératrice G, ou à la génératrice $G_1$, ou à la génératrice $G_2$,.... et qui coupent le cône P suivant des courbes D, D′, D″...., lesquelles courbes couperont les génératrices G, $G_1$, $G_2$,.... respectivement en des

points $q$, $q_1$, $q_2$, $q_3$.... et tous ces points formeront une courbe $\rho$ qui coupera la courbe C au point $p$ demandé.

III. *Construction du point* p, *de la courbe de contact* C, *d'une surface développable* P *et d'une surface quelconque* $\Sigma$, *pour lequel la tangente à la courbe de contact* C *n'est autre qu'une génératrice droite de la surface enveloppe et développable* P.

Il est évident que la construction sera identiquement la même que celle donnée au n° II ci-dessus.

## § IV.

### *Utilité et emploi des courbes d'erreur.*

*Problème* 1. Lorsque l'on a construit les projections horizontale et verticale de la courbe-intersection de deux surfaces, il est souvent, et presque toujours, nécessaire de donner les limites de chacune des courbes-projections, afin que la courbe de l'espace soit le plus rigoureusement représentée que faire se peut.

Il n'est donc pas sans intérêt, sous le point de vue *graphique*, de connaître une méthode générale et pratique qui puisse nous permettre, dans tous les cas, de construire à l'une des courbes de projection la tangente parallèle à une droite donnée; ou, en d'autres termes, de construire à la courbe-projection une tangente faisant avec la ligne de terre un angle donné.

Désignons par C la courbe-intersection des deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$; par $C^h$ sa projection horizontale, et par $C^v$ sa projection verticale.

Désignons par B une droite de direction arbitraire et tracée sur le plan horizontal.

On demande de construire à la courbe $C^h$ une tangente parallèle à B.

Pour résoudre ce problème, rappelons-nous que si l'on donne un point $x$ de la courbe C, la tangente $\theta$ en ce point $x$ s'obtient par l'intersection de deux plans tangents au point $x$, l'un T construit pour la surface $\Sigma$, l'autre T' construit pour la surface $\Sigma'$.

Dès lors considérant une suite de points $x^h$, $x'^h$, $x''^h$,.... de la courbe $C^h$, nous pourrons construire en chacun de ces points les tangentes $\theta^h$, $\theta'^h$, $\theta''^h$..... pour obtenir les pieds sur le plan horizontal, ou, en d'autres termes, les traces horizontales des tangentes $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,.... on déterminera les traces horizontales des couples de plans T et T' tangents en $x$, $T_1$ et $T_1'$ tangents en $x'$, etc.; les points $a$, $a'$, $a''$ en lesquels se coupent deux à deux ces diverses traces horizontales, seront les traces horizontales des tangentes $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,...., etc.

Cela posé :

Menons par le point $a$ une droite $B_1$ parallèle à B; abaissons du point $x^h$ une perpendiculaire sur $B_1$ et la coupant au point $b$.

Faisons la même construction pour chacun des points $a'$, $a''$.... nous obtiendrons une suite de points $b$, $b'$, $b''$,.... qui détermineront une courbe $\delta$ laquelle coupera la courbe $C^h$ en des points pour chacun desquels la tangente sera parallèle à B.

Au lieu d'abaisser du point $x^h$ une perpendiculaire sur $B_1$, on aurait pu mener par $x^h$ une perpendiculaire sur $\theta^h$, laquelle aurait coupée $B_1$ en un point $d$ et tous les points obtenus de la même manière, et ainsi $d$, $d'$, $d''$,.... auraient déterminé une courbe $\gamma$ qui aurait coupé la courbe $C^h$ en des points pour chacun desquels la tangente aurait été parallèle à B.

On aurait encore pu, du point $a$ comme centre et avec un rayon égal à $x^h a$, décrire un cercle, lequel aurait coupé la droite $B_1$ en un point $k$, et tous les points homologues $k$, $k'$, $k''$,..... auraient déterminé une courbe $\mu$, laquelle aurait coupé la courbe $C^h$ en des points pour chacun desquels la tangente aurait été parallèle à B.

Il est évident que les trois courbes d'erreur $\delta$, $\gamma$, $\mu$, doivent toutes se couper en des mêmes points situés sur $C^h$.

De sorte que les trois constructions peuvent réciproquement se servir de vérification.

Cette construction graphique n'est pas très-longue, car l'on peut, au moyen de l'équerre et de la règle, fixer d'une manière grossière la position du point qui, situé sur $C^h$, donnerait une tangente parallèle à B, et prendre avant et après ce point un certain nombre de points $x$, $x'$, $x''$, $x'''$,... de la courbe $C^h$, et exécuter pour chacun d'eux les constructions précédentes; l'une quelconque des trois courbes d'erreur $\delta$, $\gamma$, $\mu$, déterminera d'une manière, sinon rigoureuse sous le point de vue *géométrique* ou *théorique*, du moins d'une manière très-suffisamment approchée pour la pratique, et par conséquent rigoureuse sous le point de vue *graphique*, le point de la courbe $C^h$ pour lequel la tangente sera parallèle à la droite B donnée de direction sur le plan horizontal de projection.

La construction que nous venons de donner est générale, mais elle peut être modifiée suivant les cas particuliers.

Prenons pour exemple deux surfaces de révolution dont les axes se coupent, et proposons-nous de trouver la tangente à la projection verticale de la courbe-intersection de ces deux surfaces, cette tangente étant assujettie à être perpendiculaire à la ligne de terre.

(Nous n'avons pas besoin d'exécuter l'épure, tous ceux qui ont suivi un cours de géométrie descriptive connaissent cette épure.)

Et d'abord, faisons remarquer que lorsque l'on a une surface de révolution, la normale en un point de cette surface se détermine facilement sans que l'on soit obligé de construire le plan tangent en ce point; pour toutes les autres surfaces, la construction de la tangente exige la connaissance des *traces* du plan tangent.

Aussi, ne peut-on employer, pour construire la tangente en un point de l'intersection de deux surfaces, la méthode dite : *du plan des deux normales* qu'autant que les deux surfaces sont l'une et l'autre de révolution.

Dans le cas proposé, la projection verticale de la tangente $\theta$ en un point $x$ de la courbe C intersection des deux surfaces de révolution $\Sigma$ et $\Sigma'$ sera donc, ainsi qu'on le sait, perpendiculaire à la projection verticale D' d'une verticale D du plan des deux normales N pour $\Sigma$ et N' pour $\Sigma'$, les deux normales N et N' se croisant au point $x$.

Cela posé :

Il est évident que puisque la tangente à la courbe C' doit être perpendiculaire à la ligne de terre, il faut que la droite D' soit aussi perpendiculaire à la ligne de terre.

Dès lors, nous prendrons plusieurs points sur la courbe C' avant et après le point qui, déterminé grossièrement au moyen de la règle et de l'équerre, serait celui pour lequel la tangente paraît (*à l'œil*) devoir être perpendiculaire à la ligne de terre.

Désignons ces points par $x, x', x'', x''', \ldots$; par chacun d'eux nous mènerons des cordes perpendiculaires à la projection verticale A' de l'axe A de la surface $\Sigma$ (lequel axe A est supposé vertical).

Ces cordes couperont la courbe méridienne M de la surface $\Sigma$ en des points $m, m', m'', m''', \ldots$; en ces points nous mènerons des normales à la courbe M, lesquelles couperont l'axe A en des points $o, o', o'', o''', \ldots$; par les points $o, o', o'', o''' \ldots$ nous mènerons une suite L, L', L'', L''', ... de droites parallèles à la ligne de terre.

Par les mêmes points $x, x', x'', x''', \ldots$ nous mènerons une suite de cordes perpendiculaires à la projection verticale A'' de l'axe A' de la surface $\Sigma'$, lesquelles couperont la courbe méridienne M' de cette surface en des points $n, n', n'', n''', \ldots$ En ces divers points, nous construirons les normales de la courbe M', lesquelles couperont l'axe A' en des points $q, q', q'', q''', \ldots$; nous joindrons par des droites les points $o$ et $q$, $o'$ et $q'$, $o''$ et $q''$, ... etc.

Puis, du point $o$ comme centre et avec $oq$ pour rayon, nous décrirons un arc de cercle qui coupera la droite L en un point $b$. Faisant la même construction pour chacun des points $o', o'', o''', \ldots$ etc., les divers points $b, b', b'', \ldots$ déter-

mineront une courbe $\delta$ laquelle coupera la projection verticale $A''$ de l'axe $A'$ en un point $a'$.

Menant par $a'$ une parallèle à la ligne de terre, elle coupera la projection verticale de l'axe A en un point $a$.

Menant par le point $a$ une normale à M, on aura le point $y$, en lequel cette normale coupe la courbe M ; menant par le point $a'$ une normale à $M'$, on aura le point $y'$, en lequel cette normale coupe la courbe $M'$.

Enfin, menant par $y$ une perpendiculaire sur $A^v$ et par $y'$ une perpendiculaire sur $A''$, ces deux droites se couperont en un point $z$ situé sur $C^v$, et pour ce point la tangente à $C^v$ sera perpendiculaire à la ligne de terre.

*Problème* 2. Imaginons trois surfaces $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$ se coupant deux à deux, et désignons par C la courbe-intersection de $\Sigma$ et $\Sigma'$ et par $C'$ la courbe-intersection de $\Sigma'$ et $\Sigma''$.

On propose de déterminer le plan tangent aux courbes C et $C'$ qui sera perpendiculaire au plan horizontal.

Il est évident que la question n'est autre que celle-ci : construire à $C^h$ et $C'^h$ une tangente commune, laquelle sera la trace horizontale du plan demandé.

Pour résoudre le problème énoncé en les derniers termes ci-dessus, il faudra, au moyen de l'équerre et de la règle, fixer d'une manière grossière la tangente commune demandée.

On aura donc un point $x$ sur C et un point $y$ sur $C'$ pour points de contact demandés, mais très-grossièrement déterminés l'un et l'autre.

Pour obtenir une position de chacun de ces points plus approximative, on fera la construction suivante :

On prendra sur la courbe $C^h$, avant et après le point $x^h$, un certain nombre de points $x'^h$; $x''^h$, $x'''^h$, $x''''^h$, etc.

Pour chacun des points $x'$, $x''$, $x'''$,.... de la courbe C, on construira rigoureusement les tangentes $\theta'$, $\theta''$, $\theta'''$, etc., et l'on obtiendra dès lors les tangentes $\theta'^h$, $\theta''^h$, $\theta'''^h$, etc. à la courbe $C^h$.

On construira ensuite, par les méthodes exposées ci-dessus lorsque nous avons résolu le *problème* 1, les tangentes $t'^h$, $t''^h$, $t'''^h$,.... à $C'^h$ qui seront respectivement parallèles aux tangentes $\theta'^h$, $\theta''^h$, $\theta'''^h$....

On obtiendra donc les points $y'^h$, $y''^h$, $y'''^h$,.... en lesquels les droites $t'^h$, $t''^h$, $t'''^h$... sont tangentes à la courbe $C'^h$.

On pourra dès lors abaisser, des points $y'^h$, $y''^h$, $y'''^h$, etc., des droites respectivement perpendiculaires aux droites $\theta'^h$, $\theta''^h$, $\theta'''^h$,.... lesquelles seront coupées par ces perpendiculaires ou normales en des points $z'$, $z''$, $z'''$, etc. Tous ces points détermineront une courbe d'erreur $\delta$, laquelle coupera la courbe $C^h$ au point $y^h$.

Si des points $x'^h$, $x''^h$, $x'''^h$,.... on avait abaissé des perpendiculaires sur les droites $t'^h$, $t''^h$, $t'''^h$.... ces perpendiculaires auraient coupé respectivement les droites sur lesquelles elles étaient normales en des points $p'$, $p''$, $p'''$... lesquels auraient donné une courbe d'erreur $\gamma$ qui aurait coupé la courbe $C^h$ au point $x^h$.

Les points $y^h$ et $x^h$ ainsi déterminés seront ceux pour lesquels la droite qui les unit sera une tangente commune aux deux courbes $C^h$ et $C'^h$.

*Problème* 3. Proposons-nous de construire sur une surface donnée $\Sigma$:

1° Les courbes *d'égale teinte réelle*;

2° Les courbes *d'égale teinte apparente*.

*Première question*. Lorsqu'une surface $\Sigma$ est éclairée : 1° par un point lumineux $l$, ou 2° par un faisceau de rayons parallèles et lumineux L, on désigne par courbe *d'égale teinte réelle* la courbe tracée sur la surface $\Sigma$ et telle que pour chacun de ses points $x$ le plan tangent T à la surface $\Sigma$ fait un angle $\alpha$ constant : 1° avec la droite qui unit chacun des points $x$ et le point $l$, ou 2° avec la droite qui passant par chacun des points $x$ est parallèle à la direction L du faisceau lumineux.

Si l'on désigne par I l'intensité d'un rayon lumineux, on sait que (I . sin $\alpha$) exprimera l'intensité de la lumière sur la facette de la surface $\Sigma$ faisant un angle $\alpha$ avec le rayon lumineux qui vient frapper obliquement cette facette.

Il faudra donc, pour construire une courbe d'égale teinte réelle, chercher sur la surface $\Sigma$ tous les points $x$ pour lesquels le plan tangent à la surface $\Sigma$ fait avec le rayon lumineux un même angle $\alpha$.

Pour cela, imaginons sur la courbe $\Sigma$ une suite de courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,.... ; pour chacun des points de la courbe $\delta$ concevons les normales à la surface $\Sigma$; ces diverses normales formeront une surface réglée qui sera en général une surface gauche et que je désigne par $\Delta$; nous aurons donc une suite de surfaces réglées correspondant aux courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$.....

Ainsi, $\Delta$ pour $\delta$, $\Delta'$ pour $\delta'$, $\Delta''$ pour $\delta''$.... etc.

Si maintenant je considère la courbe $\delta$ : 1° comme la base d'un cône C ayant le point $l$ pour sommet, ou 2° comme la base d'un cylindre B ayant ses génératrices parallèles à la droite L, il faudra chercher laquelle des génératrices droites du cône C ou du cylindre B fait avec l'une des génératrices droites de la surface $\Delta$ un angle $\theta$ complément de l'angle $\alpha$ donné. Il faudra donc prendre sur la courbe $\delta$ une suite de points $x$, $x'$, $x''$, $x'''$,.... construire les génératrices G, G', G'',.... du cône C ou du cylindre B passant par ces points; construire les normales N, N', N'',.... de la surface $\Sigma$ et passant par ces points (ces normales N, N', N'',.... seront les génératrices de la surface $\Delta$);

Cela posé :

1° Dans le cas d'un point lumineux $l$ ou du cône C, on mènera dans le plan

G, N) et par le point $t$ une droite H faisant avec N l'angle $\beta$; les droites N et H se couperont en un point $a$.

Dans le plan (G', N') et par le point $t$, on mènera une droite H' faisant avec N' le même angle $\beta$; les droites N' et H' se couperont en un point $a'$, et ainsi de suite.

Les divers points $a$, $a'$,.... détermineront une courbe $\lambda$, laquelle coupera la courbe $\delta$ en un point $y$ pour lequel l'intensité de la lumière sera représentée par (I . sin $\alpha$).

On fera de même pour les courbes $\delta'$, $\delta''$, etc., et l'on obtiendra ainsi une suite de points $y$ sur $\delta$; $y'$ sur $\delta'$;.... qui pourront être unis par une courbe $\gamma$; cette courbe $\gamma$ sera sur la surface $\Sigma$ une courbe d'égale teinte réelle pour laquelle chacun de ses points sera frappé par un rayon lumineux émané du point $t$ sous l'angle $\alpha$.

Faisant varier l'angle $\alpha$ et par suite l'angle $\beta$, on construira les diverses courbes d'égales teintes réelles $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$....

2° Dans le cas d'un faisceau lumineux L ou du cylindre B.

On mènera les divers plans (G, N), (G', N'), (G'', N''),....; à partir du point $x$, on portera sur G une longueur P, et on aura un point $z$; à partir du point $x'$, on portera sur G' la même longueur P, et on aura un point $z'$, et ainsi de suite.

Les divers points $z$, $z'$, $z''$,.... détermineront une courbe $\delta_1$ tracée sur le cylindre B et équidistante de la courbe $\delta$.

($\delta_1$ ne sera donc autre que la courbe $\delta$ transportée parallèlement à elle-même sur le cylindre B à une distance P.)

Par les points $x$, $x'$, $x''$,.... on mènera des droites V, V', V'',.... situées respectivement dans les plans (G, N), (G', N'), (G'', N''),.... et faisant respectivement un angle $\beta$ (complément de l'angle donné $\alpha$) avec les normales N, N', N''....

On portera sur ces droites V, V', V''...., et à partir respectivement des points $x$, $x'$, $x''$,...., la longueur constante P; on obtiendra ainsi une suite de points $v$, $v'$, $v''$,.... qui détermineront une courbe R.

Les deux courbes R et $\delta_1$ se couperont en un point $r$ par lequel passera la génératrice du cylindre B venant frapper la surface $\Sigma$ sous l'angle donné $\alpha$ et en un point $y$ situé sur la courbe $\delta$.

On fera la même construction et en employant le même angle $\beta$ pour les courbes $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$,....; on aura dès lors une suite de points $y$, $y'$, $y''$,.... qui détermineront une courbe $\gamma$, laquelle sera sur la surface $\Sigma$ une courbe d'égale teinte réelle, dont tous les points seront frappés sous le même angle $\alpha$ par le faisceau lumineux L.

En faisant varier l'angle $\alpha$ et par suite l'angle $\beta$, on obtiendra d'autres courbes d'égale teinte réelle $\gamma'$, $\gamma''$, $\gamma'''$,....

*Deuxième question.* L'œil peut être situé à l'infini sur une droite A donnée de direction ou en un point $o$ de l'espace.

1° Si par les divers points de la courbe d'égale teinte réelle $\gamma$ on mène des parallèles à A, on formera un cylindre $B_1$;

2° Si par les divers points de la courbe d'égale teinte réelle $\gamma$, on mène des droites passant par le point $o$, on formera un cône $C_1$ ayant le point $o$ pour sommet.

Toutes les génératrices droites du cylindre $B_1$ et du cône $C_1$ ne feront pas avec la surface $\Sigma$ le même angle.

Si l'on considère les diverses courbes d'égale teinte réelle $\gamma'$, $\gamma''$, $\gamma'''$,...., on aura une suite de cylindres $B_1'$, $B_1''$, $B_1'''$,...., ou une suite de cônes $C_1'$, $C_1''$, $C_1'''$,....

Cela posé :

Si l'on considère deux droites X et Y se croisant en un point $m$ d'une surface $\Sigma$, et faisant avec le plan T tangent en $m$ à cette surface $\Sigma$, la première un angle $\alpha$ et la seconde un angle $\alpha_1$.

Si l'on mène par le point $m$ deux plans, l'un P perpendiculaire à X et l'autre Q perpendiculaire à Y ; et si l'on considère sur le plan P une surface élémentaire E, sa projection oblique sur le plan T (cette projection étant faite par des droites parallèles à X), sera égale à ($E . \sin\alpha = E'$); si l'on projette la surface E' sur le plan Q (cette projection étant orthogonale, et par conséquent faite par des droites parallèles à Y), on obtiendra une surface E'' qui sera égale à ($E' . \sin\alpha_1$), ou égale à ($E . \sin\alpha \sin\alpha_1$).

Lorsqu'il s'agit de rayon lumineux, l'intensité I peut être représentée par un carré dont le côté est égal à l'unité linéaire ; dès lors, l'intensité du rayon lumineux peut être prise pour unité, et ($I . \sin\alpha \sin\alpha_1$) exprimera l'intensité de la lumière observée, sur la facette de la surface $\Sigma$ située en $m$, par un observateur dont l'œil serait placé en un point arbitraire de la droite Y ; mais les lignes qui représentent les sinus devront être prises dans un cercle ayant pour rayon l'unité linéaire choisie pour représenter le côté du carré I.

Dès lors, puisque tous les points-facettes de la courbe $\gamma$ ont une teinte égale et exprimée par : $I \sin\alpha$ ; que tous les points-facettes de la courbe $\gamma'$ ont une teinte égale et exprimée par : $I \sin\alpha'$, et ainsi de suite ; il faudra chercher sur ces courbes $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$,.... les points pour lesquels on aura :

$$I \sin\alpha \sin\alpha_1 = I'$$
$$I \sin\alpha' \sin\alpha_1' = I'$$
$$I \sin\alpha'' \sin\alpha_1'' = I'$$
etc.

D'où l'on tirera :

$$\sin \alpha_{,} = \frac{I'}{I} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha_{,}' = \frac{I'}{I} \cdot \frac{1}{\sin \alpha'}$$

$$\sin \alpha_{,}'' = \frac{I'}{I} \cdot \frac{1}{\sin \alpha''}$$

etc.

On obtiendra donc les angles $\alpha_{,}$, $\alpha_{,}'$, $\alpha_{,}''$,.... sous lesquels l'une des facettes de $\gamma$ ou de $\gamma'$, ou de $\gamma''$,.... doit être frappée par une droite Y, passant par un point $o$ fixe ou parallèle à une droite A, pour que toutes ces facettes, quoique réellement inégalement teintées, apparaissent à l'œil situé en $o$ ou à l'infini sur la droite A comme étant également teintées.

Il sera facile, au moyen d'une construction géométrique simple, de trouver les angles $\alpha_{,}$, $\alpha_{,}'$, $\alpha_{,}''$,.... ; et en effet :

On construira un cercle J d'un rayon arbitraire $\rho$, et l'on regardera ce rayon comme étant l'unité linéaire.

On prendra sur ce cercle un arc mesurant l'angle $\alpha$ ; on construira l'angle $\alpha$ ; on prendra une ligne plus petite que $\rho$, et qui soit égale à : $\frac{p}{q} \cdot \rho$ ($p$ et $q$ étant des nombres entiers ; et comme I' est toujours plus petit que I, $q$ devra être toujours pris plus grand que $p$ ; en un mot $\frac{p}{q}$ sera toujours une fraction, alors l'intensité I de lumière sera représentée par $\rho^2$ et l'intensité I' sera représentée par : $\left[\frac{p^2}{q^2} \cdot \rho^2\right]$).

La droite qui est égale à (sin $\alpha$) et la droite qui est égale à : $\left(\frac{p}{q} \cdot \rho\right)$ étant placées à angle droit, on construira un cercle J' qui, passant par leurs extrémités, soit tel que son centre se trouve situé sur la ligne qui est égale en longueur à : sin $\alpha$ ; droite qui sera prolongée si la construction l'exige.

Ce cercle coupera la ligne qui est égale à : sin $\alpha$ (et sur son prolongement) en un point, et l'on aura alors une ligne qui sera égale à : sin $\alpha_{,}$ ; ou, plus simplement, on construira une ligne qui soit troisième proportionnelle entre les lignes (sin $\alpha$) et $\left(\frac{p}{q} \rho\right)$ et cette troisième proportionnelle sera la ligne (sin $\alpha_{,}$).

Portant le double de cette ligne (sin $\alpha_{,}$) comme corde sur le cercle J, on aura en la moitié de l'arc soutendu, celui qui mesure l'angle $\alpha_{,}$ cherché.

On fera de même pour obtenir les angles $\alpha_{,}'$, $\alpha_{,}''$....

Cela fait :

On concevra ou le cône C, dans le cas *d'un point lumineux*, ou le cylindre B,

dans le cas *d'un rayon de lumière*, ayant pour directrice la courbe d'égale teinte réelle $\gamma$; on construira la surface Z formée par les normales menées à la surface $\Sigma$ par les divers points de $\gamma$.

Et l'on cherchera parmi toutes les génératrices du cône $C_1$ ou du cylindre $B_1$, celle qui fait avec l'une des génératrices droites de la surface normale Z un angle $\varepsilon_1$ complémentaire de l'angle $\alpha_1$.

On obtiendra ainsi un point $y_1$ situé sur $\gamma$.

On fera pour la courbe $\gamma'$ la même chose.

Ainsi : 1° on construira la surface Z' formée par les normales à $\Sigma$ et lesquelles passent respectivement par les divers points de la courbe $\gamma'$, et 2° on cherchera parmi les génératrices du cône $C_1'$ ou du cylindre $B_1'$ qui ont pour directrice la courbe $\gamma'$, celle qui fait avec l'une des génératrices droites de la surface Z' un angle $\varepsilon_1'$ complémentaire de l'angle $\alpha_1'$; et l'on obtiendra un point $y_1'$ situé sur $\gamma'$, et ainsi de suite.

Les divers points $y_1$, $y_1'$, $y_1''$,.... formeront une courbe $\gamma_1$ qui sera une courbe d'égale teinte apparente, et dont l'intensité sera représentée par : $I' = \frac{p^2}{q^2}\rho^2$.

Pour avoir une autre courbe $\gamma_2'$ d'égale teinte apparente, on supposera que : $I \sin\alpha \sin\alpha_2 = \frac{p'^2}{q'^2}\rho^2 = I_2'$.

On construira, comme on l'a fait précédemment, les angles $\alpha_2$, $\alpha_2'$, $\alpha_2''$,..... et ensuite on construira les points $y_2$, $y_2'$, $y_2''$,.... qui détermineront la courbe $\gamma_2$.

On obtiendra de même les courbes $\gamma_3$ correspondant à : $\frac{p''^2}{q''^2}\rho^2$ et $\gamma_4$ correspondant à : $\frac{p'''^2}{q'''^2}\rho^2$, et ainsi de suite.

La solution que l'on vient de donner est générale; elle peut s'exécuter dans tous les cas ; elle est longue, il est vrai, mais enfin elle ne sera jamais en défaut.

Examinons si cette construction peut se simplifier, soit en vertu du mode de génération de la surface $\Sigma$, soit en vertu de certaines propriétés géométriques dont cette surface $\Sigma$ jouira comme surface particulière.

Nous allons prendre plusieurs exemples, et démontrer que les simplifications ne peuvent exister que pour la construction de la courbe $\gamma$, et non pour la construction de la courbe $\gamma_1$.

*Premier exemple.* Supposons que la surface $\Sigma$ est une *sphère*.

Nous pourrons considérer la sphère $\Sigma$ comme une surface de révolution ayant pour axe de rotation son diamètre F perpendiculaire au plan horizontal.

Nous pourrons prendre pour les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,.... les divers cercles perpendiculaires à l'axe F.

Dès lors ; toutes les normales ; à la surface sphérique $\Sigma$, menées par les divers points d'un parallèle $\delta$, formeront un cône de révolution ayant la droite F pour axe et le centre S de la sphère $\Sigma$ pour sommet.

Si l'on suppose un point lumineux $l$, le cône $(l, \delta)$ sera un cône oblique du second degré; il faudra chercher le point de $\delta$ pour lequel la génératrice du cône $(l, \delta)$ fait avec la génératrice du cône $(S, \delta)$ un angle donné $\alpha$.

La méthode la plus courte sera d'employer une *courbe d'erreur*, ainsi que nous l'avons indiqué dans la solution générale.

Mais si l'on suppose un faisceau lumineux L, il faudra chercher le point de $\delta$ pour lequel la génératrice du cylindre $(L, \delta)$ fera avec la génératrice du cône $(S, \delta)$ un angle donné $\alpha$.

Dans ce cas, la méthode de la *courbe d'erreur* peut être remplacée avec avantage par la construction suivante :

On mènera par le centre S de la sphère $\Sigma$ une droite $F'$ parallèle au faisceau lumineux L ; on regardera $F'$ comme l'axe d'un cône de révolution E dont le demi-angle au sommet S est égal à l'angle donné $\alpha$; et l'on cherchera la section conique $\varepsilon$, intersection de ce cône E par le plan du parallèle $\delta$; $\delta$ et $\varepsilon$ se couperont en des points qui appartiendront à la courbe $\gamma$ d'égale teinte réelle et dont la teinte en chacun de ses points sera exprimée par : I sin $\alpha$.

On pourrait encore couper les cônes de révolution E et $(S, \delta)$ par la sphère $\Sigma$; le cône E serait coupé suivant suivant un cercle $\mu$ et le cône $(S, \delta)$ suivant le cercle $\delta$; les deux cercles $\mu$ et $\delta$ se couperont en deux points qui appartiendront à la courbe $\gamma$.

Les courbes d'égale teinte réelle $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ étant déterminées sur la sphère $\Sigma$ soit dans le cas d'un point lumineux $l$, soit dans le cas d'un faisceau lumineux L, cherchons les courbes d'égale teinte apparente $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma''_1, \ldots$ soit dans le cas où l'œil du spectateur est situé en un point $o$, soit lorsqu'il est placé à l'infini sur une droite donnée A.

Les normales à la sphère $\Sigma$ menées par les divers points de la courbe $\gamma$ formeront un cône ayant son sommet au point S centre de la sphère.

Il faudra donc chercher sur $\gamma$ le point pour lequel la génératrice du cône $(S, \gamma)$ fait avec la génératrice du cône $(o, \gamma)$ un angle $\alpha_1$ satisfaisant à la condition :

$\sin \alpha \sin \alpha_1 = \frac{p^2}{q^2} \rho^2$.

Ce point s'obtiendra plus promptement par l'emploi d'une *courbe d'erreur* que par toutes autres constructions.

Ou bien il faudra chercher sur $\gamma$ le point pour lequel la génératrice du

cône $(S, \gamma)$ fait avec le cylindre $(A, \gamma)$ un angle $\alpha_{\prime}$ satisfaisant à la condition : $\sin\alpha \sin\alpha_{\prime} = \frac{p^2}{q^2}\rho^2$.

Dans ce cas, on pourra employer ou une *courbe d'erreur* ou la construction suivante : par le point S on mènera une droite A′ parallèle à A ; on regardera la droite A′ comme l'axe d'un cône de révolution E′ dont le demi angle au sommet est égal à l'angle $\alpha_{\prime}$ et dont le sommet est en S ; et l'on cherchera les génératrices d'intersection des deux cônes (S, $\gamma$) et E′, ces deux cônes ayant même sommet S.

Ces génératrices couperont $\gamma$ en des points qui appartiendront à la courbe d'égale teinte apparente $\gamma_{\prime}$.

Or, pour chercher l'intersection des deux cônes $(S, \gamma)$ et E′, il est évident qu'il suffit de chercher l'intersection du cône E′ et de la courbe $\gamma$; par conséquent, il faut chercher la projection verticale de la courbe $\xi$ intersection du cône E′ et du cylindre projetant horizontalement la courbe $\gamma$. Et comme l'on connaît les projections $\gamma^h$ et $\gamma^v$ de la courbe $\gamma$ (car je suppose que le lecteur exécute les constructions graphiques à mesure qu'elles sont indiquées dans l'espace), on voit que l'on aura à construire les projections $\xi^h$ et $\xi^v$ de la courbe $\xi$, intersection du cône E′ et du cylindre vertical ayant $\gamma^h$ pour section droite et en même temps pour trace sur le plan horizontal.

($\xi^h$ ne sera évidemment autre que $\gamma^h$.)

Ayant construit $\xi^v$, cette courbe coupera $\gamma^v$ en des points qui seront les projections verticales de points appartenant à la courbe $\gamma_{\prime}$.

Mais bien considéré, n'est-il pas évident que la construction de la *courbe d'erreur* sera moins longue que la construction de la courbe $\xi^v$.

*Deuxième exemple.* Prenons pour second exemple une surface $\Sigma$ de *révolution*, dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal.

Il n'y aura d'autre différence, dans le cas où l'on a une surface de révolution au lieu d'une sphère, que ceci, savoir : que la surface formée par les normales menées par les divers points de la courbe $\gamma$, ne sera plus un cône, mais une surface gauche.

L'emploi des courbes d'erreur sera donc dans ce cas préférable à toute autre construction pour déterminer les points de la courbe $\gamma_{\prime}$.

*Troisième exemple.* Prenons pour troisième exemple une surface *conique*.

Nous pourrons prendre les diverses génératrices droites de la surface conique pour les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$...

Dès lors, la surface formée par les normales, menées par les divers points de la génératrice $\delta$, sera un plan.

Il est bien évident que si la surface est éclairée par un point lumineux $l$, les diverses droites partant du point $l$ pour aller s'appuyer sur la génératrice $\delta$, formeront un plan ; et ces diverses droites feront chacune un angle différent avec le plan tangent mené au cône le long de la génératrice $\delta$.

Par conséquent, la courbe d'égale teinte réelle $\gamma$ sera une courbe dans le cas d'un point lumineux.

Mais si le cône est éclairé par un faisceau lumineux L, alors toutes les droites parallèles à L feront un même angle avec le plan tangent mené le long de la génératrice $\delta$; par conséquent, la courbe d'égale teinte réelle $\gamma$ sera une génératrice droite du cône donné, dans le cas d'un faisceau lumineux.

Par les mêmes raisons : lorsque l'œil du spectateur sera placé en un point $o$ de l'espace, les courbes d'égale teinte apparente $\gamma_i$, $\gamma_i'$, $\gamma_i''$..... seront des courbes, que le cône soit éclairé par un point lumineux ou par un faisceau lumineux.

Par les mêmes raisons : lorsque l'œil du spectateur sera placé à l'infini sur une droite A, les courbes d'égale teinte apparente $\gamma_i$, $\gamma_i'$,..... seront des courbes dans le cas d'un point lumineux, et des génératrices droites du cône dans le cas d'un faisceau lumineux.

Les mêmes résultats existeront pour une surface *cylindrique* et pour une surface *développable générale*.

D'ailleurs ; lorsque $\gamma$ et $\gamma_i$ seront des courbes, leur construction sera plus prompte par l'emploi des *courbes d'erreur* que par toute autre construction, au moins pour la courbe $\gamma_i$.

Et quelle que soit la surface $\Sigma$, la construction des courbes d'égale teinte apparente $\gamma_i$, $\gamma_i'$, $\gamma_i''$..... sera toujours plus prompte par l'emploi des *courbes d'erreur*, parce que la surface formée par les normales menées à cette surface $\Sigma$ par les divers points des lignes $\gamma$ ou $\gamma'$ ou $\gamma''$..... (courbes d'égale teinte réelle), sera toujours une surface gauche, lorsque ces lignes $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$... seront des courbes ; excepté dans le cas où la surface $\Sigma$ serait une sphère, auquel cas, la surface des normales sera un cône ayant son sommet au centre de la sphère.

Problème 4. *Étant donnée une surface conique du deuxième degré par les projections* $s^h$ *et* $s^v$ *de son sommet* s, *et par sa trace ou base* B *sur le plan horizontal, construire l'axe* A *de cette surface.*

On sait qu'une surface conique du second ordre a toujours un axe A, appelant axe la droite qui, passant par le sommet, jouit de la propriété suivante, savoir :

Que si par cette droite A on fait passer une série de plans P, P', P''.....,

chacun de ces plans coupe le cône suivant deux génératrices, dont l'angle est divisé en deux parties égales par cette même droite A.

On sait aussi que l'angle des deux génératrices que l'on doit considérer dans ce cas est celui qui est formé par les parties des génératrices formant une même nappe de la surface conique.

Et l'on sait que si l'on considérait les parties des génératrices qui se trouvent appartenir à des nappes différentes, on aurait un plan qui, passant par le sommet, serait perpendiculaire à l'axe A, et serait un plan diamétral principal divisant en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe A.

Nous devons donc supposer que la courbe B est une *ellipse* ou une *parabole*, pour que la construction de l'axe A puisse s'exécuter.

Pour déterminer l'axe A, nous ferons la construction suivante :

Par le sommet S, nous mènerons une droite D arbitraire, mais telle qu'elle perce le plan horizontal en un point $d$, extérieur à la section conique B.

Par la droite D, nous mènerons une suite de plans R, R', R''....., chacun d'eux coupera la surface conique suivant deux génératrices droites ; nous diviserons l'angle des deux génératrices en deux parties égales par une droite qui percera le plan horizontal en un point $x$.

On obtiendra ainsi une suite de points $x$ qui détermineront une courbe X, laquelle coupera la courbe B aux points de contact des tangentes à cette même courbe B, menées par le point $d$.

Par le sommet S, on mènera une seconde droite $D_1$ qui percera le plan horizontal en un point $d_1$, extérieur à B.

Par $D_1$, on fera passer une suite de plans Q, Q', Q''....., et chacun d'eux coupera le cône suivant deux génératrices, la droite qui divisera leur angle en deux parties égales ; percera le plan horizontal en un point $y$.

Tous les points $y$ détermineront une courbe Y, qui coupera la courbe B en les points de contact des tangentes menées par le point $d_1$ à cette courbe B.

Les deux courbes X et Y se couperont évidemment en un point $o$ situé dans l'intérieur de la courbe B, et ces deux courbes X et Y se couperont toujours en un point, et en seul point intérieur à la courbe B.

Ce point $o$ sera la trace horizontale de l'axe A cherché.

Les courbes X et Y peuvent servir à démontrer l'existence de l'axe A dans les surfaces coniques du deuxième degré ; et par suite, l'existence de l'axe A étant démontrée, on peut reconnaître qu'un cône du second ordre peut toujours être coupé par deux plans de direction opposée, suivant des cercles, ou, en d'autres termes, on peut démontrer *l'existence des sections circulaires dans le cône du deuxième degré*.

Et en effet :

La construction des courbes d'erreur X et Y indique, d'une manière certaine, que les arcs de ces courbes, compris dans l'intérieur de la courbe B, se coupent toujours en un point, et en un seul point $o$.

Si l'on mène les deux droites $od$ et $od_{,}$, elles couperont la courbe B, la première en deux points, $p$ et $q$, et la seconde en deux points, $p_{,}$ et $q_{,}$.

La droite $(oS)$ divisera en deux parties égales l'angle des droites $(Sp)$ et $(Sq)$; la même droite $(oS)$ divisera aussi en deux parties égales l'angle des droites $(Sp_{,})$ et $(Sq_{,})$, et cela est évident, en vertu du mode de construction des courbes X et Y.

Si l'on mène un plan Z perpendiculaire à la droite $(oS)$, ce plan coupera cette droite $(oS)$ en un point $o'$, et les quatre génératrices $(Sp)$, $(Sq)$, $(Sp_{,})$, $(Sq_{,})$, du cône, en quatre points $p_{,}, q_{,}, p_{,}', q_{,}'$, lesquels formeront un parallélogramme dont les diagonales se croisent au point $o'$.

Le plan Z coupera le cône $(S, B)$ suivant une section conique B′, qui passera par ces quatre points; cette section conique ne pourra évidemment être autre qu'une ellipse, parce que le plan Z coupe une seule nappe de la surface conique, et le centre de cette courbe B′ ne sera autre que le point $o'$, puisque les points $p_{,}$, $q_{,}$, $p_{,}'$, $q_{,}'$, sont les sommets d'un parallélogramme inscrit.

Si donc l'on prend sur la courbe B′ un point $r'$, et que par ce point $r'$ et le centre $o'$ on fasse passer une droite K′, cette droite coupera la courbe B′ en un second point $r_{,}'$, et la corde $r'r_{,}'$ sera divisée en deux parties égales par le point $o'$.

La droite $(oo'S)$ divisera donc en deux parties égales l'angle des génératrices $(Sr')$ et $(Sr_{,}')$.

Par conséquent, la droite $(oS)$ n'est autre qu'un axe A par rapport à la surface conique proposée.

Ainsi se trouve démontrée l'existence de l'axe A pour les surfaces coniques du second degré.

Maintenant si l'on conçoit le grand axe R de l'ellipse B′, tout plan passant par cet axe coupera le cône suivant une ellipse ayant pour axe cette droite R, l'autre axe R′ étant dans un plan passant par le sommet S et par le petit axe de B′. Si donc du centre $o'$, avec un rayon, égale à la moitié de l'axe R, on coupe la génératrice passant par l'extrémité du petit axe de B′, on obtiendra deux points, lesquels, avec l'axe R, détermineront deux plans coupant le cône suivant deux cercles.

Par ce qui précède, on voit que les courbes d'erreur peuvent non-seulement être employées comme *moyen* de construction, mais encore, dans certains cas, comme *mode* de démonstration.

---

# CHAPITRE IV.

## PROBLÈMES D'OMBRES DU GENRE DES ÉCLIPSES.

PROBLÈME 1. *Construire les ombres portées successivement par la lune sur la terre pendant les éclipses de soleil.*

Soient données trois sphères (*fig.* 62) : S du rayon R (soleil), T du rayon $r$ (terre), L du rayon $\rho$ (lune); en unissant deux à deux les centres S, T et L de ces corps, on forme un triangle SML, dans lequel je suppose que l'on connaisse les deux côtés $ST = D$, et $LT = \Delta$, et l'angle $LTS = \alpha$.

On pourra, dès lors, calculer, par les formules de la trigonométrie plane, le troisième côté $SL = d$ et les deux angles $LST = 6$ et $SLT = \gamma$.

Cela posé :

Je suppose que l'on enveloppe les deux sphères S et L par deux cônes ayant pour axe commun la droite SL et leurs sommets situés, l'un *extérieur* en V, l'autre *intérieur* en V', et que l'on cherche la courbe-intersection du cône V, et ensuite du cône V' avec la sphère T (1).

Ces deux courbes se projetteront sur le plan du triangle STL suivant des arcs de *sections coniques*.

Si les trois corps S, T et L étaient à des distances assez petites les uns des autres, et si leurs rayons n'étaient pas très-différents de grandeur entre eux, de manière que l'on pût tracer l'épure sur une feuille de papier, on emploierait avec avantage les méthodes *graphiques* de la géométrie descriptive.

Mais, dans le problème qui nous occupe, si les centres des trois corps sont trop éloignés les uns des autres pour que l'on puisse construire l'épure à une échelle assez grande pour permettre d'obtenir des résultats *graphiques* d'une approximation suffisante, et si, d'ailleurs, la différence qui existe entre les rayons

(1) Désignant chacun des deux cônes par la *lettre* de son sommet, ainsi que nous désignons chacune des trois sphères par la *lettre* de son centre.

des trois corps est très-considérable, les constructions *graphiques* seront impossibles.

Dès lors, on est conduit forcément à chercher (lorsque ces cas se présenteront) les équations des cônes V et V′, et d'en conclure les équations des *sections coniques* projections de leurs courbes d'intersection avec la sphère T. Et ensuite, au moyen des équations de ces courbes, on pourra les tracer par points sur la sphère T.

Par cette méthode mixte, on est conduit à exécuter toutes les opérations graphiques sur une seule sphère; et dès lors, si toutefois les résultats de ces constructions n'offrent pas encore une approximation suffisante sous le point de *vue astronomique*, au moins les constructions *graphiques* devenant possibles, on peut les indiquer comme application (sinon utile, au moins de quelque intérêt) des méthodes *graphiques* de la *géométrie descriptive*.

Les deux triangles semblables SRV et L$\rho$V rectangles en R et $\rho$ donnent :

$$VS = \frac{Rd}{R-\rho}$$

Les deux triangles semblables SR′V′ et L$\rho$′V′ rectangles en R′ et $\rho'$, donnent :

$$V'S = \frac{Rd}{R+\rho}$$

Calculons maintenant la tangente de l'angle que la droite VR fait avec la droite SL, on aura :

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{SR}{VR} \qquad VR = \frac{R}{R-\rho}\sqrt{d^2-(R-\rho)^2}$$

D'où

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{R-\rho}{\sqrt{d^2-(R-\rho)^2}}$$

donc

$$(a)\quad \cos^2\varphi = \frac{d^2-(R-\rho)^2}{d^2} \qquad (b)\quad \sin^2\varphi = \frac{(R-\rho)^2}{d^2}.$$

On trouvera de même pour l'angle $\varphi'$ que la droite V′R′ fait avec la droite SL :

$$\text{tang}\,\varphi' = \frac{R+\rho}{\sqrt{d^2-(R+\rho)^2}}$$

D'où.

$$(a')\quad \cos^2\varphi' = \frac{d^2-(R+\rho)^2}{d^2} \qquad (b')\quad \sin^2\varphi' = \frac{(R+\rho)^2}{d^2}$$

Joignons le point V avec le point T, et supposons que la droite ST soit prise pour axe des $x$ et le point T pour origine des coordonnées.

Dans le triangle SVT on connaît les deux côtés ST et SV et l'angle compris $\epsilon$, on pourra donc calculer l'angle VTS que je désigne par $\theta$ ; et par suite obtenir les valeurs des coordonnées rectangulaires du point V, lesquels seront :

$$y''=\text{TV}.\sin\theta \quad \text{et} \quad x''=\text{TV}.\cos\theta$$

Et comme

$$\text{TV}=\frac{\text{SV}.\sin\epsilon}{\sin\theta}$$

on a

$$(c)\quad y''=\frac{\text{R}d}{\text{R}-\rho}.\sin\epsilon \qquad \text{et} \quad (d)\quad x''=\frac{\text{R}.d.\sin\epsilon}{(\text{R}-\rho)\,\text{tang}\,\theta}$$

Pour le point V', en désignant l'angle V'TS par $\theta'$, on aura :

$$(c')\quad \text{Y}''=\frac{\text{R}d.\sin\epsilon}{\text{R}+\rho} \qquad \text{et} \quad (d')\quad \text{X}''=\frac{\text{R}.d.\sin\epsilon}{(\text{R}+\rho)\,\text{tang}\,\theta'}$$

Cherchons maintenant les coordonnées rectangulaires du point L.

On a :

$$(e)\quad y'=\Delta\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad (f)\quad x'=\Delta\cos\alpha$$

Les équations de la droite SL, axe commun aux deux cônes, seront :

$$y-y'=\frac{x'-x''}{y'-y''}(x-x')$$

$$z=0$$

Les équations d'une droite B passant par le point V et non située dans le plan du triangle STL seront :

$$y-y''=m(x-x'') \tag{1}$$

et

$$z=n(x-x'') \tag{2}$$

L'angle $\varphi$ des deux droites B et SL a pour l'expression de son *cosinus*

$$\cos\varphi=\frac{m(y'-y'')+(x'-x'')}{\sqrt{m^2+n^2+1}\sqrt{(y'-y'')^2+(x'-x'')^2}} \tag{3}$$

Supposant que la droite B tourne autour de l'axe SV en faisant un angle con-

stant $\varphi$, et dès lors éliminant $m$ et $n$ entre les équations (1, 2, 3), on aura pour l'équation du cône ayant son sommet en V :

$$\cos\varphi = \frac{(y-y'')(y'-y'')+(x-x'')(x'-x'')}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2+z^2}\sqrt{(y'-y'')^2+(x'-x'')^2}} \qquad (4)$$

Combinant l'équation (4) avec celle de la sphère T, qui sera :

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (5)$$

on aura l'équation de la *section conique*, projection sur le plan TSL de la courbe à double courbure intersection du cône V avec la sphère T.

Cette équation s'obtiendra en éliminant $z$ entre les équations (4) et (5), et sera :

$$\cos\varphi = \frac{(y-y'')(y'-y'')+(x-x'')(x'-x'')}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2+(r^2-x^2-y^2)}\sqrt{(y'-y'')^2+(x'-x'')^2}}$$

et en réduisant

$$\cos\varphi = \frac{(y-y'')(y'-y'')+(x-x'')(x'-x'')}{\sqrt{y''^2+x''^2-2yy''-2xx''+r^2}\sqrt{(y'-y'')^2+(x'-x'')^2}}$$

chassant le dénominateur, élevant au carré et réduisant, on obtiendra :

$$\left.\begin{array}{l}
\quad\ \mathrm{A} \qquad\qquad\qquad \mathrm{B} \qquad\qquad\qquad \mathrm{C} \\
y^2(y'-y'')^2+2xy(y'-y'')(x'-x'')+x^2(x'-x'')^2 \ldots\ldots \\
+2yy''\left\{(x'-x'')^2\cos^2\varphi-(y'-y'')^2\sin^2\varphi\right\}-xy''(y'-y'')(x'-x'') \\
+2xx''\left\{(y'-y'')^2\cos^2\varphi-(x'-x'')^2\sin^2\varphi\right\}-yx''(y'-y'')(x'-x'') \\
+\ y''^2\left\{(y'-y'')^2\sin^2\varphi-(x'-x'')^2\cos^2\varphi\right\} \ldots\ldots \\
+\ x''^2\left\{(x'-x'')^2\sin^2\varphi-(y'-y'')^2\cos^2\varphi\right\} \ldots\ldots \\
+(y''x''-r^2\cos^2\varphi)(y'-y'')(x'-x'') \ldots\ldots
\end{array}\right\} = 0 \qquad (6)$$

Cette équation sera toujours celle d'une *parabole*, puisque la condition $B^2-4AC=0$ se trouve satisfaite quelles que soient les valeurs des coordonnées $y'$, $x'$, $y''$, $x''$.

On substituera dans l'équation (6) à la place de $x'$, $y'$, $x''$, $y''$, $\cos.^2\varphi$, $\sin.^2\varphi$, leurs valeurs données par les équations ($a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$), et l'on pourra construire par points la parabole représentée par cette équation finale :

Supposons maintenant (*fig* 63.) que le centre de la sphère L se meuve sur un cercle C ayant son centre en T, et dont le plan fait, avec un certain plan P fixe et passant par la droite ST, un angle connu A.

Supposons encore que le plan du cercle C coupe le plan fixe P suivant la

droite MN', et que l'on connaisse l'angle $\mu$ que les droites NN' et ST font entre elles.

Supposons enfin que la sphère L soit arrivée en la position L, telle que la droite LT fasse avec NT un angle $\varepsilon$.

On pourra, au moyen des formules connues de la trigonométrie sphérique, calculer l'angle $\alpha$ (que la droite LT fait avec la droite TS) en fonction de l'angle $\varepsilon$.

Il sera donc facile d'avoir l'angle $\beta$ (*fig.* 62) en fonction de l'angle $\varepsilon$, et d'avoir aussi en fonction de $\varepsilon$ la distance variable SL ou celle qui, à chaque instant, existera entre les centres des deux corps S et L, pendant que le centre du corps T parcourt le cercle C.

On pourra aussi, au moyen des formules connues de la trigonométrie sphérique, calculer l'angle E que le plan LTS (que je désignerai par Z) fait avec le plan fixe P, et obtenir cet angle aussi en fonction de $\varepsilon$.

Ainsi :

1° Au moyen de la formule de trigonométrie sphérique :

$$\cos\alpha = \cos\varepsilon\cos\mu + \sin\varepsilon\sin\mu\cos A \qquad (7)$$

on calculera l'angle $\alpha$.

2° Au moyen de la formule de trigonométrie sphérique :

$$\sin E = \frac{\sin A . \sin\varepsilon}{\sin\alpha} \qquad (8)$$

on calculera l'angle E.

3° Au moyen des formules de la trigonométrie plane qui servent à résoudre le cas où l'on connaît deux côtés et l'angle compris, on calculera la distance $d$ entre les centres des deux corps S et L, et les angles $\beta$, $\theta$ et $\theta'$.

Dès lors pour les valeurs diverses de l'angle $\varepsilon$, savoir : $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, etc., on obtiendra les quantités correspondantes, savoir :

$$(\alpha,\ E,\ d,\ \beta,\ \theta \text{ et } \theta'),\ (\alpha',\ E',\ d',\ \beta',\ \theta_1 \text{ et } \theta_1'),\ (\alpha'',\ E'',\ d'',\ \beta'',\ \theta_2 \text{ et } \theta_2'),\ \text{etc.} \qquad (9)$$

On substituera ces valeurs dans les équations ($a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$), et on aura les valeurs correspondantes :

$$\cos^2\varphi, \sin^2\varphi, y'', x'', y', x', -\cos^2\varphi_1, \sin^2\varphi_1, y_1'', x_1'', y_1', x_1', -\cos^2\varphi_2, \sin^2\varphi_2, y_2'', x_2'', y_2', x_2', -\text{etc.}$$

que l'on substituera dans l'équation (6) et l'on obtiendra sur les plans Z, Z', Z'', etc., les paraboles, projections des courbes d'intersection des cônes *extérieurs* V, $V_1$, $V_2$, etc., avec la sphère T.

En substituant les groupes de valeurs (9) dans les équations ($a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e$, $f$) on obtiendra les valeurs correspondantes ($\cos^2 \varphi'$, $\sin^2 \varphi'$, $y''$, $x''$, $y'$, $x$), etc., qui, substituées dans l'équation (6) donneront sur les mêmes plans, Z, Z', Z'', etc., les projections des courbes d'intersection des cônes *intérieurs* V', V,', V,', etc., avec la même sphère T.

Supposons maintenant, *fig.* 64, que le centre de la sphère T se meut sur un cercle Q situé sur le plan P, et ayant son centre en S, et que le corps T emporte avec lui le cercle C et le corps L, de telle manière que pendant le mouvement, le plan du cercle C reste parallèle à lui-même.

Supposons aussi que le corps T décrit un angle $\xi$ autour du centre fixe S, pendant le temps employé par le corps L à décrire un angle $\varepsilon$ autour de centre mobile T (la relation qui doit exister entre les angles $\xi$ et $\varepsilon$, étant d'ailleurs supposée connue).

Au lieu de supposer que le corps T parcourt le cercle Q, on pourra supposer que le corps T reste fixe et que le corps S décrive en sens inverse un cercle Q', dont le centre serait celui du corps T; de sorte que le corps T étant, d'après la première hypothèse, transporté en T' après avoir décrit un angle $\xi$, on pourra supposer qu'il soit resté en T, et que le corps S se trouve transporté en S' ayant décrit ce même angle $\xi$.

Dans cet état de choses, on voit que l'on aura à calculer comme dans le cas de la *fig.* 63, l'angle $\alpha$ et l'angle E, et qu'ensuite, au moyen de ces angles et de l'angle $\xi$, il faudra calculer l'angle $\alpha'$, c'est-à-dire l'angle que la droite LT fait avec S'T. Ce que l'on fera très-facilement au moyen des formules qui donnent l'angle plan lorsque que l'on connaît, dans une pyramide triangulaire, deux *angles plans* et l'angle *dièdre* compris.

De sorte que pour chaque valeur que l'on donnera à l'angle $\varepsilon$, on aura la valeur correspondante de $\xi$ puisque l'on sait que $\xi = f(\varepsilon)$, on aura aussi l'angle $\alpha'$ ainsi qu'on l'a dit dessus, l'on pourra dès lors calculer toutes les autres quantités $d$, $6$, $\theta$ et $6'$ correspondant à chaque valeur de $\alpha'$ et l'on pourra effectuer les substitutions précédemment indiquées et obtenir enfin l'équation de la *parabole* qui correspond à chaque valeur attribuée à $\varepsilon$.

Construisons maintenant sur la sphère T les diverses courbes qui représentent les ombres portées successivement par le corps L en supposant que le corps L est *opaque* et que le corps S soit *lumineux*.

Ayant tracé (*fig.* 65) un cercle C avec le rayon $r$, on mènera par le centre T une suite de droites $a'b'$, $a''b''$, etc., faisant avec $ab$ les angles calculés $\xi$, $\xi'$, $\xi''$, etc., et correspondant aux valeurs $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, etc..

On regardera chacune des lignes $ab$, $a'b'$, $a''b''$, etc., comme un axe des $x$ par

rapport auquel on devra construire les paraboles X, X′, X″, etc., le point T étant l'origine des coordonnées pour les divers axes des $x$.

On tracera les paraboles X, X′, X″, etc.

Toutes ces paraboles sont supposées rabattues sur un même plan, chacun de leurs plans ayant tourné respectivement autour des droites $ab$, $a'b'$, etc.

On se rappelle d'ailleurs que le plan de la courbe X fait, avec le plan fixe P sur lequel cette courbe est rabattue, un angle calculé E; que pour le plan de la courbe X′ l'angle est E′, etc.

Dès lors (ayant mené une droite $ay$ perpendiculaire à $ab$ et une droite $az$ faisant avec $ay$ un angle E) si du point $a$ comme centre, on décrit un cercle avec le rayon r, on aura une épure dont $ay$ sera la ligne de terre; $az$ et $ab$ étant les traces du plan Z, qui contient la parabole X rabattue sur le plan horizontal.

Il faudra donc passer du rabattement de la courbe X à ses projections.

Pour cela la droite A perpendiculaire à $ab$ et le cercle B, seront les projections d'une section circulaire de la sphère T, et cette section contiendra deux points de la courbe cherchée et tous les deux rabattus en un seul et même point $m$.

On projettera le point $m$ en $n$, on ramènera le point $n$ en $g$, on tracera la droite $pgq$ perpendiculaire à la droite $az$; les points $p$ et $q$ seront les projections verticales des points rabattus en $m$, et le point P sera la projection horizontale d'un des points.

Dès lors, les courbes telles que $X_{,}$, $X_{,}'$, $X_{,}''$, etc., seront les projections horizontales des courbes, intersections des cônes *extérieurs* ou *intérieurs* avec la sphère T, ou les projections horizontales des ombres portées sur la terre T et successivement par la lune L, supposée avoir décrit dans son orbite les angles successifs $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, etc.

Jusqu'à présent nous n'avons pas tenu compte du mouvement diurne de la terre autour de son axe. Pour y avoir égard, il faudra connaître l'angle que l'axe de la terre fait avec le plan fixe P ou le plan de l'écliptique et l'angle que la projection de cet axe sur ce plan P fait avec la droite NN′ ou la ligne des nœuds de la lune.

On pourra dès lors mener par le point T (*fig.* 65) un plan perpendiculaire à l'axe de la terre, et projeter sur ce plan les courbes $X_{,}$, $X_{,}'$, $X_{,}''$, etc., et les courbes $X_{,}$, $X_{,}'$, $X_{,}''$, etc. (qui s'obtiendront de la même manière que les courbes $X_{,}$, $X_{,}'$, $X_{,}''$). Cela fait, il faudra déterminer l'heure à laquelle la lune passe au nœud ascendant N′ et le méridien terrestre correspondant à ce nœud N′, au moment du passage de la lune.

Supposez l'angle $\varepsilon$ égal zéro, à cet instant, et l'on obtiendra la courbe X projetée en

$X_1$, puis en $X_1$, et l'on connaîtra la position du méridien terrestre, passant par le nœud N', par rapport à cette courbe $X_1$.

Supposant ensuite que ε est égal à + 1°, ou à + 2°, ou à + 3°, ou à + 4°, ou à + 5°, etc., ou égal à — 1°, ou à — 2°, ou à — 3°, etc.; on aura les positions de la lune après ou avant le nœud N, c'est-à-dire au dessus ou au dessous du plan P de l'écliptique.

On obtiendra les diverses courbes, telles que $X_1$, projetée en $X_1'$, puis en $X_1'$.

Mais, comme pendant que la lune a parcouru dans son orbite l'angle $ε_1$, la terre a tourné sur son axe d'un angle *h* (et l'on connaît la relation existant en *h* et ε); la courbe $X_1$ n'est pas placée, par rapport au méridien terrestre correspondant au point N', comme elle doit l'être, il faut que cette courbe tourne autour du centre de la projection, en décrivant un angle précisément égal à *h*, de gauche à droite si ε est positif, de droite à gauche si ε est négatif, et arrive en la position $X_1'$.

Il sera donc facile d'avoir sur cette dernière projection, exécutée sur le plan perpendiculaire à l'axe de la terre, les projections des ombres portées par la lune, en tenant compte des trois mouvements 1° de la lune dans son orbite, 2° de la terre dans son orbite, et 3° de la terre autour de son axe, et de placer les divers lieux terrestres sur cette projection, puisque l'on connaît la position occupée par l'un des méridiens, par rapport à l'une des *ombres portées*.

Si l'on trace des courbes tangentes, l'une en dessus et l'autre en dessous, aux diverses courbes $X_1$, $X_1'$, $X_1''$, etc., on déterminera la zone terrestre pour laquelle l'éclipse de soleil aura lieu, etc.

PROBLÈME 2. *Déterminer l'heure des phases de l'éclipse de soleil pour un lieu donné sur la terre.*

Supposons le soleil en S (*fig.* 66) et la terre en T; imaginons que le cercle C' soit l'orbite de la lune, le cercle C étant l'orbite de la terre. Menons par le centre de la terre les trois axes : 1° A, axe de la terre; 2° L, axe de l'orbite de la lune; 3° E, perpendiculaire au plan de l'orbite de la terre.

La lune se meut dans son orbite dans le sens de la flèche *yx*; la terre se meut dans son orbite dans le sens de la flèche *tq*; et de plus, la terre tourne autour de son axe A dans le sens de la flèche *nv*, c'est-à-dire dans le sens *yx* du mouvement que la lune prend dans son orbite.

Supposons que la terre reste immobile en sa position T, il faudra dès lors supposer que la lune est douée de trois mouvements, savoir :

1° De son mouvement orbitaire autour de l'axe L, de sorte que la supposant à l'origine du mouvement en la position *n*, elle arrive en *n'* après avoir décrit un angle φ dans son orbite.

2° Du mouvement de la terre autour de l'axe A, mais en sens inverse; de sorte qu'arrivée en $n'$, elle viendra en $a$, ayant décrit autour de l'axe A l'angle $\widehat{apn}$ (vitesse angulaire de la terre autour de son axe A, cet angle $\widehat{apn}$ correspondant à l'angle $\varphi$).

3° Du mouvement de la terre dans son orbite, mais aussi en sens inverse, de sorte qu'arrivée en $a$ elle viendra en $l$, ayant décrit autour de l'axe E l'angle $agl$ (vitesse angulaire de la terre dans son orbite, cet angle $\widehat{agl}$ correspondant à l'angle $\varphi$):

Tous les points tels que $l$ détermineront une courbe $\lambda$, qui sera la courbe parcourue par le centre de la lune, la terre étant supposée immobile. (Tous les points tels que $a$ détermineront une courbe $\lambda'$, qui différera très-peu de la courbe $\lambda$ lorsque l'on construira *graphiquement* ces deux courbes, car l'échelle, quelle que grande qu'on la prenne, sera toujours trop petite, vu les dimensions du système solaire, pour que les courbes $\lambda$ et $\lambda'$ soient séparées l'une de l'autre d'une manière très-sensible sur une *épure*.)

Maintenant concevons (*fig.* 67) un point $m$ sur la terre; si l'on regarde ce point comme le sommet d'un cône S tangent au soleil, et qu'ensuite on suppose deux cônes V et V' qui soient parallèles à ce cône S et tangents, le premier a une sphère d'un rayon égal à la somme des rayons du soleil et de la lune, et le second a une sphère d'un rayon égal à la différence des rayons du soleil et de la lune (ces deux sphères étant d'ailleurs concentriques au soleil), et que l'on détermine les points de rencontre de la courbe $\lambda$ avec l'un et l'autre de ces deux cônes; désignant par $t$ et $t'$ les points en lesquels le cône V est percé par la courbe $\lambda$ et par $q$ et $q'$ ceux en lesquels le cône V' est percé par la même courbe, il est évident que:

1° Les points $t$ et $t'$ seront ceux en lesquels le centre de la lune sera placé, au moment où l'on verra du point $m$ situé sur la terre, la lune entrer dans le cône de lumière formé par les rayons solaires rasant la terre, ou sortir de ce cône de lumière;

2° Les points $q$ et $q'$ en lesquels le centre de la lune sera placé seront, l'un celui pour lequel on verra (du point $m$) le bord extérieur de la lune toucher le contour du soleil, la lune étant entrée complétement dans le cône de lumière, et l'autre celui pour lequel le même phénomène aura lieu, la lune étant sur le point de sortir du cône de lumière.

Il est encore évident que si, joignant le point $m$ et le centre du soleil par une droite D, il arrive que cette droite s'appuie sur la courbe $\lambda$ en un point $p$; ce point sera le centre de la lune lorsque l'éclipse centrale aura lieu. Si la droite D ne s'appuie pas sur la courbe $\lambda$, *l'éclipse centrale* ne pourra avoir lieu pour le

point $m$. De sorte que si l'on regarde le centre du soleil comme le sommet d'un cône ayant pour directrice la courbe $\lambda$, ce cône coupera la terre suivant une courbe $\xi$, qui déterminera les divers points de la terre, pour lesquelles le phénomène de *l'éclipse centrale* aura lieu.

Il est encore évident :

1° Que si l'on prend sur la courbe $\lambda$ un point $x$, et qu'on le regarde comme le sommet d'un cône tangent au soleil, ce cône coupera la terre suivant une courbe qui passera par les divers lieux terrestres qui verront au même instant *l'éclipse centrale*.

2° Que si le point $x$ est regardé comme le sommet d'un cône tangent à l'une des deux sphères concentriques au soleil et désignées précédemment, ce cône coupera la terre suivant une courbe pour les divers points de laquelle le même phénomène aura lieu au même instant, savoir : *la lune rasant le bord du soleil, cette planète étant intérieure ou extérieure par rapport au disque solaire.*

3° Que si l'on fait rouler un plan : 1° sur la courbe $\lambda$ et sur le soleil, 2° et 3° sur la courbe $\lambda$ et sur l'une des deux sphères dont le rayon est égal à celui du soleil, augmenté *pour la première sphère* et diminué *pour la seconde sphère* du rayon de la lune, on déterminera trois surfaces développables, qui couperont la terre suivant trois courbes, dont la première passera par les lieux terrestres qui verront, les uns après les autres, le centre de la lune passer sur le contour solaire, dont les deux autres passeront par les divers lieux qui verront aussi, les uns après les autres, la lune toucher le bord intérieur ou extérieur du soleil; et tous les lieux terrestres autres que ceux situés sur ces courbes ne verront pas, le jour de l'éclipse, les phases particulières dont nous venons de parler.

4° Si l'on suppose un anneau ou surface canale engendrée par la lune dont le centre parcoure la courbe $\lambda$, et que l'on suppose un plan roulant en même temps sur le soleil et sur l'anneau et intérieurement à ces deux surfaces, on aura une surface développable qui coupera la terre suivant deux courbes, qui renfermeront la zone terrestre pour laquelle l'éclipse pourra avoir lieu. Placé sur les points de ces deux courbes extrêmes ou limites, on verra la lune s'approcher du soleil, et raser seulement son contour.

En supposant (*fig.* 67) que l'on connaisse l'heure à laquelle la lune passe au nœud ascendant N′ et le méridien terrestre correspondant à ce nœud au moment du passage de la lune, on voit de suite que lorsque la lune sera en un point $t$ de la courbe $\lambda$, il faudra par le point $t$ faire passer un cercle perpendiculaire à l'axe E, lequel viendra couper en $t'$ la courbe $\lambda'$, lieu des points $a$; puis du point $t'$, décrire un cercle perpendiculaire à l'axe A, lequel viendra couper l'orbite lunaire C′ en $t''$, et l'arc $t't''$ donnera le temps écoulé depuis le passage au nœud N jusqu'au

moment de la phase du phénomène arrivé lorsque le centre de la lune était en $t$ sur la courbe $\lambda$.

Car le nombre de degrés compris dans l'arc $t't''$ sera à 360°, comme le temps écoulé jusqu'à la phase, est à 24 heures.

Ayant le temps écoulé jusqu'au moment de la phase, on l'ajoutera ou on le retranchera de l'heure trouvée pour le nœud N' (suivant que la lune supposée en $t$ sera au-dessus ou au-dessous du nœud N'), et l'on aura l'heure de la phase.

Si l'on pouvait exécuter l'épure à une échelle assez grande pour que les deux courbes $\lambda$ et $\lambda'$ fussent très-distinctes, la géométrie descriptive conduirait à une solution complète du problème et avec une exactitude très-suffisante, puisque 15° de l'arc tel que $t't''$ valent une heure de temps.

Les constructions graphiques ne pouvant être admises, vu l'échelle à laquelle on est obligé forcément de réduire l'épure, dès lors on est obligé de recourir au calcul comme pour le problème précédent.

Comme les méthodes *géométriques* employées en *astronomie* sont bien préférables à celle que je vais exposer et qu'elles sont véritablement les seules applicables aux calculs des éclipses, pour simplifier le problème puisque je ne me propose de le considérer que comme un *exercice*, je supposerai que la lune ne prend autour de la terre que le mouvement qui lui appartient dans son orbite, et je ne considérerai que le mouvement de la terre autour de son axe, négligeant le mouvement de la terre autour du soleil; car, les calculs se compliquent beaucoup lorsque l'on veut tenir compte du troisième mouvement. D'ailleurs je n'ai d'autre but, je le répète, en écrivant ce chapitre, que de présenter quelques applications simultanées de la *géométrie descriptive* et de *l'analyse appliquée* à la géometrie à trois dimensions.

Nous prendrons pour plan horizontal, ou des $xy$, le plan de l'équateur de la terre et pour plan vertical, ou des $yz$, le plan perpendiculaire à la droite des nœuds de la lune et passant par le centre de la terre.

L'orbite de la lune se projettera donc sur le plan vertical, suivant une droite $g'n'$ (*fig.* 68) faisant avec la ligne de terre ou l'axe des $y$ (ou le plan de l'équateur), un angle B, et sur le plan horizontal, suivant une ellipse dont les axes seront $a$ et : $a \cdot \cos B$ (désignant par $a$ la distance de la lune à la terre au jour de l'éclipse, et supposant que la lune décrit, pendant l'éclipse, un cercle autour de la terre).

Pour le jour de l'éclipse, on connaîtra la distance D du soleil à la terre, et l'angle que la ligne des nœuds fait avec la droite D; on pourra donc avoir les équations $y=px$ et $z=qx$ de la droite D et, par suite, les cosinus des angles $\alpha, \beta, \gamma$ que cette droite D fait avec les plans coordonnés, et aussi les coordonnés $x', y', z'$ du centre du soleil en fonction de $p$, $q$ et de l'angle B.

Prenant un point $m$ sur la terre, il sera facile d'avoir les coordonnées rectangu-

laires X, Y, Z, en fonction de sa latitude, de sa longitude et du rayon $r$ de la terre; on aura donc les équations :

$$y-y'=\frac{y'-Y}{z'-Z}(z-z') \text{ et } x-x'=\frac{x'-X}{z'-Z}(z-z')$$

de la droite M, qui unit le point $m$ et le centre du soleil.

Toute droite passant par le point $m$ et tangente au soleil, dont le rayon est R, fera, avec la droite M, un angle dont le cosinus aura pour valeur $\frac{1}{D'}\sqrt{D'^2-R^2}$, D' étant égal à $\sqrt{(x'-X)^2+(y'-Y)^2+(z'-Z)^2}$.

L'équation du cône, ayant son sommet au point $m$ et tangent au soleil, sera donc :

$$\frac{1}{D'}\sqrt{D'^2-R^2}=\frac{(y'-Y)(y-Y)+(x'-X)(x-X)+(z'-Z)(z-Z)}{\sqrt{(y'-Y)^2+(x'-X)^2+(z'-Z)^2}\sqrt{(y-Y)^2+(x-Y)^2+(z-Z)^2}} \quad (0)$$

et remarquant que $X^2+Y^2+Z^2=r^2$, et que $x'^2+y'^2+z'^2=D'^2$, on aura :

$$\frac{1}{D'}\sqrt{D'^2-R^2}=\frac{yy'+xx'+zz'-Y(y'+y)-X(x'+x)-Z(z'+z)+r^2}{\sqrt{D'^2+r^2-(y'Y+x'X+z'Z)}\sqrt{y^2+x^2+z^2-(yY+xX+zZ)+r^2}} \quad (1)$$

Si l'on suppose deux sphères concentriques au soleil, l'une du rayon $(R+\rho)$, l'autre du rayon $(R-\rho)$ [$\rho$ étant le rayon de la lune], et deux cônes tangents à ces sphères et ayant pour axe commun la droite M, les génératrices de ces deux cônes étant d'ailleurs parallèles entre elles et à celles du cône dont le sommet est au point $m$, il sera facile d'avoir les coordonnées rectangulaires des sommets de ces deux cônes. En effet, désignant ces sommets par $m'$ et $m''$ et leurs coordonnées respectives par X'', Y'', Z'', on remarque que les droites $mm'$ et $mm''$ sont égales en longueur et que l'on a :

$$mm'=mm''=d'=\frac{D'\rho}{R}$$

Il faudra porter $d'$ sur la droite M, à droite et à gauche du point $m$, pour fixer la position des points $m'$ et $m''$ sommets des deux nouveaux cônes. Ces points étant construits, si par la droite M on fait passer trois plans respectivement perpendiculaires aux trois plans coordonnés, celui, par exemple, qui sera perpendiculaire au plan $xy$ coupera (*fig.* 69) ce plan suivant la droite LT; et l'on aura une figure dans laquelle la comparaison des triangles semblables conduira de suite aux valeurs de X' et X'' en fonction de : D, B, $\rho$, $d'$, X et $x'$.

On obtiendra de la même manière les valeurs de Y', Y'', et Z', Z'' et en les met-

tant à la place de X, Y, Z, dans l'équation (0) ou (1), on aura les équations des cônes qui, par leur intersection avec la courbe $\lambda$, donneront la position du centre de la lune, au moment d'une phase aperçue du point terrestre $m$.

Cherchons maintenant les équations de la courbe $\lambda'$.

On sait que dans une ellipse on a :

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi' + \frac{1}{a^2\cos^2 B}\sin^2\varphi' \qquad (2)$$

désignant par $d$ un diamètre A$n$ faisant avec l'axe $a$ un angle $\varphi'$ (*fig.* 68). L'angle $\varphi'$ sera la projection de l'angle $\varphi$ décrit par la lune dans son orbite.

On aura donc :

$$\operatorname{tang}\varphi.\cos B = \operatorname{tang}\varphi' \qquad (3)$$

Si du point A comme centre et avec A$n$ ou $d$ pour rayon on décrit un cercle et que l'on prenne l'arc $np$ égal à $n\varphi$ (en supposant que la terre décrive autour de son axe un angle qui soit à l'angle décrit par la lune dans son orbite et dans le même temps dans le rapport $n:1$).

On aura :

$$pq = \sin(n\varphi - \varphi')d = y \qquad (4)$$

$$Aq = \cos.(n\varphi - \varphi')d = x \qquad (5)$$

Il faudra éliminer $d$, $\varphi$ et $\varphi'$ entre les quatre équations (2, 3, 4, 5) et l'on aura une relation entre $x$ et $y$ qui sera l'équation de la projection sur le plan de l'équateur de la courbe $\lambda'$ parcourue par le centre de la lune.

Si l'on remarque que $\overline{pr} = \overline{n'b}$, on aura :

$$z = \overline{n'g'}\sin B = a\sin\varphi.\sin B \qquad (6)$$

et éliminant $d$, $\varphi$ et $\varphi'$ entre les quatre équations (2, 3, 4, 6), on aura une relation entre $y$ et $z$ qui sera l'équation de la projection de la courbe $\lambda'$ sur le plan vertical.

Si l'on suppose que l'orbite circulaire de la lune tourne autour de l'axe terrestre A ou de l'axe des Z, on aura une surface de révolution sur laquelle la courbe $\lambda'$ sera située. L'équation de cette surface sera :

$$a^2\cos^4 B - z^2(1-\cos^2 B)^2 = \cos^4 B(x^2+y^2) \qquad (7)$$

ou

$$a^2\cos^4 B - z^2\sin^4 B = \cos^4 B(x^2+y^2)$$

ou

$$(a^2 - x^2 - y^2)\cos^4 B - z^2\sin^4 B = 0$$

(Les équations de l'orbite lunaire étant : $x = \frac{\cos B}{\sqrt{1-\cos^2 B}}$. $y$ et : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\cos^2 B} = 1$.)

On n'aura donc qu'à éliminer $z$ entre l'équation du cône (0) ou (1) (après y avoir substitué X′, Y′, Z′ ou X″, Y″, Z″ à la place de X, Y, Z) et l'équation (7) de la surface de révolution, et l'on aura l'équation de la projection sur le plan de l'équateur de la courbe $\zeta$ intersection de la surface sur laquelle la courbe $\lambda$ est située avec le cône qui détermine une phase relativement au point terrestre *m*.

(En comparant les deux équations (0) et (7), on voit que l'élimination peut s'effectuer sur-le-champ.)

Les deux équations des projections, sur le plan de l'équateur, des deux courbes $\zeta$ et $\lambda'$ donneront les coordonnées $x$ et $y$ des points de rencontre des deux courbes.

Mais comme l'élimination de l'angle $\varphi$ est très-longue, on pourra construire graphiquement (*fig.* 68) les divers points *p* appartenant à la projection sur le plan de l'équateur de la courbe $\lambda'$, et au moyen de l'équation de la projection horizontale de la courbe $\zeta$, construire par points cette dernière courbe, laquelle coupera la courbe lieu des points *p* (en un certain point *p*), et dès lors du point A comme centre et avec A*p* pour rayon décrivant un cercle qui viendra couper l'ellipse projection de l'orbite lunaire en un point *n*, le nombre de degrés compris dans l'arc *np* (en comptant 15° pour une heure de temps) donnera l'heure de la phase.

Cette construction graphique peut s'exécuter, puisque les courbes $\lambda$ et $\zeta$ sont situées sur la même surface et que l'on pourra toujours prendre une échelle assez grande pour que l'approximation soit à peu près suffisante.

Toutefois nous devons faire remarquer de nouveau que toutes les constructions que l'on pourra indiquer pour la solution du problème qui nous occupe ne seront jamais assez approximatives (*astronomiquement* parlant) pour être employées à prédire les *éclipses* de soleil et l'heure précise de leurs *phases*.

Ces constructions ne seront jamais que des recherches géométriques plus curieuses qu'utiles.

L'élimination complète de $\varphi$, $d$ et $\varphi'$ est, comme nous l'avons dit plus haut, assez longue entre les quatre équations (2, 3, 4, 5) puisque $n=29$ environ (la lune mettant environ 29 jours à parcourir son orbite et la terre mettant un jour à accomplir sa révolution autour de son axe).

Mais on peut facilement arriver à éliminer $d$ et $\varphi'$, car en effet :

Les équations (4 et 5) deviennent en développant les sinus et cosinus :

$$\frac{y}{d} = (\cos n\varphi . \sin \varphi' - \cos \varphi' . \sin n\varphi)$$

$$\frac{x}{d} = (\cos n\varphi . \cos \varphi' + \sin \varphi' . \sin n\varphi)$$

Remplaçant $\frac{1}{d}$ par sa valeur donnée par l'équation (2), on aura :

$$y = \frac{\cos n\varphi . \sin \varphi' - \cos \varphi' . \sin n\varphi}{\left(\frac{1}{a^2} \cos^2 \varphi' + \frac{1}{a^2 \cos^2 B} . \sin^2 \varphi'\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x = \frac{\cos n\varphi . \cos \varphi' + \sin \varphi' . \sin n\varphi}{\left(\frac{1}{a^2} \cos^2 \varphi' + \frac{1}{a^2 \cos^2 B} . \sin^2 \varphi'\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Et comme

$$\cos = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2}} \quad \text{et} \quad \sin = \frac{\text{tang}}{\sqrt{1 + \text{tang}^2}}$$

en vertu de l'équation (3), on aura :

$$\cos^2 . \varphi' = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 \varphi . \cos^2 B} \quad \text{et} \quad \sin^2 \varphi' = \frac{\text{tang}^2 \varphi . \cos^2 B}{1 + \text{tang}^2 \varphi . \cos^2 B}$$

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\cos n\varphi . \text{tang}\, \varphi . \cos B - \sin n\varphi}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2 \cos^2 B} . \text{tang}^2 \varphi . \cos^2 B\right)^{\frac{1}{2}}} \\ x &= \frac{\cos n\varphi + \sin n\varphi . \text{tang}^2 \varphi . \cos B}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2 \cos^2 B} . \text{tang}^2 \varphi . \cos^2 B\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Remplaçant : $\cos . n\varphi$ et $\sin . n\varphi$ par leur valeur en : $\text{tang} . n\varphi$, on aura :

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\text{tang}\, \varphi . \cos B - \text{tang}\, n\varphi}{\frac{1}{a} (1 + \text{tang}^2 n\varphi)^{\frac{1}{2}} (1 + \text{tang}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\ x &= \frac{1 + \text{tang}\, n\varphi . \text{tang}\, \varphi . \cos B}{\frac{1}{a} (1 + \text{tang}^2 n\varphi)^{\frac{1}{2}} (1 + \text{tang}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Les équations (9) peuvent servir à résoudre le problème suivant :

*Étant donnée l'heure d'une phase, déterminer les lieux terrestres qui, à cette heure donnée, verront la phase indiquée.*

Il suffira de mettre dans les équations (8) et (6) à la place de $\varphi$ le nombre de degrés correspondant à une heure de temps $\left(\text{savoir } \frac{360^\circ}{29 \times 24}\right)$ on aura dès lors les trois coordonnées $x_1, y_1, z_1$, du point de la courbe $\lambda'$ qui devra être regardé comme le sommet d'un cône tangent à l'une ou à l'autre des sphères concentriques au soleil, et ayant pour rayon $R \pm \rho$.

L'intersection de ce cône (dont l'équation sera facile à obtenir, puisqu'il suffira de mettre dans l'équation (0) à la place de X, Y, Z, les valeurs des trois coordonnée $x_1, y_1, z_1$, données par les équations (9 et 8) et à la place de D' sa valeur $\sqrt{(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2+(z'-z_1)^2}$, et à la place de R, $R-\rho$ ou $R+\rho$) avec la sphère dont l'équation est : $x^2+y^2+z^2=r^2$ passera par tous les points terrestres qui verront au même instant la *phase* annoncée.

En supposant que le soleil et la lune restent fixes et que la terre prenne les deux mouvements, savoir : 1° le mouvement de la terre dans son orbite; 2° le mouvement de la lune dans son orbite, et choisissant pour plan des $xy$ le plan de l'orbite lunaire, on pourra appliquer les équations précédentes à la solution du problème suivant :

*Trouver les équations des projections sur l'orbite lunaire des ombres portées successivement par la lune sur la terre pendant une éclipse de soleil.*

En effet : une courbe analogue à $\lambda'$ sera dans ce cas la courbe parcourue par le centre de la terre en vertu des deux mouvements dont on la suppose douée (ayant soin de donner à $n$ la valeur convenable).

On pourra donc calculer les coordonnées $x_1, y_1, z_1$ du centre de la terre pour un angle $\varphi$ donné (cette vitesse angulaire $\varphi$ étant comptée à partir de la ligne des nœuds et sur l'orbite terrestre), et par suite construire par points les courbes intersection du cône (dont l'équation s'obtiendra facilement) enveloppant le soleil et la lune supposée fixe à son nœud ascendant (ce nœud ascendant étant d'ailleurs l'origine des coordonnées) avec la sphère terrestre dont l'équation sera :

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

pour reprojeter sur le plan de l'équateur terrestre ces diverses courbes et supposer comme dans le premier problème, que chacune de ces courbes tourne autour du centre de projection d'un angle $h$ correspondant à l'angle $\varphi$.

Mais cette méthode serait évidemment plus longue que celle que nous avons

indiquée au commencement de ce chapitre, puisque les équations des projections des ombres portées sur le plan de l'orbite lunaire, seraient du 4ᵉ degré, tandis que par notre première méthode nous étions conduits à construire des courbes qui n'étaient que du second degré.

---

# CHAPITRE V.

## DES ÉPICYCLOÏDES ANNULAIRES.

Dans ce chapitre, nous allons examiner des épicycloïdes nouvelles et qui n'ont point encore été étudiées. Ce sont des courbes à double courbure engendrées par un point d'un cercle roulant *angulairement* sur un autre cercle.

L'examen de ces courbes nous conduira à rechercher la solution de diverses questions relatives à l'hyperboloïde à une nappe et de divers problèmes sur les sections coniques.

Nous aurons aussi l'occasion de transformer diverses surfaces en d'autres surfaces, et de montrer combien sont utiles, en *géométrie descriptive*, les divers modes de transformation que l'on est conduit à employer; car c'est la méthode des transformations qui peut seule permettre de résoudre certains problèmes en *géométrie descriptive*, ou, en d'autres termes, lorsqu'on emploie la *langue graphique*.

### § Iᵉʳ.

*Des épicycloïdes à double courbure dites épicycloïdes annulaires.*

Concevons un cercle C dont l'axe A soit vertical, et un cercle C′ ayant un point *m* commun avec le cercle C et désignons par A′ l'axe de ce cercle C′.

Désignons par P le plan du cercle C et par P′ le plan du cercle C′. Prenons le plan P pour plan horizontal de projection et le plan passant par l'axe A et le point *m* pour plan vertical de projection.

Désignons par $H^{p'}$ la trace horizontale du plan P′, par $\alpha$ l'angle que ce plan fait avec le plan horizontal, par $6$ l'angle que la trace $H^{p'}$ fait avec la tangente $\theta$ au

cercle C pour le point $m$, et par $\theta'$ l'angle que la trace H'' fait avec la tangente $\theta'$ au cercle C' en ce même point $m$.

Désignons en outre par R le rayon du cercle C, et par R' le rayon du cercle C'.

Il est évident que si l'on se donne : 1° le rayon R ; 2° le rayon R'; 3° l'angle $\alpha$ ; 4° les angles $\theta$ et $\theta'$ ; et 5° le point $m$, la position des cercles C et C' se trouve fixée d'une manière invariable dans l'espace.

Concevons maintenant qu'au point $m$ se trouve un anneau fixé dans l'espace d'une manière invariable et que deux fils, l'un F enroulé sur le cercle C et l'autre F' enroulé sur le cercle C' se trouvent passés dans cet anneau.

En tirant les deux fils F et F', l'on imprimera un mouvement de rotation, soit au cercle C autour de son axe A, soit au cercle C' autour de son axe A'. Et il est évident que les deux cercles C et C' (qui se croisent au point $m$, puisqu'ils ont en ce point $m$ des tangentes différentes, des tangentes non superposées) rouleront l'un sur l'autre et rouleront *angulairement*.

Cela posé :

Supposons que le cercle C reste fixe et que le cercle C' roule angulairement sur le cercle C de manière à ce que les angles $\alpha$ et $\theta$ restent constants pendant le mouvement, un point $x$ du cercle C' décrira dans l'espace une courbe $\delta$ dont nous allons étudier les propriétés.

Il est évident que cette courbe $\delta$ sera tracée sur la surface $\Sigma$ engendrée par le mouvement de rotation du cercle C' autour de l'axe A. Ainsi $\Sigma$ sera une surface de révolution, et de plus une surface annulaire engendrée par le cercle C'.

La courbe méridienne de cette surface sera une courbe *ovale*, dont il sera toujours facile de trouver l'équation au moyen de l'*analyse* de Descartes, ou d'avoir le tracé au moyen des méthodes de la *géométrie descriptive*.

Nous donnerons à la courbe $\delta$ le nom d'*épicycloïde annulaire*, puisqu'elle est engendrée par le mouvement d'un cercle roulant sur un cercle et qu'elle se trouve tracée sur une surface annulaire.

Lorsque les deux cercles C et C' ont même tangente au point $m$, alors la surface annulaire est une surface sphérique passant par les deux cercles C et C', et dans ce cas la courbe $\delta$ est une épicycloïde sphérique, courbe qui a été examinée avec soin et pour la première fois par Hachette, dans son *Traité des machines*, au chapitre *des engrenages*.

Par ce qui précède, on voit de suite que les *épicycloïdes sphériques* ne sont qu'un cas particulier des *épicycloïdes annulaires* que nous nous proposons d'étudier. Les premières courbes s'obtiennent en faisant rouler *directement* l'un sur l'autre deux cercles, les secondes courbes s'obtiennent en faisant rouler *angulairement* l'un sur l'autre deux cercles.

Le plan P' coupera l'axe A en un point *s*. Menons par l'axe A un plan Q perpendiculaire au plan P', les deux plans P' et Q se couperont suivant une droite G passant par le point *s*, et cette droite G percera le plan P en un point *g*.

Si l'on fait rouler angulairement le cercle C' sur le cercle C, la droite G engendrera un cône de révolution B qui aura le point *s* pour sommet et la droite A pour axe, et le plan P' sera tangent à ce cône, en les diverses positions qu'il prendra dans l'espace.

Ce cône B aura pour trace sur le plan P un cercle D engendrée par le point *g*.

En sorte que les deux cercles C et D auront même centre *o* situé sur l'axe A, ce centre *o* étant l'intersection de l'axe A et du plan P.

Cela posé : il peut arriver trois cas *généraux* :

1° Le centre *o'* du cercle C' peut être au delà du plan P par rapport au point *s*. L'épicycloïde à double courbure sera dite dans ce cas : *épicycloïde annulaire extérieure ;*

2° Le centre *o'* du cercle C' peut être en deçà du plan P par rapport au point *s* et situé dès lors entre le point *s* et le plan P. L'épicycloïde à double courbure sera dite dans ce cas : *épicycloïde annulaire intérieure ;*

3° Le centre *o'* du cercle C' peut être au delà du point *s* par rapport au plan P. L'épicycloïde à double courbure sera encore dite : *épicycloïde annulaire extérieure ;*

Dans ces trois cas, le centre *o'* du cercle C' ne sera pas situé sur la génératrice G.

Comme cas *particulier*, on peut supposer que le centre *o'* du cercle C' se trouve situé sur la droite G ; dès lors on aura quatre cas *particuliers* :

1° Le centre *o'* sera au delà du point *m* par rapport au point *s* ;

2° Le centre *o'* sera entre les points *m* et *s* ;

3° Le centre *o'* ne sera autre que le point *s* ;

4° Le centre *o'* sera au delà du point *s* par rapport au point *m*.

Enfin, lorsqu'on supposera que le cercle D n'est autre que le cercle C, on pourra supposer que les trois points *s*, *m* et *o'* sont ou ne sont pas en ligne droite.

Lorsque ces trois points seront en ligne droite, on retombera sur les *épicycloïdes sphériques*.

Quelle que soit la position du cercle C' par rapport au cercle C, la construction de la projection horizontale (et dès lors sur le plan P) de la courbe $\delta$ sera toujours la même, et elle ne sera autre que celle employée dans le cas tout particulier où l'*épicycloïde à double courbure* est une *épicycloïde sphérique ;* et l'on peut en effet s'assurer qu'il en est ainsi qu'on vient de le dire en exécutant l'*épure* comme il suit :

*Construction de la projection horizontale de l'épicycloïde annulaire.*

Prenons pour plan horizontal de projection le plan P, et pour plan vertical de projection le plan Q (*fig.* 70).

Les traces du plan $P'$ seront $V^{p'}$ et $H^{p'}$, $H^{p'}$ sera perpendiculaire à la ligne de terre.

Le cercle $C'$ passera par le point $m$ du cercle C.

Faisant tourner le plan $P'$ autour de $H^{p'}$ comme axe pour le rabattre sur le plan horizontal, le cercle $C'$ prendra la position rabattue $C_1'$, son centre étant en $o_1'$.

Si l'on suppose que le point $x$ du cercle C est l'origine de l'épicycloïde, on devra prendre sur $C_1'$, l'arc $mx_1'$, égal à l'arc $mx$ et en relevant le cercle $C_1'$ pour le ramener en la position primitive $C'$, le point $x_1'$ viendra en $x'$ dont les projections seront $x'^v$ et $x'^h$.

Il sera donc facile de construire la courbe $\delta^h$, projection de l'épicycloïde annulaire $\delta$, car il suffira de prendre une nouvelle ligne de terre L'T' et d'opérer par rapport à elle, ainsi qu'on sait le faire lorsqu'il s'agit d'une *épicycloïde sphérique*.

*Construction de la tangente en un point de l'épicycloïde annulaire.*

La courbe $\delta$ (*fig.* 70), engendrée par un point $x'$ du cercle $C'$ roulant angulairement sur le cercle C, est située sur une surface annulaire et de révolution $\Sigma$, engendrée par le cercle $C'$, tournant autour de l'axe A.

Si donc, l'on veut construire la tangente $t$ au point $x'$ de $\delta$, on sait que cette tangente sera dans le plan tangent T mené au point $x'$ de la surface $\Sigma$.

Le plan tangent en un point $x'$ d'une surface de révolution, est déterminé par la tangente au *parallèle* passant le point $x'$, et par la tangente à la *courbe génératrice* passant par ce même point $x'$.

Le plan T, sera donc déterminé par la tangente $\theta'$ au point $x'$ du cercle $C'$, et par la tangente $\theta$ menée au *parallèle* $\gamma$ et passant par le point $x'$.

$\theta'$ se rabattra sur le plan horizontal en $\theta_1'$, tangente en $x_1'$ au cercle $C_1'$, qui est le rabattement du cercle $C'$; et $\theta_1'$ percera le plan horizontal en un point $q$, qui sera l'intersection de $\theta_1'$ et de $H^{p'}$; le cercle $\gamma$ se projettera horizontalement, suivant un cercle $\gamma^h$, décrit du point $o$ ou $A^h$ centre du cercle C, comme centre et avec un rayon égal à $ox^h$; $\theta^h$ sera donc perpendiculaire à $ox'^h$ et $\theta$ sera horizontal; donc, $H^t$ passera par le point $q$ et sera parallèle à $\theta^h$ ou perpendiculaire à $ox'^h$; $V^t$ passera par la trace verticale $p$ de la tangente horizontale $\theta_1$; ainsi, le plan T est connu, et sa position dans l'espace est fixée, puisque l'on a ses traces horizontale $H^t$ et verticale $V^t$.

Construisons maintenant la tangente $t$ au point $x'$ de la courbe $\delta$.

Le cercle C′ en roulant angulairement sur le cercle C, peut être considéré comme étant animé de deux mouvements.

Ainsi, on peut supposer que le cercle C′ ayant d'abord le point $x$ en commun avec le cercle C, a tourné autour de l'axe A d'un angle $\mu$, puis, qu'arrivé en la position où il a en commun le point $m$ avec le cercle C, il a tourné autour de son axe A′ d'un angle $\mu'$, de telle sorte que l'angle $\mu$ se trouve mesuré dans le cercle C par l'arc $xm$, et que l'angle $\mu'$ se trouve mesuré dans le cercle C′ par l'arc $x'm$, ces deux arcs $xm$ et $x'm$ étant égaux en longueur absolue.

Le cercle C′ tourne donc autour de l'axe A, dans le sens indiqué par la flèche $y$, puis, il tourne autour de son axe A′, dans le sens indiqué par la flèche $y_{\prime}$.

En vertu de ces deux mouvements du cercle C′, on voit que l'on peut construire la tangente au point $x'$ de l'épicycloïde $\delta$, par la méthode de Roberval.

Il faudra donc : 1° porter sur la tangente $\theta$ au *parallèle* $\gamma$, et à partir du point $x'$, un arc rectifié $kk'$, mesurant dans le cercle $\gamma$ l'angle $\mu$, et porter cet arc $kk'$ dans le sens de la flèche $y$ à partir du point $x'$.

2° porter sur la tangente $\theta'$ au cercle C′, et à partir du point $x'$ et dans le sens de la flèche $y_{\prime}$ un arc rectifié $mx'$, mesurant dans le cercle C′ l'angle $\mu'$; et la diagonale du parallélogramme construit sur ces portions des droites $\theta$ et $\theta'$ sera la tangente demandée.

Cette construction s'effectuera facilement; car, on rabattra sur le plan horizontal le plan T, et après avoir construit la droite $t_{\prime}$ diagonale du parallélogramme construit sur $\theta$ et $\theta'_{\prime}$, on la ramènera en la position qu'elle doit avoir en $t$ dans l'espace.

Cette construction de la tangente $t$ en un point $x'$ de l'épicycloïde $\delta$, est générale; elle s'exécutera toujours avec facilité, quelle que soit la position du cercle C′ par rapport au cercle C.

Au reste, c'est par la méthode de Roberval, que pour la première fois la tangente a été construite à l'épicycloïde sphérique; ce n'est qu'après, qu'Hachette a vu que l'on pouvait construire la tangente à l'épicycloïde sphérique, par la considération de deux sphères, l'une fixe et invariable, et l'autre mobile et de rayon variable.

Il est utile de considérer de plus près les deux *modes* de roulement, *direct* et *angulaire* de deux courbes roulant l'une sur l'autre, et d'établir les différences qui existent sous le point de vue géométrique entre ces deux modes. Lorsque l'on a deux cercles C et C′ qui ne sont pas situés dans un même plan et qui se coupent en un point $m$, et qui dès lors sont placés l'un par rapport à l'autre, dans l'espace, de telle manière que le plan Q déterminé par le point $m$ et les

centres $o$ et $o'$ des cercles donnés C et C', n'est pas perpendiculaire à la droite intersection des plans des deux cercles proposés, lorsqu'on a, dis-je, deux tels cercles, si le cercle C restant fixe, le cercle C' roule sur le cercle C, ainsi qu'on l'a dit ci-dessus, on voit que si l'on considère un point $n$ du cercle C infiniment voisin du point $m$ et un point $n'$, situé sur le cercle C', et infiniment voisin du même point $m$, lorsque le cercle C' se déplacera pendant le *roulement*, le point $n'$ viendra se superposer sur le point $n$; le cercle C' aura pris alors dans l'espace une position $C'_1$, et le point $m$ sera venu se placer sur $C'_1$, en un point $m'$ infiniment voisin du point $n$ et ce point $m'$ sera un des points de l'épicycloïde à double courbure $\delta$ engendrée par le point $m$ du cercle C', roulant angulairement sur le cercle C, ce point $m$ étant l'origine ou point de rebroussement de la courbe $\delta$ sur le cercle C.

On peut faire arriver le cercle C', en la position $C'_1$ de deux manières.

*La première manière* consiste à supposer : 1° que le cercle C' s'est mû parallèlement à lui-même, son centre parcourant une droite J parallèle à la droite que parcourt le point $n'$ pour venir se superposer avec le point $n$, de sorte que le cercle C aura pris une position $C_1$; et 2° à supposer que le cercle $C_1$ tourne autour d'un axe Y (mené par le point $n$ et perpendiculairement au plan P du cercle C) d'un angle tel que l'angle que la tangente $t'$ au point $n$ du cercle C fait avec la trace $D_1$ du plan du cercle $C_1$ sur le plan P de ce cercle $C_1$ devienne le même que l'angle que la tangente $t'$ fait avec la droite $D'_1$ trace du plan du cercle $C'_1$ sur le même plan P. Et l'on sait que désignant par $t$ la tangente au point $m$ du cercle C et par D' la trace du plan du cercle C' sur le plan P, les angles $(t,D')$ et $(t',D'_1)$ sont égaux.

Ainsi on a deux mouvements à imprimer au cercle mobile C', d'abord un mouvement de *translation* parallèle à la droite infiniment petite $\overline{nn'}$ et ensuite un mouvement de *rotation* autour de l'axe Y.

*La seconde manière* consiste à supposer : 1° que le cercle C' tourne autour de l'axe A du cône C d'un angle $\mu$ et arrive dès lors en une position C'' en laquelle il coupe le cercle C en un point $y$, l'arc fini $my$ mesurant dans le cercle C l'angle $\mu$; et 2° que l'axe A' du cercle C' ayant tourné d'un angle $\mu$ autour de l'axe A, et étant arrivé en une position A'' en laquelle il se trouve être l'axe du cercle C'', ce cercle C'' tourne autour de son axe A'' d'un angle $\mu'$ mesuré dans le cercle C'' par un arc égal en longueur absolue à l'arc rectifié $my$ du cercle C. Le cercle C'' ayant ainsi tourné sur lui-même aura enfin pris la position $C'_1$ indiquée ci-dessus. Il est évident qu'un point $y'$ situé sur le cercle C' et tel que les arcs $my'$ du cercle C' et $my$ du cercle C seront égaux en longueur absolue, sera venu se superposer

sur le point $y$. Après les deux mouvements de rotation, le point $m$ du cercle C' aura pris sur le cercle C,', la position $m'$ telle que les deux cercles C et C,' ayant alors non plus le point $m$, mais le point $y$ commun, les arcs $ym'$ du cercle C,' et $ym$ du cercle C seront égaux en longueur absolue; et le point $m'$, ainsi déterminé de position dans l'espace au moyen des deux mouvements de rotation imprimés successivement au cercle mobile C', sera un point de l'épicycloïde à double courbure $\delta$ engendrée par le point $m$ du cercle mobile C' roulant sur le cercle fixe C.

Lorsque l'on emploie la *seconde manière* pour déterminer le point $m'$ de l'épicycloïde $\delta$, on ne s'inquiète pas de la manière d'être entre eux des cercles fixe C et mobile C'. Le point $m'$ se trouve exactement déterminé, soit que les cercles C et C' se croisent au point $m$, soit qu'ils se trouvent tangents l'un à l'autre en ce point $m$.

Cette manière de décomposer le mouvement du point qui engendre la courbe $\delta$ s'applique indistinctement au cas du roulement *direct* et au cas du roulement *angulaire* du cercle mobile C' sur le cercle fixe C.

La première manière de décomposer le mouvement du point qui engendre la courbe $\delta$ peut enfin s'appliquer aux deux cas du roulement *direct* et *angulaire*; mais il faut remarquer que dans le cas du roulement *direct*, le mouvement de *translation* est nul et qu'il n'existe plus que le mouvement de *rotation* (*), et en effet:

Lorsque les deux cercles C et C' ont un seul point commun $m$, en vertu de ce qu'ils se croisent en ce point $m$, les deux points $n$ et $n'$ infiniment voisins de $m$ et situés l'un sur le cercle C et l'autre sur le cercle C' sont séparés l'un de l'autre, et le mouvement de *translation* a pour but de superposer ces deux points $n$ et $n'$.

Mais lorsque les deux cercles C et C' ont un contact au point $m$, ils ont alors un élément rectiligne commun, dès lors les éléments rectilignes $mn$ du cercle C et $mn'$ du cercle C' se confondent, le mouvement de *translation* n'est donc plus nécessaire, puisque les points $n$ et $n'$ se trouvent superposés en vertu des conditions du problème.

Maintenant appliquons la méthode de Roberval, à la construction de la tangente à la courbe $\delta$ en un de ses points, et voyons à quoi l'on est conduit lorsque l'on considère le point $m'$ de la courbe $\delta$ comme étant construit par l'un ou l'autre mode exposé ci-dessus.

---

(*) On voit dès lors pourquoi la normale en un point d'une épicycloïde *sphérique* passe par le point de contact du cercle fixe et du cercle mobile, et pourquoi pour l'épicycloïde *annulaire* (*fig.* 70) la normale au point $x$ de cette courbe ne peut pas passer par le point $m$ commun au deux cercles *fixe* C et *mobile* C'

PREMIER CAS. *Le mouvement du point générateur de l'épycicloïde étant décomposé en deux mouvements l'un de translation et l'autre de rotation.*

Rappelons-nous que la méthode de ROBERVAL consiste à remplacer les espaces infiniment petits par des espaces finis.

Le point $m'$ doit être considéré comme se mouvant d'abord en parcourant, suivant une droite $\theta$ parallèle à $\overline{nn'}$, un espace infiniment petit et égal à $\overline{nn'}$, et ensuite en parcourant, suivant une droite $\theta'$ tangente au cercle U qu'il décrit autour de l'axe Y, un espace infiniment petit et égal à l'arc élémentaire du cercle U, mesurant dans ce cercle un angle égal à l'angle que les droites D′ et D,′ font entre elles.

On ne peut pas construire *graphiquement*, au moyen des infiniment petits; l'*analyse* seule peut employer les *infiniment petits*, car elle sait les écrire; la *géométrie descriptive* ne peut employer que des *longueurs* finies dans ses constructions graphiques, puisqu'il lui est impossible d'écrire des infiniment petits.

Il faut donc, en *géométrie descriptive*, remplacer les infiniment petits par des longueurs finies, mais telles que leur rapport soit précisément le même que celui qui existe entre les infiniment petits qu'elles doivent remplacer.

Ainsi, au lieu de considérer l'élément rectiligne $\overline{nn'}$, on devra prendre sur le cercle C un point $y$, et sur le cercle C′ un point $y'$ tels que l'on aura : l'arc $my$ égal à l'arc $my'$; et la droite finie $\overline{yy'}$ devra remplacer la droite infiniment petite $\overline{nn'}$.

Pour que ce remplacement puisse avoir lieu, il faudra que les arcs $mn$ (infiniment petit) et $my$ (fini) du cercle C soient entre eux comme les droites $\overline{nn'}$ (infiniment petite) et $\overline{yy'}$ (finie), et de plus il faudra que la droite $\overline{yy'}$ soit parallèle à la droite $\overline{nn'}$.

Or : il est évident que le rapport existant entre les arcs ne sera jamais égal au rapport existant entre les droites, quelles que soient les positions que l'on donne aux cercles C et C′ l'un par rapport à l'autre, en établissant pour condition qu'ils se coupent au point $m$; et de plus, les droites $yy'$ et $nn'$ ne seront parallèles entre elles qu'autant que les deux cercles C et C′ satisferont aux deux conditions suivantes : 1° être placés sur une sphère, et 2° avoir des rayons égaux.

La méthode de ROBERVAL ne peut donc être appliquée dans le *premier cas*.

DEUXIÈME CAS. *Le mouvement du point générateur de l'épicycloïde étant décomposé en deux mouvements de rotation.*

Si l'on se rappelle la construction de la tangente au point $x'$ de l'épicycloïde $\delta$ (*fig.* 70), on voit de suite que les arcs finis qui mesurent, l'un dans le cercle $\gamma$ l'angle $\mu$, et l'autre dans le cercle C′ l'angle $\mu'$, sont dans le même rapport que

les arcs élémentaires $d\gamma$ et $dC'$ qui mesureraient respectivement dans les cercles $\gamma$ et C′ des angles infiniment petits de rotation.

La méthode de Roberval peut donc être employée avec certitude dans le *deuxième cas.*

D'après ce qui précède, on doit voir que la méthode de Roberval est en effet la méthode générale pour construire la tangente en un point d'une épicycloïde soit plane, soit à double courbure, quelle que soit la position que puissent affecter entre eux dans un plan ou dans l'espace, et le cercle *fixe* et le cercle *mobile*.

Comment se fait-il que dans les divers traités publiés sur la géométrie descriptive, lorsque l'on s'occupe de l'épicycloïde *sphérique*, on ne donne que la construction de la tangente, qui est fondée sur ce que l'élément de la courbe épicycloïdale se trouve située sur une sphère qui a pour rayon la normale en ce point de la courbe, construction qui est due à Hachette?

Sans aucun doute, si l'on ne se proposait que d'examiner les propriétés de l'épicycloïde sphérique et par suite sa tangente, la méthode de Roberval devrait être exposée comme étant générale, comme s'appliquant aux *épicycloïdes* à double courbure de toutes espèces, et aussi aux courbes dites *épicurvilignes planes* ou à double courbure, et qui peuvent être engendrées par une courbe quelconque, et *mobile* plane ou à double courbure roulant *directement* ou *angulairement* sur une courbe quelconque et *fixe* qui peut être elle-même ou plane ou à double courbure.

Mais la construction de la tangente à l'épicycloïde sphérique donnée par Hachette conduit sur-le-champ à l'engrenage *conique à flanc*, et c'est précisément cette construction toute spéciale de la tangente à l'épicycloïde sphérique, qui fit voir à Hachette la construction *géométrique* de l'engrenage conique que l'on avait essayé et sans succès avant lui.

Et en effet:

Le plan tangent à la sphère mobile qui correspond à un point $x$ de l'épicycloïde a pour plan tangent en ce point $x$ un plan T perpendiculaire au plan P du cercle mobile C′. Un point du cercle mobile C′ décrit donc, si l'on fait rouler ce cercle C′ intérieurement à un cercle C d'un rayon double et situé dans le plan P, une épicycloïde plane et intérieure qui n'est autre qu'un diamètre de ce cercle C, qui n'est autre, en d'autres termes, que la trace du plan T sur le plan P, etc. (*); et c'est précisément parce que l'épicycloïde sphérique avait été étudiée par Hachette, en vue de l'engrenage *conique à flanc*, qu'il a donné dans son *Traité*

(*) *Voyez* le chapitre sur les engrenages, dans le *Traité des machines* publié par Hachette, et le *Traité de géométrie descriptive* publié par le même auteur.

*de géométrie descriptive* la construction de la tangente en regardant cette tangente comme étant l'intersection des deux plans tangents, l'un à la sphère *fixe* et l'autre à une sphère *mobile*; et qu'il a été conduit à donner une construction toute spéciale pour un cas tout particulier, et à oublier de donner une construction générale et applicable à tous les *cas*.

Et il faut bien le remarquer, la construction de la tangente à l'épicycloïde sphérique par la méthode de ROBERVAL ne pouvait pas conduire à l'engrenage conique à flanc, tandis que la construction particulière trouvée par HACHETTE y conduisait tout naturellement.

## § II.

*De l'emploi de l'épicycloïde annulaire, dans les engrenages aptes à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan.*

Énonçons d'abord deux théorèmes connus et qui nous seront utiles.

*Théorème* 1. Étant données deux droites A et A′ situées dans un plan, et se coupant en un point *s*, et faisant entre elles un angle arbitraire $\alpha$, si l'on conçoit deux plans P et P′ rectangulaires entre eux, et passant, savoir: le plan P par la droite A et le plan P′ par la droite A′, ces deux plans se couperont suivant une droite G, qui appartiendra à un cône oblique ayant le point *s* pour sommet, et dont les plans des sections circulaires seront respectivement perpendiculaires aux droites A et A′.

*Théorème* 2. Étant données deux droites A et A′ non situées dans un même plan et ayant une plus courte distance égale à D, si l'on conçoit deux plans P et P′ rectangulaires entre eux, et passant, savoir: le plan P par la droite A, et le plan P′ par la droite A′, ces deux plans se couperont suivant une droite G qui appartiendra à un hyperboloïde à une nappe non de révolution et dont les plans des sections circulaires seront respectivement perpendiculaires aux droites A et A′.

Je vais démontrer ces deux théorèmes, quoiqu'ils soient connus, parce que le mode de démonstration que j'emploie est nouveau et qu'il est surtout tout à fait dans l'esprit de la *géométrie descriptive*.

*Démonstration du théorème* 1. Par les deux droites données A et B se coupant au point *s* on fait passer un plan et on le prend pour plan horizontal de projection.

On prend la ligne de terre LT perpendiculaire à l'une des droites, et ainsi à la droite A, par exemple.

Cela fait (*fig.* 71) :

Par la droite A, on fait passer un plan P, dont les traces seront $H^p$ ou A et $V^p$.

Pour faire passer par la droite B un plan Q perpendiculaire au plan P, il faudra, d'un point de B abaisser une perpendiculaire sur le plan P. On prend le point $b$ en lequel B coupe LT, et si de ce point $b$ on abaisse une normale N au plan P, $N^h$ ne sera autre que LT et $N^v$ qui ne sera autre que N, puisque la normale est dans le plan vertical, sera dirigée perpendiculairement à $V^p$. En sorte que $H^q$ sera la droite B et $V^q$ sera la normale N.

Ainsi, $V^p$ et $V^q$ se coupent à angle droit en $x$, point qui sera la trace verticale de la droite I, intersection des deux plans P et Q. I passe par le point $s$; donc le lieu des droites I est un cône ayant $s$ pour sommet.

Le point $x$ est sur un cercle C décrit sur $ab$ comme diamètre ; donc le cône est oblique et a pour section circulaire le cercle C ; donc, etc.

*Démonstration du théorème* 2. Démontrons d'abord comme point de départ le théorème suivant :

Si l'on a un cercle C (*fig.* 73) et un parallélogramme rectangle $a_1a_2b_1b_2$, dont deux côtés parallèles $a_1a_2$, $b_1b_2$, sont tangents à ce cercle.

Si l'on joint un point $x$ du cercle C, avec les points $a$ et $b$ contact de ce cercle avec les côtés du parallélograme, l'angle $\widehat{axb}$ sera droit, puisque $ab$ sera un diamètre du cercle C.

Cela fait :

Si l'on mène par les points $a_1$ et $b_1$, extrémités d'une des diagonales du rectangle, des droites $a_1x_1$, $b_1x_1$ respectivement parallèles aux droites $ax$ et $bx$, elles se couperont en un point $x_1$; et si de même, on mène par les points $a_2$ et $b_2$, extrémités de la seconde diagonale du rectangle, des droites $a_2x_2$, $b_2x_2$ respectivement parallèles aux droites $ax$ et $bx$, elles se couperont en un point $x_2$.

Je dis que les trois points $x_1$, $x$, $x_2$, seront en ligne droite, et que cette droite sera tangente en $x$ au cercle C.

En effet :

Il est évident que les points $x_1$ et $x_2$ sont sur un cercle D, concentrique au cercle C, et ayant son rayon égal à la moitié de la diagonale $a_1b_1$ ou de la diagonale $a_2b_2$.

Supposons que les trois points $x_1$, $x$, $x_2$ ne soient pas en ligne droite, nous pourrons toujours unir les points $x$ et $x_1$, et si nous démontrons que le triangle $oxx_1$ est rectangle en $x_1$, comme nous pourrons démontrer de la même manière que le triangle $oxx_2$ est aussi rectangle en $x_2$ on aura démontré que les trois points $x_1$, $x$, $x_2$, sont en ligne droite et que cette droite est tangente en $x$ au cercle C, puisque cette droite sera perpendiculaire au rayon $ox$.

Or, pour démontrer que le triangle $oxx_1$ est rectangle en $x$, il suffit de démontrer que les deux triangles $oaa_1$ et $oxx_1$ sont égaux.

Or, ces deux triangles ont deux côtés égaux, savoir : $ox = oa$, $ox_1 = oa_1$.

Il suffit donc de démontrer que les angles $\widehat{ox_1x}$ et $\widehat{oa_1a}$ sont égaux.

Mais la chose est évidente, par la figure; car les deux cercles C et D ayant même centre $o$, et les cordes $bx$ et $b_1x_1$ étant parallèles, si la droite $bb_1$ est tangente en $b$ au cercle C, la droite $xx_1$ sera aussi tangente en $x$ à ce même cercle C.

Par conséquent, les deux triangles $oxx_1$ et $obb_1$ sont égaux, et comme les deux triangles $oa_1a$ et $ob_1b$ sont égaux, la proposition se trouve évidemment démontrée.

Passons maintenant à la démonstration du *théorème* 2.

Soient données dans l'espace (*fig.* 72) deux droites $A_1$ et $B_1$ ayant pour plus courte distance la droite $pq$.

Par le milieu $s$ de $pq$, je mène deux droites A parallèles à $A_1$ et B parallèle à $B_1$.

Je mène ensuite par le point $p$, la droite $B_1$ parallèle aux droites B et $B_1$, et par le point $q$, la droite $A_1$ parallèle aux droites A et $A_1$.

Cela fait : Je coupe tout le système par un plan X, perpendiculaire aux droites A, $A_1$ et $A_1$, ce plan coupe respectivement les six droites construites $A_1$, A, $A_1$, $B_1$, B, $B_1$, en les points $a_1$, $a$, $a_1$, $b_1$, $b$, $b_1$.

Les quatre points $a_1$, $b_1$, $a_1$, $b_1$, sont les sommets d'un rectangle; les points $a$ et $b$, sont les milieux des côtés $a_1a_1$ et $b_1b_1$ de ce rectangle.

Sur $ab$ comme diamètre je décris un cercle C.

On a donc sur le plan X, les données de la *fig.* 73.

Or, si par les droites A et B qui se coupent au point $s$, on fait passer des couples de plans P et Q, P′ et Q′, etc., rectangulaires entre eux, on sait, par le premier théorème, que les droites I intersection de chaque couple de plans, tels que ceux-là, forment un cône oblique dont les plans des sections circulaires sont perpendiculaires, ou à la droite A ou à la droite B.

On voit donc que si l'on trace les droites $ax$ et $bx$ sur le plan X, on aura sur ce plan X les traces de deux plans rectangulaires entre eux et qui se couperont suivant la droite $sx$ ou I.

Les droites $a_1x_1$ et $b_1x_1$ parallèles aux droites $ax$ et $bx$ pourront être considérées comme les traces de plans $P_1$ et $Q_1$ passant respectivement par les droites $A_1$ et $B_1$, et il est évident que les plans P et $P_1$, Q et $Q_1$ sont parallèles, donc $P_1$ et $Q_1$ sont rectangulaires entre eux; et la droite G intersection des plans $P_1$ et $Q_1$ sera dès lors parallèle à I.

De même, les plans $P_1$ et $Q_1$ qui passeront respectivement par les droites

$A_s$, $a_s x_s$ et $B^s$, $b_s x_s$ seront rectangulaires entre eux comme étant parallèles aux plans P et Q, et leur intersection H sera parallèle à I.

Et comme les points $x_1$, $x$, $x_2$ sont en ligne droite et que cette droite est tangente en $x$ au cercle C, il s'ensuit que le plan qui contiendra les trois parallèles H, I, G sera tangent au cône ($s$, C) tout le long de la génératrice I.

Toutes les droites G formeront une surface gauche $\Sigma$, et toutes les droites H formeront une surface gauche $\Sigma'$.

Démontrons que ces deux surfaces ne sont qu'une seule et même surface.

Les droites G perceront le plan X en des points $x_1$, et les droites H perceront le plan X en des points $x_1$, lesquels seront les uns et les autres situés sur un même cercle D (*fig.* 73); par conséquent, les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ seront coupées par le plan X suivant le même cercle D.

Mais on peut faire varier de position le plan X en le laissant parallèle à lui-même; et en la projection X', il coupera le cône ($s$, C) suivant un cercle C' qui conduira à un même cercle D' pour l'une et l'autre surface $\Sigma$ et $\Sigma'$. Ces deux surfaces se confondent donc en une seule et même surface qui est doublement réglée.

Dès lors, par un point $m$ de la surface $\Sigma$ passera toujours deux génératrices droites, l'une du système G et l'autre du système H, et le plan tangent en $m$ sera déterminé par ces deux génératrices droites de systèmes différents se croisant en ce point $m$.

Remarquons que les deux génératrices G et H (*fig.* 71) parallèles à la droite I se coupent à l'infini; donc le plan passant par G et H sera tangent à la surface $\Sigma$ en un point situé à l'infini; ce plan, qui passe par deux génératrices parallèles et de systèmes différents, est donc un plan asymptote de la surface $\Sigma$; il passe par la droite I et par le point $s$; il a sa trace sur le plan X tangent au cercle C; donc tout plan asymptote de la surface $\Sigma$ est tangent au cône ($s$, C); par conséquent le cône ($s$, C) peut-être dit : *cône asymptote* de la surface $\Sigma$.

Ce qui précède suffit pour faire reconnaître la surface $\Sigma$ comme étant un *hyperboloïde à une nappe*, mais en démontrant le théorème suivant : *Tout plan coupe la surface $\Sigma$ suivant une section conique*, nous achèverons de faire reconnaître l'identité.

Théorème. *Tout plan coupe la surface $\Sigma$ suivant une section conique.*

On sait (*fig.* 74) que si l'on a une section conique E et qu'on construise une courbe E' qui soit semblable et semblablement placée et concentrique à la courbe E, cette seconde courbe E' est une section conique.

Cela posé :

Si l'on a une section conique E et une courbe E' telle qu'en menant à E une tangente, le point de contact $m$ soit le milieu de la corde $p'q'$ interceptée sur la

tangente par la courbe E'; je dis que la courbe E' n'est autre qu'une section conique semblable, semblablement placée et concentrique à la section conique E.

Et en effet :

Unissons le centre $o$ de la section conique E avec le point $q'$ en lequel la tangente en $m$ à la courbe E coupe la courbe E'; le rayon-vecteur $oq'$ coupera E en $q$. Menons par $q$ une droite $pq$ parallèle à la tangente $mq'$, elle coupera E en $p$. Joignons $o$ et $p$, on aura un rayon vecteur qui viendra couper la tangente $mq$ en $p'$.

Cela fait : on a par construction $mq = mp'$; donc le point $p'$ sera sur la courbe E', puisque par hypothèse on doit avoir $mq' = mp'$.

Menons par le point $p'$ une tangente $p'g$ à la section conique E, on aura par hypothèse $gp' = gr'$, etc. On a donc :

$$oq : op : or : \text{etc.} :: oq' : op' : or' : \text{etc.}$$

La courbe E' est donc semblable, semblablement placée et concentrique à la section conique E, la courbe E' est donc une section conique.

Cela dit:

Coupons le cône ($s$, C) et la surface gauche et doublement réglée Σ (*fig.* 75), par un plan quelconque Y. Ce plan coupera le cône suivant une section conique $E_1$ et la surface Σ suivant une courbe $E_1'$. Ce plan coupera la droite I en $m$ et la droite G en $q'$ et la droite H en $p'$; et la droite $p'mq'$ sera tangente en $m$ à $E_1$, et on aura évidemment $mp' = mq'$, puisque la droite $x_1xx_1$ est tangente au cercle C en $x$ et que l'on a : $xx_1 = xx_1$.

Les courbes $E_1$ et $E_1'$ (*fig.* 75) seront donc entre elles comme les courbes E et E' (*fig.* 74); donc $E_1'$ est une section conique. Un plan coupe donc toujours la surface Σ suivant une section conique, et l'on peut obtenir, comme sur le cône, les trois sections coniques *ellipse*, *parabole*, *hyperbole*.

Les *théorèmes* 1 et 2 étant démontrés, nous allons faire voir comment le cône asymptote de l'hyperboloïde, se transformant en cet hyperboloïde, un certain plan tangent au cône se transforme en un paraboloïde (ou *plan gauche*) tangent à l'hyperboloïde.

Prenons pour plan horizontal le plan X de la *fig.* 72, et prenons pour plan vertical de projection un plan parallèle aux droites A et B. Alors nous aurons *fig.* 76 :

Les droites A, $A_1$, $A_2$ verticales et projetées sur le plan horizontal en les points $A^h$, $A^h_1$, $A^h_2$; le point $A^h$ étant au milieu de la droite $A_1^hA^h_2$, laquelle sera la projection de la plus courte distance $pq$ (*fig.* 72) existant entre les droites $A_1$ et $B_1$, $A_2$ et $B_2$.

Les trois droites B, $B_1$, $B_2$ se projetteront horizontalement suivant trois droites

parallèles entre elles $B^h$, $B_1^h$, $B^h_2$, et verticalement ces droites se projetteront suivant une seule et même droite $B^vB^v_1B^v_2$; les trois droites $A$, $A_1$, $A_2$ se projetteront aussi verticalement en une seule et même droite $A^vA^v_1A^v_2$ perpendiculaire à la ligne de terre.

Le cône oblique aura pour sommet le point $s$ intersection des droites A et B et pour base le cercle C.

L'hyperboloïde à une nappe aura pour trace sur le plan horizontal le cercle D.

Si l'on coupe ces deux surfaces (cône et hyperboloïde) par un plan horizontal X', on aura pour section dans le cône un cercle C' dont la projection $C'^h$ sera tangente au cercle C au point $A^h$, et pour section dans l'hyperboloïde un cercle D' dont la projection $D'^h$ passera par les points $A^h$, et $A^h_1$.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, si l'on mène par le point $A^h$ une droite quelconque $I^h$, on aura la projection horizontale d'une génératrice I du cône oblique; et si par le point $A_1^h$ on mène une droite $G^h$ parallèle à $I^h$, on aura la projection horizontale d'une génératrice G de l'hyperboloïde; et comme l'on sait que les droites I et G sont parallèles entre elles dans l'espace, il faudra que les projections verticales $I^v$ et $G^v$ soient parallèles.

Si nous désignons par R le rayon du cercle C, par R' celui du cercle C', par $\rho$ celui du cercle D et par $\rho'$ celui du cercle D', nous remarquerons (*fig.* 76) que les arcs $bx$ et $b'^hx'^h$ sous-tendent l'angle $\widehat{bA^hx}$, et que cet angle a son sommet sur l'une et l'autre circonférence C et C' (puisque son sommet est au point $A^h$, en lequel les deux cercles C et C' sont tangents l'un à l'autre), on aura donc :

$$\text{arc } bx : \text{arc } b'^hx'^h :: R : R'$$

Il en est de même, pour les arcs $b_1y$ et $b_1'^hy'^h$ qui sous-tendent un même angle $\widehat{b_1A_1^hy}$, l'un dans le cercle D et l'autre dans le cercle D', puisque cet angle a son sommet en un point commun aux deux circonférences D et D'; on aura donc aussi :

$$\text{arc } b_1y : \text{arc } b_1'^hy'^h :: \rho : \rho' \quad \text{ou} \quad :: b_1A_1^h : b_1'^hA_1^h$$

Et l'on doit remarquer que les cercles C et D, C' et D' sont concentriques et que les droites $b_1A_1^h$, $b_1'^hA_1^h$ sont les diagonales des rectangles inscrits dans les cercles D et D'.

Si nous concevons une suite de droites horizontales s'appuyant sur les droites A et I elles formeront un plan Z; et si nous considérons une suite de droites horizontales s'appuyant sur les droites $A_1$ et G, elles formeront un paraboloïde hyperbolique ou plan gauche $Z_1$. Et l'on doit remarquer que le plan X coupera le

plan Z suivant une droite passant par le point $x'$ et coupera le paraboloïde $Z_r$ suivant une droite passant par le point $y'$.

On voit donc que lorsque l'on transforme le *cône* en *hyperboloïde* en transportant A en $A_r$ et B en $B_r$, on transforme la droite I en la droite G et le plan Z en la surface $Z_r$.

Maintenant supposons que nous avons pris sur la plus courte distance existant entre les droites $A_r$ et $B_r$ ou $A_r$ et $B_r$ un point $n$ tel que l'on a :

$$n^hA_r^h : A_r^hA_r^h :: v : v'$$

Menons par ce point $n$ une droite $A''$ parallèle au plan vertical de projection, et qui soit telle que $A''^v$ passe par le point $s^v$ en lequel se coupent les droites $B^v$ et $A^v$ et fasse avec $B^v$ un angle $\alpha$; tel que désignant par $6$ l'angle que les droites $B^v$ et $A^v$ font entre elles, on aura :

$$\sin\alpha : \sin 6 :: v : v'$$

Alors on sait que les trois droites $A''$, $B_r$ et $A_r$ seront placées dans l'espace de telle manière que si de chaque point $b_r$ de la droite $B_r$ on abaisse des perpendiculaires sur $A_r$ et sur $A''$, on aura, en désignant ces deux perpendiculaires, la première par $2\rho$ et la seconde par $2r$ :

$$2r : 2\rho :: v : v'$$

ou

$$r : \rho :: v : v' \qquad (1)$$

Cela dit :

Par le point $s$, sommet du cône, menons une droite $A'$ parallèle à $A''$, la droite B sera telle par rapport à $A'$ et à A que si de chacun de ses points $b$ on abaisse des perpendiculaires sur A et sur $A'$, on aura, en désignant ces deux perpendiculaires, la première par 2R et la seconde par $2p$ :

$$2p : 2R :: v : v'$$

ou

$$p : R :: v : v' \qquad (2)$$

Cela posé :

Si nous considérons les droites A et $A'$ comme les axes d'un engrenage conique, si par le point $b$ du cercle C nous menons un plan perpendiculaire à l'axe $A'$, et si nous traçons dans ce plan un cercle $C_r$ avec le rayon $p$ et ayant son centre sur l'axe $A'$, si nous supposons que le cercle C roule sur le cercle $C_r$, le point $b$

engendrera une épicycloïde sphérique $\psi$; et si nous faisons la même chose pour chaque point de la droite B, on aura une suite d'épicycloïdes sphériques $\psi'$, $\psi''$, qui formeront un cône épicycloïdal ayant le point *s* pour sommet, et ce cône épicycloïdal en tournant autour de l'axe A' conduira uniformément le plan Z en le faisant tourner autour de l'axe A, ainsi que pour la première fois, HACHETTE l'a démontré dans son *Traité des machines*.

Cela dit, si de chaque point $b_1$ de la droite $B_1$ on mène des plans perpendiculaires à l'axe A'', et que dans chacun d'eux on trace un cercle $D_1$ avec le rayon $r$, et ayant son centre sur l'axe A'', et si l'on suppose que le cercle D roule angulairement sur le cercle $D_1$, le point $b_1$ engendrera une épicycloïde annulaire $\delta$, et chaque point de $B_1$ nous donnera une épicycloïde annulaire; on aura donc une suite d'épicycloïdes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, qui formeront une surface gauche $\Delta$.

Et en effet, la surface obtenue sera *réglée*, car si l'on suppose que le point $x$ est un point de l'épicycloïde sphérique $\psi$, tous les points $x'$ de la droite I seront les points homologues des épicycloïdes sphériques $\psi'$, puisque les cercles C, C', auront roulé de la même quantité angulaire $\widehat{bA^hx}$.

Et de même, si l'on suppose que le point $y$ est un point de l'épicycloïde annulaire $\delta$, tous les points $y'$ de la droite G seront les points homologues des épicycloïdes annulaires $\delta'$, puisque les cercles D, D', auront roulé de la même quantité angulaire $\widehat{b_1A_1{}^hy}$.

Maintenant, lorsque deux surfaces $\varphi$ et $\varphi'$ sont en contact par une ligne $l$, si l'on transforme $\varphi$ et $\varphi'$ en deux autres surfaces $\varphi_1$ et $\varphi_1'$, quel que soit le mode de transformation, on sait que $\varphi_1$ et $\varphi_1'$ seront en contact par une ligne $l_1$ transformée de $l$.

Ainsi : 1° le cône épicycloïdal et le plan Z étant tangent suivant la droite I; 2° le plan Z se transformant en le paraboloïde $Z_1$; 3° la droite I se transformant en la droite G; 4° le cône épicycloïdal se transformant en la surface gauche $\Delta$; 5° la surface gauche épicycloïdale $\Delta$ et le plan gauche $Z_1$ ayant en commun la droite G; on en conclut que ces deux surfaces gauches *épicycloïdales* et *paraboloïdes* sont tangentes l'une à l'autre suivant la droite G.

Par conséquent, la surface gauche et épicycloïdale $\Delta$ en tournant uniformément autour de l'axe A'' conduira aussi uniformément le plan gauche $Z_1$ en le faisant tourner autour de l'axe $A_1$.

Remarquons : que lorsque l'on veut construire un engrenage *conique* sur les axes A et A', on considère : 1° le cercle C roulant directement sur le cercle $C_1$ fixé à l'axe A', et son point $b$ engendrant une épicycloïde sphérique, et que l'on doit considérer, 2° le même cercle C comme roulant sur un cercle $C_1$ ayant le

point $A^h$ pour centre et $bA^h$ pour rayon et fixé dès lors à l'axe A ; et comme le cercle C a pour diamètre le rayon du cercle $C_1$, la courbe donnée par le point $b$ n'est autre que le rayon $bA^h$.

Par les mêmes raisons, lorsque l'on construira un engrenage *hyperboloïdique* sur les deux axes $A_1$ et $A''$, il faudra considérer d'abord le cercle D comme roulant d'abord sur le cercle $D_1$ fixé à l'axe $A''$, son point $b_1$ engendrant une épicycloïde annulaire ; et considérer ensuite le même cercle D comme roulant sur un cercle $D_1$ ayant le point $A_1^h$ pour centre et pour rayon $b_1A_1^h$ ; et la courbe donnée par le point $b_1$ ne sera autre que le rayon $b_1A_1^h$.

Ce sont toutes les droites horizontales telles que $b_1A_1^h$ données par les divers cercles horizontaux D, D',.... qui formeront le paraboloïde ou plan gauche conduit par la surface réglée et épicycloïdale. Mais il faut démontrer que le plan gauche engendré par une droite se mouvant horizontalement sur $A_1$ et $B_1$ n'est autre que le plan gauche engendrée par une droite se mouvant horizontalement sur $A_1$ et G.

Et en effet : $b_1'^hA_1^h$ est la projection d'une horizontale située dans le plan X' et s'appuyant sur $B_1$ et $A_1$ ; $b_1A_1^h$ est la projection d'une horizontale située sur le plan horizontal X et s'appuyant sur $B_1$ et $A_1$.

Ces deux horizontales comprennent entre elles un angle qui est égal à l'angle $\widehat{b_1^h A_1^h b_2}$.

De même, $y'^hA_1^h$ est la projection d'une horizontale située dans le plan X' et s'appuyant sur G et $A_1$ ; $yA_1^h$ est la projection d'une horizontale située dans le plan horizontal X et s'appuyant sur G et $A_2$.

Ces deux horizontales comprennent entre elles un angle qui est égal à l'angle $\widehat{y'^h . A_2^h . y}$.

Si $b_1'^hA_1^h$ arrivant en $y'^hA_2^h$, $b_1A_1^h$ arrive en même temps en $yA_1^h$, il sera démontré que les deux paraboloïdes sont identiques, en d'autres termes, qu'ils sont l'un et l'autre deux positions particulières de la même surface que l'on suppose avoir tourné autour de l'axe $A_2$.

Or, pour que ce qui vient d'être dit ait lieu, il suffit que les angles $\widehat{b_1'^h . A_1^h . y'^h}$ et $\widehat{b_2 . A_2 . y}$ soient égaux ; et c'est ce qui a lieu en effet, car : 1° l'angle $\widehat{b_1'^h A_1^h y'^h}$ est égal à l'angle $\widehat{b_1'^h . A_1^h . y'^h}$, puisque ces deux angles ont leurs sommets sur la même circonférence $D'^h$ et qu'ils sont sous-tendus par le même arc $b_1'^h y'^h$, et 2° l'angle $\widehat{b_2 . A_2^h . y}$ est aussi égal à l'angle $\widehat{b_1'^h . A_1^h . y'^h}$ par les mêmes raisons.

Tout ce qui précède nous démontre qu'il est possible de transmettre le mouvement de rotation entre deux axes $A_1$ et $A''$ non situés dans un même plan, par

des surfaces analogues à celles employées pour transmettre le mouvement de rotation entre deux axes A′ et A qui se coupent. Et en vertu des proportions (1) et (2) établies ci-dessus, on voit que les axes dans les deux systèmes d'engrenages que nous venons de construire, systèmes qui sont la transformation l'un de l'autre, auraient des vitesses qui seraient dans un rapport constant et égal à $\frac{v}{v'}$ (*).

Ce qui précède nous conduit sans peine à voir comment on peut transformer un engrenage *cylindrique* en un engrenage *hyperboloïdique*; et en effet :

Concevons deux axes parallèles A et A′ perpendiculaires à un plan P et perçant ce plan, le premier en un point $o$ et le second en un point $o'$.

Concevons la droite $oo'$ dans le plan P, et sur cette droite un point $m$ tel que l'on aura : $\frac{o'm}{om} = \frac{v}{v'}$; $v$ étant la vitesse de rotation de l'axe A et $v'$ celle de l'axe A′.

Traçons dans le plan P deux cercles, l'un C ayant son centre au point $o$ et pour rayon $\overline{om}$, et l'autre C′ ayant son centre au point $o'$ et pour rayon $\overline{o'm}$; traçons dans ce même plan P et sur $\overline{o'm}$ comme diamètre un cercle D.

Le cercle D roulant extérieurement au cercle C, le point $m$ engendrera une épicycloïde *plane* $\delta$ et le même cercle D roulant intérieurement sur le cercle C′, le même point $m$ engendrera le diamètre $\overline{mo'}$ que je désigne par $d$.

Et si l'on imagine un cylindre $\Delta$ ayant la courbe $\delta$ pour section droite et un plan Z passant par la droite $d$ et l'axe A′, le cylindre $\Delta$ conduira uniformément le plan Z; on aura ainsi construit un engrenage *cylindrique* à dent épicycloïdale et à *flanc*.

Pour transformer cet engrenage *cylindrique* en un engrenage *hyperboloïdique* qui soit son analogue parmi les engrenages que l'on peut construire et aptes à transmettre uniformément le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan, il suffit d'employer et de réaliser les considérations géométriques suivantes :

Concevons par le point $m$ une droite K perpendiculaire au plan P; et trois cylindres $\Sigma$, $\Sigma'$ et Q ayant pour sections droites respectives les cercles C, C′ et D.

Ces trois cylindres de révolution seront tangents l'un à l'autre suivant la droite K.

Faisons tourner l'axe A′ autour de la droite $oo'$ pour le placer en $A'_1$.

(*) Dans l'ouvrage que j'ai publié en 1842, et qui a pour titre *Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes situés ou non dans un même plan*, je n'ai point donné la transformation, dont je viens de parler, d'un engrenage *conique* ou *cylindrique* en un engrenage *hyperboloïdique*.



Faisons tourner l'axe A autour de la droite $oo'$ pour le placer en $A_1$.

Les deux droites $A_1'$ et $A_1$ ayant pour plus courte distance la droite $oo'$, et de plus ces deux droites étant telles qu'en faisant mouvoir sur l'une et l'autre et parallèlement au plan P une droite G, cette droite G s'appuie en toutes ses positions sur la droite K et engendre un *paraboloïde* ou plan gauche $Z_1$.

Si, par les droites $A_1'$ et K, on fait passer deux plans rectangulaires entre eux, ils se couperont suivant une droite I qui appartiendra à un hyperboloïde à une nappe $R_1$, dont les plans des sections circulaires seront respectivement perpendiculaires aux droites K et $A_1'$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus.

Cela dit :

Imaginons un hyperboloïde à une nappe et de révolution R engendré par la droite K tournant autour de l'axe $A_1$, si par un point $x$ de la droite K on mène un plan P perpendiculaire à l'axe $A_1$, ce plan coupera l'hyperboloïde R suivant un cercle $C_1$, et si par ce même point $x$ on mène un plan parallèle au plan $P_1$ ce plan coupera l'hyperboloïde $R_1$ suivant un cercle $D_1$; et ce cercle $D_1$ roulant *angulairement* sur le cercle $C_1$ son point $x$ engendrera une *épicycloïde annulaire* $\gamma$.

Si, pour les divers points $x'$, $x''$,..... etc., de la droite K, nous exécutons des constructions semblables à la précédente, nous obtiendrons une suite d'*épicycloïdes annulaires* $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$,.... etc., qui formeront une surface *réglée* et *épicycloïdale* $\Delta$, qui se mettra en contact avec le paraboloïde $Z_1$ par une de ses génératrices droites.

Il est évident que nous venons de construire un engrenage *hyperboloïdique*, en partant de l'engrenage *cylindrique*, qui est identiquement le même que celui que nous avions construit précédemment en partant de l'engrenage *conique*.

Ainsi, il est démontré que l'on peut transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes non situés dans un même plan, au moyen de dents terminées, pour l'une des roues par une surface *épicycloïdale* et *réglée*, et pour l'autre roue par une surface *paraboloïde hyperbolique*.

Et comme pour toute surface gauche ou réglée il suffit de connaître trois *directrices courbes*, il nous suffira, pour construire la surface épicycloïdale gauche, de déterminer trois *épicycloïdes annulaires* $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, et de faire mouvoir une droite sur ces trois courbes directrices.

D'après ce qui précède, il sera facile d'exécuter l'*épure* d'un engrenage *hyperboloïque* à *flanc gauche*, nouvel engrenage dont j'ai oublié de parler dans mon *Traité sur les engrenages*, lorsque j'ai donné plusieurs de ceux au moyen desquels on pouvait transmettre, et utilement dans la *pratique*, le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans un même plan.

## § III.

*De l'emploi d'un cercle roulant angulairement sur un autre cercle, dans la construction des chemins de fer.*

PREMIER SYSTÈME.

Concevons deux cercles horizontaux et concentriques C et $C_1$ (*fig.* 77), et une droite $sm_1$ ne passant pas par le centre $o$ des deux cercles. On peut se proposer la question suivante :

*Étant donné un cône de révolution Δ dont le demi-angle au sommet est égal à α, placer ce cône de manière à ce qu'il touche le plan des deux cercles* C *et* $C_1$, *par une génératrice droite dirigée suivant la ligne* $sm_1$, *et de manière à ce que les deux cercles* mq *et* $mq_1$ *de ce cône Δ, qui touchent angulairement les cercles* C *et* $C_1$ *en les points* m *et* $m_1$, *aient leurs rayons proportionnels à ceux de ces mêmes cercles* C *et* $C_1$.

*Solution*. On mènera la droite $mp$ perpendiculaire à $sm_1$ et égale au rayon $\rho$ du cercle C; on mènera la droite $m_1p_1$ perpendiculaire à $sm_1$ et égale au rayon $\rho_1$ du cercle $C_1$; on unira les points $p$ et $p_1$ par une droite qui coupera la droite donnée de position $sm_1$, en un point $s$, qui sera la position que le sommet du cône Δ devra occuper sur la droite $sm_1$.

Et en effet, les triangles $smq$ et $smp$, $sm_1q_1$ et $sm_1p_1$ seront semblables et l'on aura :

$$mq : m_1q_1 :: \rho : \rho_1.$$

Dès lors, en supposant que le cercle $mq$ roule angulairement sur le cercle C, l'angle que le plan du cercle $mq$ du cône Δ fait avec la tangente en $m$ au cercle C restant constant, dès lors, dis-je, le cercle $m_1q_1$ du cône Δ roulera aussi angulairement sur le cercle $C_1$, l'angle que son plan fait avec la tangente en $m_1$ au cercle $C_1$ restant aussi constant.

Si donc, on suppose que l'axe commun des deux cercles C et $C_1$ est fixe; le plan des deux cercles C et $C_1$ pouvant librement tourner autour de cet axe; si l'on suppose aussi que l'axe du cône Δ est fixe, le cône Δ pouvant tourner librement autour de son axe; en imprimant au cône Δ un mouvement de rotation autour de son axe, ce cône fera tourner les deux cercles; et les couples de cercles C et $mq$, $C_1$ et $m_1q_1$ rouleront *angulairement* l'un sur l'autre.

Mais si le plan des cercles C et $C_1$ est fixe, et que dès lors le cône Δ doive

non-seulement tourner autour de son axe, mais encore autour de celui des cercles C et $C_,$, le sommet $s$ de ce cône $\Delta$ devant parcourir, dès lors, un cercle B concentrique aux cercles C et $C_,$; un pareil mouvement circulaire du cône $\Delta$ ne pourra avoir lieu qu'au moyen d'un mécanisme qui forcera le sommet $s$ à parcourir le cercle B, et qui forcera en même temps la droite $sm_,$ à couper, sous un angle constant, le cercle C ou le cercle $C_,$.

Le mécanisme le plus simple que l'on puisse employer est évidemment le suivant :

Plaçons un second cône $\Delta'$ (*fig.* 77) identique au cône $\Delta$ de l'autre côté de la droite $oa_,$, menée par le centre $o$ et parallèlement à la droite $sm_,$, et de manière à ce que les sommets $s$ et $s'$ des deux cônes $\Delta$ et $\Delta'$, soient sur une perpendiculaire à la droite $oa_,$ et à égale distance de cette droite.

En supposant que les axes A et A′ des cônes $\Delta$ et $\Delta'$ sont reliés l'un à l'autre d'une manière invariable, si l'on pousse le système de ces deux cônes sur le plan des deux cercles C et $C_,$, les cercles $mq$ et $mq'$ rouleront angulairement sur le cercle C et aussi les cercles $m_,q_,$ et $m'_,q'_,$ rouleront angulairement sur le cercle $C_,$, et ce mouvement de rotation s'opérera *géométriquement*, sans que les axes A et A′ changent de distance entre eux, *en d'autres termes*, le rectangle $mm'm_,m'_,$, formé par les quatre points en lesquels les cercles C et $C_,$ sont touchés angulairement par les cercles $mq$, $m'q'$, $m_,q_,$, $m'_,q'_,$ des cônes $\Delta$ et $\Delta'$, ne changera pas de forme pendant le mouvement de rotation du double système conique, sur le plan des cercles C et $C_,$.

Nous venons de dire que le mouvement de rotation s'opérait *géométriquement*, et cela, quelle que fût la distance $mm'$ entre les axes parallèles A et A′ des cônes $\Delta$ et $\Delta'$, mais si l'on considérait le problème sous le point de vue mécanique, alors, cette distance $mm'$ des axes A et A′ ne serait plus arbitraire.

Examinons le problème sous le point vue mécanique.

Le système conique sera animé d'une vitesse V; comme il tourne circulairement, la force centrifuge se trouve développée à chaque instant du mouvement. Désignons cette force par F et par $r$ le rayon du cercle parcouru par le centre de gravité du système conique, et supposons que le centre de gravité se projette sur le plan des cercles C et $C_,$ au milieu du rectangle $mm'$, $m_,m'_,$; désignons par $2d$ la distance $mm'$ entre les axes A et A′, et par $l$ la distance entre les points $m$ et $m_,$, $m'$ et $m'_,$.

Le cercle $mq$ en roulant angulairement sur le cercle C développera un frottement de *roulement angulaire*, désignons cette résistance par $f$, et par $f_,$ celle donnée par le cercle $m_,q_,$ roulant angulairement sur le cercle $C_,$.

Les frottements développés en $m'$ par le cercle $m'q'$ roulant sur le cercle C,

et en $m'_1$ par le cercle $m'_1 q'_1$ roulant sur le cercle $C_1$, auront respectivement les mêmes valeurs que ceux développés en $m$ et $m_1$.

Ces frottements seront dirigés suivant les tangentes en $m$ et $m'$ au cercle $C$, et suivant les tangentes en $m_1$ et $m'_1$ au cercle $C_1$.

Les tangentes en $m$ et $m'$ se couperont en un point $y$ (*fig.* 78), sur la droite $oa_1$ et les tangentes en $m_1$ et $m'_1$ se couperont en un point $y_1$ située sur la même droite $oa_1$.

Et comme les frottements en $m$ et $m'$ sont égaux, leurs résultantes K sera perpendiculaire à $oa_1$, de même la résultante $K_1$ des frottements en $m_1$ et $m'_1$ sera perpendiculaire à $oa_1$.

Cela posé :

Calculons les forces F, K et $K_1$.

Désignons par $6$ l'angle que le rayon $om$ (*fig.* 78) fait avec la droite $oa_1$, et par $6_1$ l'angle que le rayon $om_1$ fait avec cette même droite.

On aura :

$$K = 2.f.\cos 6$$

et

$$K_1 = 2.f.\cos 6_1.$$

Et comme : $\cos 6 = \frac{oi}{om}$ et que : $oi = \sqrt{\overline{om}^2 + \overline{mi}^2}$, on aura :

$$K = \frac{2.f}{\rho}.\sqrt{\rho^2 + \frac{d^2}{4}} = \frac{f}{\rho}\sqrt{4\rho^2 + d^2} \qquad (1)$$

$$K_1 = \frac{2f_1}{\rho_1}\sqrt{\rho_1^2 + \frac{d^2}{4}} = \frac{f_1}{\rho_1}\sqrt{4\rho_1^2 + d^2} \qquad (2)$$

Calculons la distance au centre $o$ des points $y$ et $y_1$ points d'application des résistances K et $K_1$, nous aurons :

$$oy = \frac{om}{\cos 6} = f.\sqrt{4\rho^2 + d^2}$$

$$oy_1 = \frac{om'}{\cos 6_1} = f_1.\sqrt{4\rho_1^2 + d^2}$$

Calculons la distance au centre $o$ du centre $b$ du rectangle $mm_1m'm'_1$. Ce

point $b$ étant la projection du centre de gravité du système, on aura :

$$ob = oi + ib = \tfrac{1}{2}\left(l + \sqrt{4\rho^2 + d^2}\right) \qquad (3)$$

ou

$$ob = oi_1 - i_1b = \tfrac{1}{2}\left(l - \sqrt{4\rho_1^2 + d^2}\right) \qquad (3\,bis)$$

Calculons $yy_1$ ; on aura

$$yy_1 = oy_1 - oy = f_1\sqrt{4\rho_1^2 + d^2} - f\sqrt{4\rho^2 + d^2}$$

Cherchons maintenant la résultante Z des forces parallèles K et $K_1$ et son point $z$ d'application, nous aurons :

$$Z = K + K_1 = \frac{f}{\rho}\sqrt{4\rho^2 + d^2} + \frac{f_1}{\rho_1}\sqrt{4\rho_1^2 + d^2} \qquad (4)$$

et

$$yz = \frac{K_1 . \overline{yy_1}}{Z} = \frac{\frac{f_1}{\rho_1} . \sqrt{4\rho_1^2 + d^2} . \left(f_1\sqrt{4\rho_1^2 + d^2} - f\sqrt{4\rho^2 + d^2}\right)}{\frac{f}{\rho}\sqrt{4\rho^2 + d^2} + \frac{f_1}{\rho_1}\sqrt{4\rho_1^2 + d^2}} \qquad (4\,bis)$$

Et par suite

$$oz = oy + yz = f\sqrt{4\rho^2 + d^2} + \frac{\frac{f_1}{\rho_1}\sqrt{4\rho_1^2 + d^2}\left(f_1\sqrt{4\rho_1^2 + d^2} - f\sqrt{4\rho^2 + d^2}\right)}{\frac{f}{\rho}\sqrt{4\rho^2 + d^2} + \frac{f_1}{\rho_1}\sqrt{4\rho_1^2 + d^2}} \qquad (5)$$

On aura aussi : $F = \frac{PV^2}{g.\overline{ob}}$, le poids du système étant représenté par P; la vitesse par V, et $\overline{ob}$ étant le rayon du cercle décrit par le centre de gravité, rayon que nous représenterons par $h$.

Cela posé :

En vertu de la force centrifuge le système conique est chassé sur le plan des cercles C et $C_1$, et dans la direction du rayon de ces cercles, et il se développe en chacun des quatre points $m, m', m_1, m'$, un frottement de glissement qui annulera la force centrifuge lorsque l'on aura :

$$V = \sqrt{n.g.h} \qquad (6)$$

$n$ étant le coefficient du frottement de glissement (coefficient dont la valeur dépend de la nature des matériaux), et $g$ étant égal à $9^m,808$ ($g$ est ce que l'on est convenu d'appeler la *gravité*).

On pourra donc calculer $\overline{ob}$, ou le rayon $h$ du cercle que doit parcourir le

centre de gravité, pour que sous la vitesse donné V on puisse laisser de côté la force centrifuge (en d'autres termes, ne pas y avoir égard), puisqu'elle sera, à chaque instant du mouvement circulaire, détruite par le frottement de glissement qu'elle tend à faire naître parallèlement à la droite *ob*.

On connaîtra donc $\rho$ en fonction de $\overline{ob}$, de $l$ et de $d$, au moyen de l'équation (3) et $\rho_1$ aussi en fonction de $\overline{ob}$, de $l$ et de $d$, au moyen de l'équation (3 *bis*).

Maintenant, pour que le système puisse tourner en cercle, il faut que la résistance Z ne passe pas par le centre de gravité du système, car alors les cônes chemineraient en ligne droite. Il faut donc que $\overline{oz}$ ne soit pas égal à $\overline{ob}$; de plus pour que le système tourne autour du point $o$, il faut que l'on ait $\overline{oz} < \overline{ob}$; et encore, il faut que pendant que le système tournera autour du centre $o$ d'un angle $\gamma$, la force Z fasse tourner de ce même angle $\gamma$ le système autour de son centre de gravité $b$. On devra donc avoir, en désignant par T la force de traction appliquée au centre de gravité $b$ et agissant perpendiculairement à $\overline{ob}$,

$$\overline{ob}.\mathrm{T}=\overline{bz}.\mathrm{Z} \qquad (7)$$

Or *ob* est connu par l'équation (6), T est donné *à priori*, Z est donné par l'équation (4), et $bz$ sera connu au moyen des équations (3) et (5).

L'équation (7) nous donnera dès lors une relation entre : $f, f_1, \rho_1, \rho_1, l$ et $d$, d'où l'on tirera $d$.

Mais il faut connaître $f$ et $f_1$ et nous ignorons encore la valeur des coefficients des frottements de *roulement angulaire*, pour pouvoir appliquer cette théorie à la pratique des chemins de fer (*).

Toutefois ce qui précède démontre que tel doit être le système pour que le frottement soit le minimum qu'il puisse être, c'est-à-dire un frottement de *roulement angulaire*.

### DEUXIÈME SYSTÈME.

Imaginons deux cercles horizontaux et concentriques C et $C_1$ (*fig.* 79), ces deux cercles étant dans un même plan P.

(*) Des expériences tendant à donner le coefficient du *roulement angulaire* seraient très utiles, car ces sortes de frottement se présentent plus souvent qu'on ne le croit dans la pratique des arts industriels.



Concevons deux cônes égaux et de révolution B et $B_1$ ayant même axe A, et ayant une même base circulaire; le cône B ayant son sommet au point $u$ ($u^h$, $u^v$), et le cône $B_1$ ayant son sommet au point $u_1$ ($u_1^h$, $u_1^v$); plaçons ces deux cônes sur les cercles C et $C_1$ de manière que le cône B touche le cercle C en un point $m$ ($m^h$, $m^v$) et que le cône $B_1$ touche le cercle $C_1$ en un point $m_1$ ($m_1^h$, $m_1^v$), la droite $mm_1$ ne passant pas, d'ailleurs, par le centre $o$ des deux cercles C et $C_1$.

Cela posé, résolvons la question suivante :

*Sous quel angle doit-on incliner l'axe* A *pour que les cercles par lesquels les cônes* B *et* $B_1$ *(se mouvant simultanément sur les cercles* C *et* $C_1$*) aient des rayons proportionnels à ceux de ces mêmes cercles* C *et* $C_1$*?*

Faisons passer par l'axe A, supposé d'abord horizontal, un plan vertical Q, ce plan coupera le cône B suivant une génératrice $vk$ et le cône $B_1$ suivant une génératrice $v_1k$, ces deux droites comprendront entre elles un certain angle $\alpha$.

En faisant mouvoir l'axe A du double cône dans le plan Q, le point $k$ décrira un segment capable de l'angle $\alpha$, puisqu'il faut que les arètes $vk$ et $x_1k$ passent toujours par les points $m^v$ et $m_1^v$. Décrivons le cercle D dont le centre sera en $o$, ce cercle D étant celui que le point $k$ décrit.

Abaissons du point $k$ une perpendiculaire sur l'axe horizontal A, on aura le point $l$; et en inclinant l'axe A, le point $l$ décrira un cercle $D_1$ ayant le point $o$ pour centre et $ol$ pour rayon; et en toutes ses positions l'axe A sera tangent au cercle $D_1$.

Cela posé :

Menons par les points $m$ et $m_1$ et dans le plan P des cercles C et $C_1$ des perpendiculaires à la droite $mm_1$, et prenons ces perpendiculaires respectivement égales aux rayons $\rho$ et $\rho_1$ des cercles C et $C_1$, nous construirons le point $s$ de la même manière que précédemment dans le *premier système*.

Si par ce point $s$ nous menons une droite A′ tangente au cercle $D_1$, nous aurons la position demandée de l'axe A.

Et en effet :

Si des points $m^v$ et $m_1^v$ nous abaissons des perpendiculaires sur A′, nous aurons les triangles $s^vm^vz$, $s^hm^hp$ et $s^vm_1^vz_1$, $s^hm_1^hp_1$ qui seront semblables.

En cette position, le double cône roulera angulairement sur les cercles C et $C_1$, le cercle du rayon $mz$ roulant sur le cercle C et le cercle du rayon $m_1z$ roulant sur le cercle $C_1$.

Nous pourrons ensuite concevoir un second double cône; et ces deux doubles cônes symétriquement placés par rapport à un plan vertical passant par le centre $o$ (les axes des deux systèmes coniques étant parallèles à ce plan) rouleront librement et angulairement sur les deux cercles C et $C_1$.

Et les calculs que nous avons faits pour le *premier système* se reproduiront pour

le *deuxième système*, car il est évident que les deux doubles cônes peuvent être considérés comme deux cônes simples; car le double premier cône peut être évidemment considéré comme un cône simple ayant son sommet en $s$, et pour base le cercle du rayon $ms$ ou le cercle du rayon $m_1s$.

Toutefois, il faut remarquer que l'on ne pourra plus calculer le rayon $\overline{ob}$ du cercle décrit par le centre de gravité sous la vitesse V par la formule (6). On devra le calculer par une nouvelle formule que nous allons établir ainsi qu'il suit :

Le système du double cône pourra être remplacé par une sphère Σ, ayant pour grand cercle le cercle D sur lequel se meut le point $k$; et l'on pourra toujours supposer (*fig.* 80) que le centre de gravité est projeté en $b$ milieu du rectangle formé par les quatre points d'appui, $m$, $m'$, $m_1$, $m_1'$ du système, sur les cercle C et $C_1$.

Dès lors, la force centrifuge agissant sur le centre de gravité $e$ tendra à faire tourner la sphère Σ autour de son centre $o'$; et cette sphère frottera sur les points $m$ et $m_1$. En chacun de ces points, il se développera un frottement de glissement sous la pression N dirigée suivant le rayon de la sphère Σ passant le point considéré.

Cette pression N sera facile à calculer en fonction de l'angle $\vartheta$ compris entre les deux rayons $o'm'$ et $o'm_1'$, car le poids P agira verticalement et sa direction passera par le centre de gravité $e$ et par suite par le centre $o'$ de la sphère Σ en vertu de l'hypothèse faite, savoir : que le centre de gravité se projette au milieu du rectangle $mm'm_1m_1'$.

Il faudra donc, en désignant par F la force centrifuge, par $r$ la distance $o'e$, par R le rayon de la sphère Σ, par $n$ le coefficient de frottement, poser l'équation :

$$2{,}n\text{N}.\text{R} = \text{F}.r$$

Et comme

$$\text{F} = \frac{\text{V}.\text{P}^2}{g.h}$$

on aura :

$$2n.\text{N}.\text{R} = \frac{r.\text{P}.\text{V}^2}{g.h}$$

pour l'équation demandée et qui, dans le *deuxième système*, doit remplacer l'équation : $\text{V} = \sqrt{n.g.h}$ employée dans le *premier système*.

Il est évident que la force centrifuge ne pouvant faire tourner la sphère Σ autour de son centre, contrebalancée qu'elle sera par les frottements développés en les points d'appui $m$ et $m_1$, le système pourra être considéré pendant son mouvement de rotation comme si cette force centrifuge n'existait pas.

Nous n'entrerons pas dans plus de détails à ce sujet, n'ayant point en vue ici de résoudre complétement le problème *mécanique*, mais ayant seulement voulu montrer quel parti on pourrait tirer des dispositions *géométriques* qui conduisent à un système de cercles roulant *angulairement* sur un autre système circulaire.

## § IV.

Comme en examinant les propriétés des épicycloïdes annulaires, nous avons eu l'occasion de nous occuper de l'hyperboloïde à une nappe, nous pensons qu'il ne sera pas hors de propos de donner la solution de divers problèmes les uns directement rélatifs à l'hyperboloïde, les autres où l'on est conduit pour les résoudre à employer l'hyperboloïde.

Problème 1. *La surface engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites, non situées deux à deux dans un même plan, est un hyperboloïde à une nappe.*

Hachette est le premier qui a pensé à construire sur les trois droites données A, B, C (*fig.* 81) un parallélipipède, et de considérer le centre $o$ de cé parallélipipède comme l'origine des coordonnées et les trois droites $oA_1$, $oB_1$, $oC_1$, respectivement parallèles aux trois droites données comme axes de coordonnées obliques. Cette considération lui a permis de parvenir avec facilité à une équation simple de la surface engendrée par une droite se mouvant sur les trois droites données A, B, C (*).

Profitant de la construction géométrique du parallélipipède donnée par Hachette, et remarquant que les trois droites A', B', C' sont trois positions de la droite génératrice, nous voyons que les plans (A, A') et (B, B') se coupent suivant une diagonale $bb'$ du parallélipipède, et que dès lors le centre $o$ est au milieu de $bb'$.

Si donc nous coupons le système formé par les deux plans (A, A') et (B, B') et par les plans (A, B'), ($A_1$, B) et (A', B) (*fig.* 82) par un plan quelconque X, mais parallèle à la droite $bb'$, nous obtiendrons un parallélogramme $pq'qp'$, et la droite

(*) On doit faire remarquer que c'est par l'*analyse* de Descartes que Hachette a démontré que la surface engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites est un hyperboloïde à une nappe, et que c'est au moyen de *proportions* que M. Gascheaux a démontré le même théorème ; mais une solution donnée par les méthodes de la *géométrie descriptive*, et qui fût dans l'esprit de cette science, n'existait pas encore lorsque j'ai développé dans mes *cours*, et il y a plusieurs années, la solution suivante.

$rr'$ sera parallèle aux droites $pq'$ et $p'q$, et de plus les points $r$ et $r'$ seront respectivement les milieux des droites $pp'$ et $qq'$. Ce même plan X ne pourra pas être parallèle à la droite $C_1$, puisqu'il est assujetti à être parallèle à la diagonale $bb'$; il coupera dès lors la droite $C_1$ en un point $m$ qui ne pourra avoir que deux positions.

Ce point $m$ pourra : 1° être situé entre les deux droites $rp'$ et $qr'$ (*fig.* 83), ou 2° être situé en dehors de ces droites (*fig.* 84) : dans le premier cas on pourra construire une ellipse E ayant $rr'$ pour diamètre et passant par le point $m$; dans le deuxième cas on pourra construire une hyperbole (H, H') ayant $rr'$ pour diamètre et l'une de ses branches H' passant par le point $m$.

Il est évident que l'on pourra toujours diriger le plan sécant X de manière à ce que le point $m$ soit situé comme (*fig.* 83) entre les deux droites $rp'$ et $r'q$.

Cela posé :

Remarquons que le système circulaire représenté (*fig.* 73) peut facilement être transformé en un système elliptique ; car il suffit de faire passer, par chaque droite un plan vertical et par chaque cercle C et D un cylindre de révolution ; et de couper tout le système, ainsi obtenu dans l'espace, par un plan quelconque ; les cylindres seront coupés suivant des ellipses semblables, semblablement placées et concentriques, et les plans parallèles entre eux suivant des droites parallèles entre elles.

Si donc (*fig.* 85) ayant le parallélogramme $pqp'q'$ et l'ellipse E qui a $rr'$ pour diamètre, on mène les droites $rx$ et $r'x$ se coupant en un point $x$ de l'ellipse E; puis si l'on mène par le point $p'$ la droite $p'x_1$ parallèle à $rx$ et par le point $q'$ la droite $q'x_1$ parallèle à $r'x$, les droites $p'x_1$ et $q'x_1$ se couperont en un point $x_1$ qui appartiendra à une ellipse $E_1$ passant par les quatre sommets du parallélogramme et qui sera semblable et semblablement placée et concentrique par rapport à l'ellipse E.

Cela dit :

Nous pourrons considérer (*fig.* 82) un cône ayant son sommet au point $o$ et ayant pour base l'ellipse E, et faire passer par la droite A, un plan P et par la droite $B_1$ un plan Q, ces plans étant tels qu'ils se coupent suivant une génératrice I du cône ($o$, E).

Nous ferons ensuite passer par la droite A' un plan $P_1$ parallèle à P et par la droite B' un plan $Q_1$ parallèle à Q; les deux plans $P_1$ et $Q_1$ se couperont suivant une droite G parallèle à I.

Nous pourrons de même faire passer par la droite A un plan $Q_1$ parallèle à Q et par la droite B un plan $P_1$ parallèle à P; les deux plans $P_1$ et $Q_1$ se couperont suivant une droite H parallèle à I.

Et comme (*fig.* 85) les trois points $x_1$, $x$, $x_1$ sont en ligne droite, et que cette droite est tangente en $x$ à l'ellipse E, il s'ensuit que les trois droites parallèles I, $G_1$, H seront dans un même plan T passant par le point $o$ sommet du cône $(o, E)$ et tangent à ce cône suivant la génératrice I.

Nous pourrions reproduire ici, et identiquement, ce que nous avons dit lorsque le cône avait pour directrice un cercle; il est donc bien démontré, sans avoir besoin de recourir à *l'analyse*, et en ne se servant que des méthodes de la *géométrie descriptive*, que la surface engendrée par une droite se mouvant sur trois droites données est :

1° Une surface doublement réglée;

2° Qu'elle a un cône asymptote;

3° Qu'un plan la coupe suivant une section conique;

4° Que tout plan coupe cette surface réglée et son cône asymptote suivant deux sections coniques semblables, semblablement placées et concentriques; etc., etc.

La surface que l'on obtient est donc un *hyperboloïde à une nappe*.

On peut *généraliser* la construction que nous venons de donner, et de la manière suivante (*).

Concevons un cône Σ ayant un point $s$ pour sommet et pour base une section conique E (ellipse, parabole ou hyperbole).

Prenons deux génératrices droites quelconques G et G′ sur ce cône Σ; construisons les deux plans T et T′ tangents à ce cône Σ, l'un suivant G, l'autre suivant G′.

Ces deux plans T et T′ se couperont suivant une droite D passant par le sommet $s$.

Prenons sur la droite D deux points $p$ et $p'$ équidistants du point $s$, l'un à droite et l'autre à gauche de ce point $s$.

Menons par le point $p$ une droite A parallèle à G, et par le point $p'$ une droite A′ parallèle à G′.

Cela fait, faisons passer par G un plan P et par G′ un plan P′, ces deux plans se coupant suivant une droite I génératrice droite du cône Σ.

Faisons passer par la droite A un plan Q parallèle à P et par la droite A′ un plan Q′ parallèle à P′; ces deux plans Q et Q′ se couperont suivant une droite K parallèle à I, et toutes les droites K formeront un *hyperboloïde à une nappe* ayant le cône Σ pour *cône asymptote*.

---

(*) *Voyez* les notes sur les surfaces gauches que j'ai publiées dans le Bulletin de la Société philomatique, séances des 1er décembre 1832 et 2 mars, 22 juin, 10 août 1833.

On peut, d'après ce qui précède, énoncer *le théorème* suivant :

Étant données une section conique $\varepsilon$ (ellipse, parabole ou hyperbole) et deux tangentes $\theta$ et $\theta_1$ à cette courbe, ces tangentes se coupant en un point $s$ et touchant la courbe $\varepsilon$, savoir : $\theta$ en un point $x$ et $\theta_1$ en un point $x_1$; si sur $\theta$ on prend deux points $y$ et $y_1$ équidistants du point $x$ et que l'on mène par chacun d'eux une parallèle à la corde $xx_1$, savoir : D par le point $y$ et $D_1$ par le point $y_1$; la droite D coupera $\theta_1$ en un point $z$ et la droite $D_1$ coupera $\theta_1$ en un point $z_1$.

Si par un point arbitraire $m$ de la section conique $\varepsilon$ on mène les droites $mx$ et $mx_1$, et que par le point $y$ on mène une droite Y parallèle à $mx$ et par le point $y_1$ une droite $Y_1$ parallèle à $mx_1$, ces droites Y et $Y_1$ se couperont en un point $n$ qui appartiendra à une section conique $\varepsilon_1$ qui sera semblable, semblablement placée et concentrique à la courbe donnée $\varepsilon$; et la courbe $\varepsilon_1$ passera par les quatre points $y$, $y_1$, $z$ et $z_1$.

Pour démontrer *géométriquement*, au moyen des méthodes de la *géométrie descriptive*, que la surface engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites non parallèles à un même plan, est un hyperboloïde à une nappe, nous avons considéré le parallélipipède construit sur les trois droites données, et nous nous sommes appuyé sur ce que le centre de ce parallélipipède était l'intersection des trois plans diagonaux de ce solide; ces plans diagonaux étant déterminés respectivement par les droites parallèles A et A', B et B', C et C'. Mais, sans employer le parallélipipède, on peut démontrer directement que si l'on a trois droites A, B et C et que l'on construise trois nouvelles droites, savoir :

A' parallèle à A et s'appuyant sur B et C,
B' parallèle à B et s'appuyant sur A et C,
C' parallèle à C et s'appuyant sur A et B.

Les plans P déterminé par A et A',
Q . . . . . . . . B et B',
R . . . . . . . . C et C',

se couperont en un point $o$ qui sera équidistant : 1° des droites A et A'; 2° des droites B et B'; et 3° des droites C et C'.

Nous pourrons toujours prendre les plans de projection de manière à ce que (*fig.* 86) la droite A soit perpendiculaire au plan horizontal et que la droite B soit parallèle au plan vertical.

La droite A' parallèle à A et s'appuyant sur B et C aura donc pour projection horizontale le point $A'^h$ en lequel se coupent $B^h$ et $C^h$.

La droite B' parallèle à B s'appuyant sur A et C aura donc sa projection $B'^h$ parallèle à $B^h$ et passant par le point $A^h$.

La droite $C'$ parallèle à $C$ et s'appuyant sur $A$ et $B$ aura donc sa projection horizontale $C'^h$ passant par le point $A^h$ et parallèle à $C^h$.

Dès lors, sur le plan horizontal les droites parallèles $B^h$ et $B'^h$; $C^h$ et $C'^h$ détermineront un parallélogramme $A^h$, $A'^h$, $z^h$, $z'^h$; et les points $z^h$ et $z'^h$ seront les projections horizontales des points $z$ et $z'$ en lesquels se coupent les droites $B$, et $C'$, $B'$ et $C$.

Le plan $P$ passant par les droites $A$ et $A'$ sera vertical, et il sera coupé par le plan $Q$ passant par les droites $B$ et $B'$ suivant une droite $I$ qui se projettera suivant la droite $H^v$ qui unit les points $A^h$ et $A'^h$.

Ce même plan $P$ sera coupé par le plan $R$ passant par les droites $C$ et $C'$ suivant une droite $K$ qui se projettera suivant la même droite $H^v$.

Et les plans $Q$ et $R$ se couperont suivant une droite $L$ passant par les points $z$ et $z'$ et se projetant dès lors en la droite $L^h$ qui unit les points $z^h$ et $z'^h$.

Or, les droites $L$, $I$ et $K$ se couperont en un même point $o$ qui aura pour projection horizontale le point d'intersection des projections horizontales $L^h$, $I^h$ et $K^h$, c'est-à-dire le point $o^h$ centre du parallélogramme $A^h$, $A'^h$, $z^h$, $z'^h$.

Le point $o$ sera donc également distants des droites $A$ et $A'$, $B$ et $B'$, $C$ et $C'$.

Problème 2. *Couper un cône de révolution suivant une ellipse dont les axes soient dans un rapport donné.*

Soit donné un cône de révolution $\Delta$ (*fig.* 87) ayant son axe $A$ vertical et pour base le cercle $B$ et le sommet de ce cône étant au point $s$; on peut regarder ce cône comme le cône asymptote d'une infinité d'hyperboloïdes de révolution et à une nappe ayant tous pour axe l'axe $A$ et pour centre le point $s$.

Pour construire un de ces hyperboloïdes, il suffit de mener par le sommet $s$ une droite $I$ horizontale, ou, en d'autres termes, perpendiculaire à l'axe $A$; de mener par cet axe un plan méridien $M$ coupant le cône $\Delta$ suivant deux génératrices $G$ et $G_1$; de prendre sur la droite $I$ un point $m$ arbitraire, et de mener par ce point $m$ deux droites $K$ et $K_1$ respectivement parallèles aux droites $G$ et $G_1$ et qui en tournant autour de l'axe $A$ engendreront un hyperboloïde de révolution, toutes les positions de $K$ étant les génératrices du *premier système*, toutes les positions de $K_1$ étant les génératrices du *deuxième système* de cet hyperboloïde.

Concevons cet hyperboloïde construit.

Il est facile de couper un hyperboloïde à une nappe et de révolution par un plan suivant une ellipse dont les axes sont dans un rapport donné; et en effet :

Si par le centre $s$ de l'hyperboloïde on mène un plan coupant cette surface suivant une ellipse, le petit axe de cette ellipse sera toujours égal au rayon du cercle de gorge, quelle que soit la direction du plan sécant.

Il suffira donc d'incliner le plan sécant par rapport à l'axe A ou par rapport au plan du cercle de gorge, de manière à ce que le grand axe de la section elliptique soit au rayon du cercle de gorge dans le rapport voulu. Et il sera facile, le rapport entre les axes étant donné, de construire la longueur de ce grand axe; et en effet :

Ayant deux droites perpendiculaires entre elles (*fig.* 87) *ob* et *oa* dont le rapport est celui des axes de la section à chercher, on portera sur le petit côté *ob* une droite *op* égale au rayon *ms* du cercle de gorge, et en menant *pq* parallèle à *ba* on aura en *oq* la longueur du grand axe de l'ellipse suivant lequel le plan passant par le centre *s* de l'hyperboloïde doit couper cette surface.

Il suffira donc de décrire du centre *s* et avec un rayon égal à *oq* une sphère, laquelle coupera l'hyperboloïde suivant deux cercles ou *parallèles* $\delta$ et $\delta'$ égaux entre eux et équidistants du cercle de gorge.

Et tout plan tangent au cône $\Delta$, ayant le cercle ou *parallèle* $\delta$ pour base et le point *s* pour sommet coupera l'hyperboloïde suivant une ellipse dont les axes seront entre eux dans le rapport donné et égal à $\frac{ob}{oa}$; et tout plan parallèle à l'un de ces plans coupera le cône donné $\Delta$ suivant une ellipse dont les axes seront dans le même rapport (*).

Toutes les constructions graphiques sont exécutées sur la *fig.* 87, et, au moyen de la *notation adoptée*, il sera facile de lire sur l'*épure* les diverses *constructions graphiques* à exécuter successivement à mesure qu'on lira les raisonnements *géométriques* précédents.

Le problème que nous venons de résoudre peut être présenté sous un autre énoncé, savoir :

*Faire passer par une section conique* E *donnée par son tracé un cône de révolution dont l'angle au sommet soit égal à* $\alpha$.

La solution du problème ainsi énoncé est facile au moyen de la *focale* H de la section conique donné E.

Et en effet :

Ayant construit la courbe focale H de la section conique E, et se rappelant que la courbe H est une *ellipse* ou une *hyperbole*, si la courbe donnée E est une *hyperbole*

(*) Depuis environ quinze ans, je donne dans mes cours la solution de ce problème afin de montrer que certains problèmes relatifs au cône se résolvent plus facilement en remplaçant le cône par l'hyperboloïde, tout comme certains problèmes sur l'hyperboloïde se résolvent plus facilement en remplaçant l'hyperboloïde par son cône asymptote, ainsi qu'on l'a vu précédemment lorsqu'il s'est agi de démontrer que l'hyperboloïde à une nappe était coupé par un plan suivant une section conique.

ou une *ellipse*, on devra décrire sur le grand axe de l'ellipse E ou sur l'axe transverse de l'hyperbole E un segment capable de l'angle donné $\alpha$; ce segment coupera l'hyperbole focale H ou l'ellipse focale H en deux points qui seront les sommets de deux cônes de révolution satisfaisant à la question.

Toutefois, on doit remarquer que lorsque la section conique donnée E est une *ellipse*, la focale H étant une hyperbole, le problème est toujours possible, quelle que soit la grandeur de l'angle $\alpha$.

Mais lorsque la section conique E est une *hyperbole*, la focale H étant une ellipse, l'angle donné $\alpha$ ne doit pas être plus grand que l'angle compris entre les deux droites menées de l'extrémité de l'axe vertical de la focale H aux deux sommets de l'hyperbole E; ou, en d'autres termes, ne doit pas être plus grand que l'angle des deux asymptotes de cette courbe E.

Si la section conique donnée E est une parabole, la focale H est une parabole, et l'angle $\alpha$ peut être dans ce cas entièrement arbitraire, comme dans le cas où la section conique E était une ellipse (*).

PROBLÈME 3. *Par une section conique donnée par son tracé, faire passer un hyperboloïde à une nappe et de révolution.*

Étant donnée une section conique $\varepsilon$ (ellipse, parabole ou hyperbole), on sait que l'on peut faire passer par cette courbe une infinité de cônes de révolution, et que pour cela faire il suffit de construire la *focale* H de la courbe $\varepsilon$; et l'on sait que chacun des points de cette *focale* pourra être considéré comme le sommet d'un cône, qui ayant $\varepsilon$ pour base, sera de révolution.

Concevons donc la courbe $\varepsilon$ donnée et la focale H construite; prenons sur H un point $s$, nous aurons le cône de révolution $\Delta$ ayant $s$ pour sommet et $\varepsilon$ pour base.

Unissons le centre $o$ de la courbe $\varepsilon$ au point $s$, nous aurons une droite D.

Tout plan parallèle au plan de la courbe $\varepsilon$ coupera le cône $\Delta$ suivant une section conique $\varepsilon'$ semblable à la courbe $\varepsilon$ et ayant son centre $o'$ situé sur la droite D.

Nous pouvons considérer le cône $\Delta$ comme le cône asymptote d'une infinité d'hyperboloïdes à une nappe et de révolution ayant leur centre en $s$ et pour axe l'axe du cône $\Delta$, et l'on sait que cet axe sera une droite A tangente en $s$ à la focale H.

Menons un plan T tangent au cône $\Delta$ suivant une droite G, et traçons dans le

(*) Voyez mon *Cours de géométrie descriptive*, lithographié pour les élèves de l'École centrale des arts et manufactures.



plan T une droite K parallèle à G. La droite K, en tournant autour de l'axe A, engendrera une surface de révolution qui ne sera autre qu'un hyperboloïde à une nappe ayant le cône Δ pour cône asymptote.

La droite K percera le plan de la courbe $\varepsilon$ en un point $x$ qui sera hors de cette courbe; faisons glisser la droite K et la droite G le long de la droite D et parallèlement à elle-même, cette droite K prendra dans l'espace diverses positions K', K'',... lesquelles seront parallèles entre elles, et perceront le plan de la courbe $\varepsilon$ respectivement aux points $x'$, $x''$,...... et tous ces points seront sur une droite B, qui ne sera autre que l'intersection du plan de la courbe $\varepsilon$ et d'un plan P passant par la droite K et mené parallèlement à la droite D; ce plan P sera parallèle au plan qui contient G et D, donc la droite B sera parallèle à la droite $og$. Cette droite B coupera la courbe $\varepsilon$ en deux points ou lui sera tangente en un point ou ne la rencontrera pas.

Si par l'un des points de rencontre de la droite B et de la courbe $\varepsilon$, on mène une droite $K_1$ parallèle à K, et que l'on fasse tourner cette droite $K_1$ autour de l'axe A, elle engendrera un hyperboloïde de révolution qui sera coupé par le plan de la courbe $\varepsilon$ suivant cette courbe $\varepsilon$ elle-même; et cela doit être puisque des plans parallèles coupent une surface du second degré suivant des courbes semblables.

On voit donc que l'on pourra faire passer par la courbe $\varepsilon$ une infinité d'hyperboloïdes à une nappe et de révolution, ayant la droite D pour droite diamétrale commune, car l'on peut prendre pour point $x$ un point tellement placé sur H', trace du plan T, que la droite B parallèle à la droite $og$ coupe en deux points ou touche en un point la courbe $\varepsilon$.

Lorsque la droite B coupera la courbe $\varepsilon$ en deux points, c'est que l'on pourra construire deux hyperboloïdes ayant des cercles de gorge égaux, mais séparés, ou, en d'autres termes, situés respectivement dans deux plans parallèles, ces deux surfaces se pénétrant d'ailleurs suivant la courbe $\varepsilon$.

Lorsque la droite B touchera la courbe $\varepsilon$, c'est que les deux hyperboloïdes se réduiront à un seul.

Et lorsque la droite B ne rencontrera pas la courbe $\varepsilon$, c'est que pour le cône considéré et qui a son sommet au point $s$, on ne peut pas construire un hyperboloïde ayant pour rayon de son cercle de gorge la plus courte distance existant entre les droites G et K; la droite K sera trop éloignée de la droite G; il faudra dès lors rapprocher le point $x$ du point $g$, ou, en d'autres termes, prendre la droite K plus près de la droite G, pour que l'hyperboloïde puisse exister.

Sur l'*épure* (*fig.* 88), toutes les constructions sont exécutées, et au moyen de la *notation adoptée* il est facile de les lire.

Les divers hyperboloïdes de révolution qui passent par la section conique donnée $s$ (*fig.* 88) et qui ont pour cône asymptote un cône parallèle au cône $\Delta$, lequel a son sommet au point $s$ et pour axe la tangente A en ce point $s$ à la focale H, jouissent d'une propriété remarquable et que je vais faire connaître.

Concevons d'abord (*fig.* 89) un cône $\Delta$ de révolution dont l'axe A est vertical et ayant son sommet au point $s$ et ayant pour base le cercle B et dont le demi-angle au sommet soit représenté par $\alpha$; en faisant glisser ce cône $\Delta$ parallèlement à lui-même (son sommet se mouvant sur l'axe A) en transportant le sommet $s$ en $s'$, $os$ étant égal à $os'$, on aura un nouveau cône $\Delta'$ qui aura pour base sur le plan horizontal le même cercle B.

Ces deux cônes $\Delta$ et $\Delta'$ peuvent être considérées comme deux hyperboloïdes dont le rayon du cercle de gorge serait nul.

Par le cercle B nous pourrons faire passer un hyperboloïde $\Sigma_1$ ayant le cercle B pour cercle de gorge et dont la courbe méridienne sera une hyperbole dont les asymptotes comprendront entre elles un angle égal à $2\alpha$; dès lors le cône $\Delta$ ayant glissé parallèlement à lui-même (son sommet s'étant transporté en $o$, centre du cercle B) en la position $\Delta_1$, et en cette nouvelle position $\Delta_1$, ce cône sera asymptote à l'hyperboloïde $\Sigma_1$.

Si l'on conçoit une suite d'hyperboloïdes de révolution ayant l'axe A pour axe commun et ayant chacun pour cône asymptote un cône dont le demi-angle au sommet soit égal à $\alpha$ et passant tous par le cercle B, je dis que le *lieu* de tous leurs cercles de gorge sera un ellipsoïde de révolution dont l'équateur sera le cercle B et dont les sommets seront les points $s$ et $s'$.

Et en effet :

Désignant par R le rayon du cercle B base du cône $\Delta$, et par $h$ la hauteur du sommet $s$ du cône au-dessus du plan de la base B ; on aura :

$$\frac{R}{h} = \tang \alpha$$

Si nous prenons l'axe A pour axe des $y$ et la trace $H^m$ du plan méridien M parallèle au plan vertical de projection (*fig.* 89) pour axe des $x$, l'origine des coordonnées étant alors au centre $o$ du cercle B, l'équation d'une hyperbole $\Sigma_1$ tracée dans le plan méridien M (cette courbe $\Sigma_1$ ayant son centre $s$ sur l'axe A, son axe imaginaire dirigé suivant l'axe A et ses asymptotes faisant entre elles un angle égal à $2\alpha$) sera :

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{(y-6^2)}{p^2 \tang^2 \alpha} = 1 \qquad (1)$$

6 représentant la distance du centre $s_1$ de cette hyperbole $\Sigma_1$ au centre $s$ du cercle B, et $p$ représentant l'axe réel de cette même courbe $\Sigma_1$.

$p$ et 6 seront donc les coordonnées du point $m_1$ sommet de l'hyperbole $\Sigma_1$, et si l'on établit que cette hyperbole $\Sigma_1$ passe par le point $m_1$ du cercle B, ou en d'autres termes que l'hyperboloïde de révolution (engendré par cette courbe $\Sigma_1$ tournant autour de l'axe A) passe par le cercle B, il faudra dans l'équation (1) faire $x = R$ et $y = 0$; dès lors :

$$\frac{R^2}{p^2} - \frac{6^2}{p^2 \tang^2 \alpha} = 1$$

ou

$$R^2 \tang^2 \alpha = 6^2 + p^2 \tang^2 \alpha \qquad (2)$$

sera l'équation du *lieu* des divers sommets $m_1$ des diverses hyperboles $\Sigma_1$. Cette équation (2) est celle d'une ellipse ayant le point $o$ pour centre et pour axes : R et (R . tang $\alpha$).

Par conséquent, le *lieu* des cercles de gorge des divers hyperboloïdes qui passent par le cercle B, qui ont tous pour axe l'axe A et dont les cônes asymptotes sont tous égaux entre eux et ont le demi-angle au sommet égal à $\alpha$, est un *ellipsoïde* de révolution ayant le cercle B pour *équateur* et pour *sommets* les points $s$ et $s'$.

Cela établi, résolvons le problème général, et supposons qu'au lieu d'un cercle B on a une section conique $\varepsilon$.

1° Supposons d'abord que la section conique $\varepsilon$ est *une ellipse*.

Concevons le cône $\Delta$ (*fig*. 90) de révolution ayant pour base l'ellipse $\varepsilon$ et ayant pour sommet le point $s$ de la focale (hyperbole) H.

L'axe A du cône $\Delta$ sera, comme on sait, la tangente en $s$ à l'hyperbole H.

Si l'on mène un plan tangent T au cône $\Delta$ la trace horizontale de ce plan (prenant pour plan horizontal de projection le plan de la courbe $\varepsilon$ et pour plan vertical de projection le plan de la focale H) sera tangente à la courbe $\varepsilon$, et si dans ce plan T on mène une droite K parallèle à la génératrice G de contact du plan T et du cône $\Delta$, en faisant tourner cette droite K autour de l'axe A, on aura un hyperboloïde à une nappe et de révolution ayant le cône $\Delta$ pour cône asymptote.

On peut donc, pour engendrer cet hyperboloïde, prendre un plan tangent arbitraire, et dès lors supposer que l'on opère par rapport à la génératrice G du cône $\Delta$ passant par le sommet $g$ (extrémité du grand axe) de l'ellipse donnée $\varepsilon$.

Dès lors, la plus courte distance entre les droites G et K sera égale à l'ordonnée de l'ellipse $\varepsilon$ parallèle au petit axe de cette ellipse, et pour le point en lequel $K^h$ coupera cette ellipse $\varepsilon$; et si, par la droite D qui unit le sommet $s$ du cône $\Delta$ et le centre $o$ de l'ellipse $\varepsilon$, on mène un plan Q perpendiculaire au plan vertical de projection, il nous suffira de connaître dans ce plan Q le *lieu* $\xi$ des points en lesquels les cercles de gorge des divers hyperboloïdes qui sont assujetties à passer par l'ellipse $\varepsilon$, sont coupés par ce plan Q pour connaître la surface lieu de ces divers cercles de gorge.

Or, prenant la droite D pour axe des abscisses $p$, et le petit axe de l'ellipse $\varepsilon$ pour axe des ordonnées $y$, on voit que les abscisses $p$ seront aux abscisses $x$ de l'ellipse $\varepsilon$ (comptées sur le grand axe $og$) dans un rapport constant; on peut donc écrire : $p = m.x$.

Et dès lors, il suffira de remplacer dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de l'ellipse $\varepsilon$, $x$ par $\frac{p}{m}$; et l'on aura :

$$\frac{p^2}{m^2a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pour le *lieu* $\xi$.

Il est donc évident que le *lieu* des divers cercles de gorge sera un *ellipsoïde* non de révolution ayant la droite D pour ligne *diamétrale* conjuguée des cercles de gorge dont les plans seront perpendiculaires à l'axe A.

2° Supposons que la courbe $\varepsilon$ est une *hyperbole*,

La focale de cette hyperbole sera une ellipse H (*fig.* 91).

En faisant les mêmes raisonnements que précédemment et des calculs analogues, on trouvera que la courbe $\xi$ est une hyperbole ayant pour axe réel la droite $ss'$ comptée sur D, $s$ et $s'$ étant les sommets des deux cônes qui passent par l'hyperbole $\varepsilon$.

Dès lors, le *lieu* des cercles de gorge sera un *hyperboloïde* à deux nappes non de révolution.

3° Supposons que la courbe $\varepsilon$ est une *parabole*.

La focale de cette parabole sera une parabole H (*fig.* 92).

La droite D sera parallèle à l'axe infini de la parabole $\varepsilon$, et l'on trouvera que la courbe $\xi$ est une *parabole* identique à la parabole $\varepsilon$ et ayant la droite D pour axe infini.

Le *lieu* des cercles de gorge sera donc un *paraboloïde elliptique*.

Si l'on cherche la courbe $\xi$, située dans le plan de la focale qui se trouve être le lieu des points en lesquels les divers cercles de gorge sont coupés par le plan de cette focale, on verra que :

1° Dans le cas où la courbe $\epsilon$ est une *ellipse*; $\xi$, sera une ellipse ayant son centre en $o$, et ayant pour diamètres conjugués, d'abord $ss'$ dirigé sur la droite D et ensuite une droite qui passant par le point $o$ sera dirigée perpendiculairement à l'axe A et sera égale au petit axe de l'ellipse $\epsilon$;

2° Dans le cas où la courbe $\epsilon$ est une *hyperbole*; $\xi$, sera une hyperbole ayant son centre en $o$, et pour diamètres conjugués, d'abord $ss'$ dirigée sur la droite D (et l'on aura le diamètre réel de la courbe $\xi$) et ensuite une droite qui passant par le point $o$ sera dirigée perpendiculairement à l'axe A et sera égale à l'axe imaginaire de l'hyperbole $\epsilon$ (et l'on aura le diamètre imaginaire de la courbe $\xi$);

3° Dans le cas où la courbe $\epsilon$ est une *parabole*; $\xi$, sera une parabole ayant la droite D pour diamètre infini et ayant pour tangente au point $s$ une droite perpendiculaire à l'axe A.

En sorte que dans les trois cas le plan tangent au point $s$ à la surface *ellipsoïde* ou *hyperboloïde* à deux nappes ou *paraboloïde* elliptique (*lieu* des cercles de gorge des divers hyperboloïdes à une nappe passant par la même section conique $\epsilon$) sera perpendiculaire à l'axe A.

PROBLÈME 4. *Étant donnés un hyperboloïde à une nappe et un point, mener par ce point un plan qui coupe la surface suivant une parabole dont l'axe infini passe par ce même point.*

Concevons l'axe A d'un hyperboloïde $\Sigma$, cet axe A étant perpendiculaire au plan horizontal P; désignons par $o$ le centre et par $\Delta$ le cône asymptote de la surface $\Sigma$; enfin désignons par $s$ le point donné. Tout plan passant par le point $s$ coupera les surfaces $\Sigma$ et $\Delta$ suivant deux sections coniques semblables et semblablement placées et concentriques.

Si donc le plan sécant Q coupe le cône $\Delta$ suivant une parabole $\epsilon$, ce même plan Q coupera la surface $\Sigma$ suivant une parabole qui sera identique à $\epsilon$; les deux sections (*paraboles*) auront même paramètre $p$ et même droite D pour axe infini. Le problème proposé est donc ramené au problème suivant :

*Étant donnés un point* s *et un cône* $\Delta$, *couper ce cône par un plan* Q *passant par le point* s, *et dirigé dans l'espace de telle manière que la section soit une parabole* $\epsilon$ *dont l'axe infini* D *passe par le point* s.

Pour qu'un plan coupe un cône suivant une parabole, il faut qu'il soit parallèle à l'une des génératrices droites de ce cône.

Si donc l'on unit le sommet $o$ du cône $\Delta$ au point $s$ par une droite B, et si l'on fait glisser le cône $\Delta$ parallèlement à lui-même, son sommet $o$ parcourant la droite B, lorsque ce sommet $o$ sera en $s$, le cône $\Delta$ aura pris la position $\Delta_1$, et tout plan Q tangent à $\Delta_1$ coupera le cône $\Delta$ suivant une parabole $\varepsilon$; et la génératrice droite G contact du plan Q et du cône $\Delta_1$ sera le diamètre infini de la courbe de section $\varepsilon$.

Il faut donc chercher quel est, parmi tous les plans tangents Q, celui qui donne une droite G telle qu'elle soit, non un diamètre infini, mais l'axe infini de la section $\varepsilon$.

Si l'on prolonge la droite G jusqu'à sa rencontre avec le cône $\Delta$, on aura un point $x$ pour lequel la tangente à la courbe $\varepsilon$, section du cône $\Delta$ par le plan Q, sera la droite $t$ intersection du plan Q et du plan T tangent en $x$ au cône $\Delta$.

Pour que la droite G soit l'axe infini de la parabole $\varepsilon$, il faut que la droite $t$ soit perpendiculaire à la droite G.

Il faudra donc chercher, parmi les couples de droites G et $t$, celui pour lequel ces deux droites se coupent sous l'angle droit.

*Première solution*. Supposons l'axe A du cône $\Delta$ vertical et le plan de base horizontal, on aura pour la base du cône $\Delta$ une ellipse X.

Si l'on mène la droite D qui unit le point donné $s$ et le sommet $o$ du cône $\Delta$, cette droite D viendra percer le plan horizontal en un point $d$; et si par la droite D l'on mène un plan Y, ce plan coupera le cône $\Delta$ suivant deux génératrices droites K et $K_1$ qui viendront percer la courbe X, la première au point $k$ et la deuxième au point $k_1$, et les trois points $k$, $k_1$ et $d$ seront en ligne droite. En sorte que si par les deux points $k$ et $k_1$ on mène des tangentes $\theta$ et $\theta_1$ à l'ellipse X, ces droites se couperont en un point $r$ qui sera le *pôle* de l'ellipse X par rapport à la *polaire* $kdk_1$. Et par rapport au *pôle* $d$ on aura une droite R, *lieu* des points $r$, qui sera la *polaire* de la courbe X.

Les deux plans $(o, \theta)$ et $(o, \theta_1)$ seront tangents au cône $\Delta$ suivant les droites K et $K_1$, et ces plans tangents se couperont suivant une droite $or$ qui sera parallèle à la droite $t$, lorsque G sera parallèle à K et que dès lors K passera par le point $x$.

Il faut donc déterminer la position du point $r$ sur la droite R pour lequel la droite $or$ sera perpendiculaire à la droite K : c'est ce que l'on peut faire de la manière suivante :

Dans le plan $(o, \theta)$ tangent au cône $\Delta$ suivant la droite K, et par le sommet $o$ de ce cône menons une droite I perpendiculaire à K; cette droite I viendra couper la droite $\theta$ trace du plan tangent $(o, \theta)$ sur le plan de la base X en un point $v$.

Tous les points $v$ formeront une courbe $\delta$, et le point $v'$ en lequel la droite R

coupera $\delta$ sera celui qui donnera une solution du problème; car il suffira de mener par ce point $v'$ une tangente $\theta'$ à la base X et le plan mené par le point $s$ parallèlement au plan tangent $(o, \theta')$ coupera le cône $\Delta$ suivant une parabole dont l'axe infini passera par le point $s$.

Autant il y aura de point $v'$ de rencontre de la droite R et de la courbe $\delta$, autant il y aura de solutions du problème.

Il n'est pas sans intérêt de connaître la nature géométrique de la courbe $\delta$; nous allons donc chercher son équation.

Il est évident qu'au lieu de mener par le sommet $o$ du cône $\Delta$ une droite I qui, située dans le plan tangent $(o, \theta)$, sera perpendiculaire à la génératrice de contact K, on peut mener par ce point $o$ un plan Z perpendiculaire à la droite K, et la trace horizontale $H^z$ de ce plan Z coupera la trace horizontale $\theta$ du plan tangent en un point qui ne sera autre que le point $v$ trouvé ci-dessus comme rencontre des droites I et $\theta$.

Cela posé:

Les équations de l'ellipse X seront, en prenant l'axe A du cône $\Delta$ pour axe des $z$ et le plan de la courbe X pour plan des $x$ et $y$,

$$z = o \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les équations d'une génératrice droite K du cône $\Delta$ seront:

$$y - y' = \frac{-y'}{c} \cdot z$$

$$x - x' = \frac{-x'}{c} \cdot z$$

en désignant par $c$ la distance du sommet $o$ au plan des $(x, y)$.

L'équation du plan Z passant par le sommet $o$, et perpendiculaire à la droite K, sera:

$$(z - c)c - xx' - yy' = 0$$

La trace horizontale $H^z$ aura pour équations:

$$z = 0 \quad \text{et} \quad xx' + yy' + c^2 = 0 \qquad (1)$$

L'équation de la tangente $\theta$ au point de l'ellipse X dont les coordonnées sont $x'$ et $y'$ est:

$$\frac{yy'}{b^2} + \frac{xx'}{a^2} = 1 \qquad (2)$$

On a de plus l'équation de condition :

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

puisque le point dont les coordonnées sont $x'$ et $y'$ est sur la courbe X.

En éliminant $x'$ et $y'$ entre les équations (1), (2) et (3), on aura une équation en $x$ et $y$ qui sera celle du *lieu* cherché et ainsi de la courbe δ *lieu* des points $v$.

L'élimination étant effectuée, on arrive à l'équation

$$(N^2-P^2x^2)\,y^2+M^2x^2=0 \qquad (4)$$

en posant :

$$N^2=a^2(b^2+c^2)^2,\quad P^2=(a^2-b^2)^2,\quad M^2=b^2(a^2+c^2)^2.$$

Discutons l'équation (4) (qui est celle de la courbe δ) afin de reconnaître la forme de cette courbe; et pour faciliter cette discussion, écrivons l'équation (4) sous la forme :

$$y=\pm\frac{Mx}{\sqrt{P^2x^2-N^2}} \qquad (5)$$

$y$ sera imaginaire pour toutes les valeurs positives et négatives de $x$ pour lesquelles on aura : $Px > N$.

Lorsque $P^2x^2=N^2$, on a $x=\pm\frac{N}{P}$ et $y$ est infini. Si l'on met l'équation (5) sous la forme :

$$y=\pm\frac{M}{\sqrt{P^2-\frac{N^2}{x^2}}} \qquad (6)$$

On voit que $x$ augmentant, $y$ va en diminuant jusqu'à ce que enfin, pour $x=\infty$, on a $y=\pm\frac{M}{P}$.

De plus, il est évident que la courbe représentée par l'équation (5) est symétrique par rapport à l'axe des $x$, tant du côté des $x$ positifs que des $x$ négatifs, et aussi par rapport à l'axe des $y$, tant du côté des $y$ positifs que des $y$ négatifs.

L'équation (6) peut s'écrire sous la forme :

$$N^2y^2+M^2x^2=P^2x^2y^2 \qquad (7)$$

Et alors on voit que la courbe a deux asymptotes parallèles à l'axe des $y$ dont les équations sont $y = \pm \frac{M}{P}$, et deux asymptotes parallèles à l'axe des $x$ dont les équations sont $x = \pm \frac{N}{P}$.

La forme de la courbe $\delta$ donnée par l'équation (4) sera donc celle représentée par la *fig.* 93. Toutefois, il peut arriver que les asymptotes des quatre branches dont la courbe $\delta$ est formée coupent l'ellipse X.

Examinons donc ce qui peut arriver à ce sujet.

Les deux asymptotes parallèles à l'axe des $x$ ont pour équations :

$$y = \pm \frac{M}{P} \qquad (8)$$

Supposons que le grand axe de l'ellipse X est dirigé suivant l'axe des $x$, on aura : $a > b$.

L'équation (8) donnera, en remplaçant M et P par leurs valeurs en $a$ et $b$ et $c$.

$$y = \mp \frac{b(a^2 + c^2)}{a^2 - b^2}$$

Si l'on a $\frac{M}{P} > b$, l'asymptote ne coupera pas l'ellipse X ;

Si l'on a $\frac{M}{P} < b$, l'asymptote coupera l'ellipse X ;

Si l'on a $\frac{M}{P} = b$, l'asymptote sera tangente à l'ellipse.

Or, en posant l'inégalité $\frac{b(a^2+c^2)}{a^2-b^2} \gtreqless b$,

On voit que comme l'on a établi que $a$ est plus grand que $b$, on aura toujours $\frac{M}{P} > b$.

Donc les deux asymptotes parallèles à l'axe des $x$ ne rencontreront jamais l'ellipse X.

Mais il n'en sera pas de même pour les deux asymptotes parallèles à l'axe des $y$ ; car si l'on pose :

$$\frac{N}{P} \gtreqless a$$

ou

$$\frac{a(b^2+c^2)}{a^2-b^2} \gtreqless a$$

ou enfin

$$\sqrt{(b^2+c^2)} \gtreqless \sqrt{(a^2-b^2)}$$

On voit que $\sqrt{a^2-b^2}$ est précisément l'excentricité $e$ de l'ellipse X, et que $\sqrt{b^2+c^2}$ est égal à la génératrice L comprise entre le sommet du cône $\Delta$ et l'extrémité du petit axe de l'ellipse X base de ce cône.

Les trois cas pourront donc se présenter, savoir :

1° $e > L$, 2° $e = L$, 3° $e < L$

Dans le premier cas, les asymptotes ne couperont pas l'ellipse X.

Dans le deuxième cas, les asymptotes toucheront l'ellipse X en ses sommets extrémités de son grand axe.

Dans le troisième cas, les asymptotes couperont l'ellipse X.

*Deuxième solution.* Étant donné un cône du second degré $\Delta$, si l'on mène par son sommet $o$ une droite D, et si l'on fait mouvoir ce cône $\Delta$ parallèlement à lui-même son sommet $o$ parcourant la droite D; lorsque le point $o$ sera venu se placer en un point $s$, le cône $\Delta$ prendra dans l'espace une position $\Delta_1$ et l'on sait que les deux cônes $\Delta$ et $\Delta_1$ se coupent suivant une courbe plane 6 :

1° La courbe 6 est une *ellipse* lorsque la droite D est située dans l'intérieur du cône $\Delta$;

2° La courbe 6 est une *hyperbole* lorsque la droite D est située hors du cône $\Delta$;

3° La courbe 6 est une génératrice droite du cône $\Delta$ lorsque la droite D est située sur ce cône, et dans ce cas les deux cônes $\Delta$ et $\Delta_1$ sont en contact suivant cette génératrice droite D, laquelle joue le rôle de *parabole*.

Cela posé : si l'on mène au cône $\Delta$ un plan tangent Q, la génératrice de contact étant une droite G, il existera sur le cône $\Delta$ une génératrice K parallèle à G, et le plan tangent au cône $\Delta$ le long de K sera parallèle au plan Q et la droite G percera le cône $\Delta$ en un point $x$ qui appartiendra à la section conique 6 intersection des deux cônes $\Delta$ et $\Delta_1$.

Et si l'on mène par le point $x$ la génératrice droite $K_1$ du cône $\Delta_1$, le plan tangent à $\Delta$ tout le long de $K_1$ coupera le plan Q suivant une droite $t$ tangente en $x$ à la courbe 6.

Donc pour que le point $x$ soit le sommet de la parabole section du cône $\Delta$ par le plan Q, il faudra que les deux droites $t$ et G soient perpendiculaires entre elles.

Le problème est donc ramené au problème suivant :

*Étant donné un cône $\Delta$, ayant son sommet en un point s et pour base ou directrice une section conique $\mathfrak{C}$, trouver, parmi toutes les génératrices droites de ce cône $\Delta$, celles qui coupent sous l'angle droit la courbe $\mathfrak{C}$.*

Pour résoudre ce problème, il suffira d'abaisser du sommet $s$ une perpendiculaire N sur le plan de la courbe $\mathfrak{C}$; la droite N percera le plan de $\mathfrak{C}$ en un point $n$, et l'on mènera par ce point $n$ des normales à la courbe $\mathfrak{C}$. Chacun des points en lesquels ces normales perceront la courbe $\mathfrak{C}$ sera précisément le point $x$ sommet de la parabole demandée et dont l'axe infini passera par le point $s$.

Or, par un point $n$ situé sur le plan d'une section conique $\mathfrak{C}$, on peut toujours mener deux normales à cette courbe $\mathfrak{C}$ (et on n'en peut mener que deux) que le point $n$ soit situé en dedans ou en dehors de la courbe $\mathfrak{C}$.

Le problème proposé a donc toujours deux solutions, lorsque le point $s$ ne sera pas situé sur le cône $\Delta$.

Lorsque le point $s$ sera sur le cône $\Delta$, alors le cône $\Delta_1$ ne coupera plus le cône $\Delta$, mais lui sera tangent tout le long de la génératrice droite D passant par le point $s$.

On construira le plan T tangent au cône $\Delta$ suivant la droite D, et il faudra chercher parmi tous les plans Q tangents au cône $\Delta_1$, celui qui coupera le plan T suivant une droite $t$ perpendiculaire à la génératrice de contact G du plan Q et du cône $\Delta_1$.

Dans ce cas particulier, il faudra employer la première solution et considérer le cône ayant son sommet au point $o$ sommet du cône $\Delta$ et pour base la courbe à quatre branches $\delta$.

La construction devra s'exécuter de la manière suivante :

On prolongera la droite D, et elle viendra couper la base elliptique X du cône $\Delta$ en un point $d$; en ce point $d$ on mènera la tangente $\gamma$ à l'ellipse X, et cette droite $\gamma$ coupera la courbe $\delta$ en deux points; mais si la droite $\gamma$ est parallèle aux asymptotes parallèles soit au petit axe, soit au grand axe de l'ellipse X, ou si, en d'autres termes, la droite $\gamma$ est tangente à la courbe X en l'une des extrémités de son grand axe ou de son petit axe, alors le plan Q est facile à construire, car sa trace horizontale sera perpendiculaire à l'un des axes de l'ellipse X. Dans ce cas, il n'y aurait, à rigoureusement parler, qu'une seule solution ou trois solutions : une seule solution si les asymptotes de la courbe $\delta$ parallèle au petit axe de l'ellipse X ne coupent pas ou touchent cette courbe X, et trois solutions si ces asymptotes coupent la courbe X; mais la génératrice D peut cependant être considérée dans ce cas comme une seconde solution, ou comme une quatrième solution.

Mais si cela n'a pas lieu, et dès lors hormis le cas particulier précédent, on mènera de chacun des deux points en lesquels la courbe $\delta$ est coupée par la

droite $\gamma$ des tangentes $\theta$ et $\theta_1$ à l'ellipse $X_s$ et le plan Q aura deux positions : dans l'une il sera parallèle au plan ($\sigma_s$ $\theta$) tangent au cône $\Delta$, dans l'autre il sera parallèle au plan ($o$, $\theta_1$) aussi tangent au cône $\Delta$.

Ainsi, quelle que soit la position du point $s$, on peut dire que le problème aura toujours au moins deux solutions.

PROBLÈME 5. *Étant données une surface de révolution $\Sigma$ par son axe A et sa courbe méridienne $\tau$, et ayant construit la courbe de contact $\mathcal{C}$ d'un cône $\Delta$ et de la surface $\Sigma$; supposant que la courbe $\mathcal{C}$ est projetée sur le plan méridien passant par le sommet s du cône $\Delta$, en une courbe $\mathcal{C}^v$, on demande de construire la tangente en un point quelconque de $\mathcal{C}^v$.*

1° On sait que la courbe de contact d'un cône tangent à une surface du second degré est une courbe plane;

2° On sait que lorsque le sommet du cône tangent est situé sur un plan diamétral principal de la surface du second degré, le plan de la courbe de contact est perpendiculaire à ce plan diamétral;

3° Pour construire la courbe de contact d'un cône et d'une surface de révolution, on détermine successivement les points de cette courbe situés sur la suite des *parallèles* de la surface de révolution, en remplaçant pour chaque *parallèle* C la surface de révolution donnée $\Sigma$ par une surface de révolution B, plus simple, et telle que les deux surfaces B, et $\Sigma$ soient tangentes l'une à l'autre suivant le cercle ou *parallèle* C.

Et alors les deux surfaces $\Sigma$ et B, doivent être considérées comme ayant rigoureusement en commun non-seulement le *parallèle* C, mais encore un second parallèle C' infiniment voisin du premier parallèle C; car deux surfaces en contact suivant une ligne ont réellement en commun non pas seulement cette ligne, mais bien une zone superficielle et élémentaire.

On peut donc dire que pour construire un point de la courbe de contact $\mathcal{C}$, on considère et on doit considérer deux cercles ou *parallèles* successifs et infiniment voisins C et C'.

Ainsi, pour construire le point de la courbe $\mathcal{C}$ situé sur un *parallèle* C, on emploie une surface auxiliaire simple et de révolution B, ayant un contact du premier ordre avec la surface générale $\Sigma$ et tout le long du cercle C.

5° Pour construire la tangente en un point $m$ de la courbe de contact $\mathcal{C}$, il faudra donc construire deux points $m$ et $m'$ successifs de $\mathcal{C}$, puisque la tangente en $m$ n'est autre que l'élément rectiligne $mm'$ de cette courbe $\mathcal{C}$ et supposé prolongé indéfiniment.

On devra donc considérer trois *parallèles* successifs ou infiniment voisins

C, C', C'', et par suite on devra remplacer la surface générale $\Sigma$ pour le parallèle C, par une surface auxiliaire simple et de révolution $B_1$ ayant un contact du second ordre avec la surface $\Sigma$ et tout le long du parallèle C;

6° Si l'on voulait construire pour le point $m$ de la courbe de contact $\mathcal{C}$, le plan osculateur de cette courbe $\mathcal{C}$, il faudrait considérer quatre parallèles successifs ou infiniment voisins C, C', C'', C''', et par suite une surface (plus simple que la surface $\Sigma$) de révolution $B_1$ ayant un contact du troisième ordre avec la surface générale $\Sigma$ et tout le long de C.

Cela posé :

1° Pour construire le point $m$ de la courbe de contact $\mathcal{C}$ situé sur un parallèle C, on construit un cône de révolution $B_1$ tangent à la surface $\Sigma$ suivant le parallèle C, parce que l'on peut facilement construire le plan T tangent au cône $B_1$, ce plan T étant assujetti à passer par le sommet du cône $\Delta$;

2° Pour construire la tangente au point $m$ de la courbe $\mathcal{C}$, il faudrait construire un ellipsoïde de révolution ou un hyperboloïde à une nappe et de révolution $B_1$, ayant un contact du second ordre avec la surface $\Sigma$ tout le long du parallèle C.

Or, la construction de cette surface du second degré $B_1$ ne peut être effectuée que de la manière suivante :

Désignant par $\varepsilon$ la courbe méridienne de la surface $\Sigma$ et par A l'axe de révolution de cette surface $\Sigma$, il faudra, au point $x$ en lequel le parallèle C coupe la méridienne $\varepsilon$, construire une section conique H ayant l'un de ses axes dirigé suivant l'axe A, et ayant en $x$ un contact du second ordre avec la méridienne $\varepsilon$.

Dès lors, la section conique H en tournant autour de l'axe A engendrera une surface du second degré et de révolution $\Sigma_1$ ayant un contact du second ordre avec la surface $\Sigma$ tout le long du parallèle C.

Et dès lors, construisant la courbe de contact de la surface $\Sigma_1$ et d'un cône $\Delta_1$ ayant pour sommet le sommet du cône $\Delta$, on obtiendra une courbe plane $\mathcal{C}_1$ dont le plan viendra couper le plan tangent en $m$ à la surface $\Sigma$ suivant la tangente en $m$ soit à la courbe $\mathcal{C}$, soit à la courbe $\mathcal{C}_1$; car il est évident que les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ seront tangentes l'une à l'autre au point $m$.

Mais en ce point $m$, les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ n'ont qu'un contact du premier ordre, quoique les surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ aient un contact du second ordre. Cela a lieu parce que les deux cônes $\Delta$ et $\Delta_1$ n'ont qu'un contact du premier ordre tout le long de la génératrice droite qui leur est commune et qui passe par le point $m$.

La solution du problème dépend donc de la possibilité ou de l'impossibilité de construire la section conique H satisfaisant aux conditions imposées.

Or, la courbe H peut toujours être construite, quelle que soit la courbe méridienne $\varepsilon$.

Et en effet : cinq conditions déterminent une section conique.

Or, dire que la courbe H a en $x$ un contact du second ordre avec la courbe méridienne $\varepsilon$, c'est supposer que la courbe H passe par trois points successifs ou infiniment voisins $x$, $x'$, $x''$ de la courbe méridienne $\varepsilon$.

Or, pour que la courbe H ait son centre sur l'axe A, et l'un de ses axes dirigé suivant cet axe A, il faut admettre que cette courbe H passe par les trois nouveaux points $y$, $y'$, $y''$ intersection des trois parallèles successifs C, C', C'' par le plan de la courbe méridienne $\varepsilon$.

Or, l'on sait que si l'on se donne six points $x$ et $y$, $x'$ et $y'$, $x''$ et $y''$ tels que les cordes $xy$, $x'y'$, $x''y''$ soient parallèles et coupées en parties égales par une droite A qui leur est perpendiculaire, on peut toujours faire passer par les six points une section conique, laquelle évidemment satisfera aux conditions imposées précédemment, si toutefois les points $x$, $x'$, $x''$ sont trois points successifs ou infiniment voisins.

Cela dit :

Remarquons que pour le point $x$ la courbe méridienne peut tourner sa concavité ou sa convexité du côté de l'axe A. Si la courbe $\varepsilon$ tourne sa concavité, la courbe H sera une ellipse et la surface $\Sigma$, un ellipsoïde de révolution. Si la courbe $\varepsilon$ tourne sa convexité, la courbe H sera une hyperbole ayant son axe imaginaire dirigé suivant l'axe A, et dès lors la surface $\Sigma$, sera un hyperboloïde à une nappe et de révolution.

Appliquons ce qui précède à la solution du problème énoncé.

Soit $\varepsilon$ la courbe méridienne tracée dans un plan parallèle au plan vertical (*fig.* 94); soit $s$ le sommet du cône $\Delta$ tangent à la surface $\Sigma$ engendrée par la courbe $\varepsilon$ tournant autour de l'axe A.

La projection $6^v$ de la courbe 6 contact du cône $\Delta$ et de la surface $\Sigma$ étant construite, on demande de construire la tangente $t^v$ au point $m^v$ de $6^v$.

Par le point $m^v$ on mènera une droite $C^v$ perpendiculaire à $A^v$ qui viendra couper $\varepsilon^v$ en un point $x^v$. On construira en $x^v$ l'ellipse ou l'hyperbole $H^v$ ayant en $x^v$ un contact du second ordre avec $\varepsilon^v$ et dont le centre sera sur $A^v$, l'un des axes de cette courbe $H^v$ étant dirigé suivant $A^v$.

Par le point $s^v$ on mènera deux tangentes $6^v$ et $6_1^v$ à la courbe $H^v$, et en unissant les deux points de contact $n^v$ et $n_1^v$ on aura une droite qui passera par le point $m^v$ et sera tangente en ce point à la courbe $6^v$.

On sait que la courbe $6^v$ vient couper la courbe $\varepsilon^v$ en deux points $y^v$ et $y_1^v$ en lesquels cette courbe $6^v$ s'arrête brusquement en tant que l'on considère $6^v$ comme la projection de la courbe 6 de l'espace; mais l'on sait que si l'on consi-

dère $\mathfrak{G}'$ comme une courbe géométrique plane, elle se prolonge au delà de ces points $y'$ et $y_1'$.

On demande de construire la tangente au point $y'$ de $\mathfrak{G}'$; on sait que la construction de cette tangente dépend du plan osculateur U au point $y$ de $\mathfrak{G}$; car si l'on connaît le plan U comme il sera perpendiculaire au plan méridien $\varepsilon$, sa trace sur le plan vertical de projection donnera la tangente au point $y'$ de $\mathfrak{G}'$.

Or, jusqu'à présent on n'a pas résolu le problème relatif à la constrction du plan osculateur en ce point $y'$ lorsque $\mathfrak{G}$ est une courbe de contact de deux surfaces. On n'a encore résolu le problème de la construction du plan osculateur que lorsque la courbe $\mathfrak{G}$ est l'intersection de deux surfaces ayant un plan diamétral Y principal et commun et que la courbe $\mathfrak{G}$ est projetée sur ce plan Y (*).

En vertu de ce qui a été dit précédemment, la construction du plan osculateur U n'offrira aucune difficulté lorsque la courbe $\mathfrak{G}$ est une courbe de contact.

Et en effet :

Pour construire un point $m$ de la courbe $\mathfrak{G}$, il faut considérer deux cercles successifs C et C'; pour construire la tangente en $m$, il faut considérer trois cercles successifs C, C' et C''; pour construire le plan osculateur en $m$, où, en d'autres termes, pour construire deux tangentes successives en $m$, il faut considérer quatre cercles successifs C, C', C'' et C'''.

Mais pour le point $y$, la tangente $t$ est perpendiculaire au plan méridien $\varepsilon$, et c'est la tangente $t'$ successive de $t$ que l'on cherche. Or, comme $t$ est perpendiculaire au plan méridien, on voit que les quatre cercles successifs que l'on devrait considérer se réduisent à trois, et que par conséquent il suffira de construire une surface $\Sigma$, dont la courbe méridienne H aura seulement un contact du second ordre au point $y$ avec la courbe $\varepsilon$, et non un contact du troisième ordre. En sorte que la construction de la tangente au point $y'$ de $\mathfrak{G}'$ sera identiquement la même que celle de la tangente en un point *courant* $m'$ de $\mathfrak{G}'$.

On peut *généraliser* tout ce qui précède, et de la manière suivante:

On sait que par trois sections coniques C, C', C'' semblables et semblablement placées et dont les centres sont sur une droite D et dont les plans sont parallèles, on peut toujours faire passer une surface du second degré, et qu'on n'en peut faire passer qu'une.

Cela posé :

Concevons une surface $\Sigma$ engendrée par une section conique C dont le plan se meuve parallèlement à lui-même, le centre de la courbe C se mouvant sur une

(*) Et ainsi dans l'*épure* où l'on détermine les projections de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se coupent.

droite D, cette courbe C changeant d'ailleurs de grandeur, tout en restant semblable à elle-même; si l'on mène par la droite D un plan P, ce plan coupera les diverses courbes C, $C_1$, $C_2$, $C_3$,.... (qui sont dans l'espace les diverses positions de la courbe génératrice C) en des points $p$, $p_1$, $p_2$, $p_3$,.... qui formeront une courbe $\varepsilon$ que l'on pourra regarder comme la directrice de la génératrice mobile et variable de paramètres C.

Concevons dans l'espace un point $s$ sommet d'un cône $\Delta$ tangent à la surface $\Sigma$ suivant une courbe $\mathfrak{G}$.

On pourra toujours construire en un point $m$ de la courbe $\mathfrak{G}$ la tangente à cette courbe, au moyen des considérations suivantes:

Si l'on conçoit en $m$ les trois courbes génératrices successives ou infiniment voisines C, C′, C″, on pourra toujours, par ces trois courbes, faire passer une surface du second degré $\Sigma_1$ qui aura dès lors un contact du second ordre avec la surface $\Sigma$ et tout le long de la courbe C.

Et si l'on construit la courbe de contact $\mathfrak{G}_1$ de $\Sigma_1$ et d'un cône $\Delta_1$ ayant le point $s$ pour sommet, les deux courbes $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}_1$ auront un contact du premier ordre en $m$.

Or, la courbe $\mathfrak{G}_1$ est plane; donc le plan de $\mathfrak{G}$ coupera le plan T tangent en $m$ à la surface $\Sigma$ suivant la tangente en $m$ à la courbe $\mathfrak{G}$.

Il sera toujours facile de construire la surface du second degré $\Sigma_1$, car il suffira de construire, au point $p$ en lequel la *directrice* $\varepsilon$ de la surface $\Sigma$ est coupée par le *parallèle* C passant par le point $m$, la section conique H, ayant un contact du second ordre avec $\varepsilon$, et ayant son centre situé sur la droite D et de plus cette droite D et la droite K qui unit le centre de la courbe génératrice C et le point $p$ étant un système conjugué; ainsi K sera la *corde* et D le *diamètre*, conjugués l'un à l'autre.

*De la construction de la tangente à la projection $\delta^v$ de la courbe $\delta$ intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.*

C'est ici le lieu de faire quelques observations sur la construction de la tangente $\theta^v$ en un point $m^v$ de la projection verticale de la courbe $\delta^v$, intersection de deux surfaces de révolution $\Sigma$ et $\Sigma_1$, dont les axes A et $A_1$ se coupent, le plan vertical de projection étant le plan des axes de ces deux surfaces.

On sait que pour construire cette tangente $\theta^v$, on emploie le plan des normales N et $N_1$ menées au point $m$, la première à la surface $\Sigma$ et la seconde à la surface $\Sigma_1$ et que la trace du plan $(N, N_1)$ sur le plan $(A, A_1)$ n'est autre que la droite qui unit le point $n$ en lequel l'axe A est coupé par la normale N, avec le point $n_1$ en lequel l'axe $A_1$ est coupé par la normale $N_1$; et la tangente $\theta^v$ cherchée est perpendiculaire à la droite $(n, n_1)$.

Les divers auteurs ont appliqué cette méthode à tous les points de la courbe $\delta'$, et aussi au point $x$ en lequel la courbe $\delta$ perce le plan des axes (A, $A_1$), ce point $x$ étant dès lors celui en lequel se coupent les courbes méridiennes des surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ (ces courbes méridiennes étant situées dans le plan des axes qui est un plan méridien commun aux deux surfaces de révolution), et ils n'ont point, à ce que je crois, expliqué d'une manière suffisamment nette pourquoi cette méthode était exacte, lorsqu'on l'appliquait à un point tout particulier, tel qu'est le point $x$.

A la première vue, on serait porté à croire, au contraire, que pour ce point $x$ la méthode n'est point rigoureuse.

Et en effet :

Concevons deux *parallèles* successifs et infiniment voisins C et C′ de la surface $\Sigma$, le cercle C coupera la courbe $\delta$ en un point $p$, et le cercle C′ coupera cette même courbe en un point $p'$ et les deux points $p$ et $p'$ seront deux points successifs et infiniment voisins de la courbe $\delta$ et l'élément rectiligne $\overline{pp'}$ étant prolongé donnera la tangente au point $p$ de la courbe $\delta$.

Toutes les normales menées à la surface $\Sigma$ par les divers points du *parallèle* C couperont l'axe A, et en un même point $q$; toutes les normales menées à la surface $\Sigma$ par les divers points du *parallèle* C′ couperont l'axe A, et en un même point $q'$.

Et ces points $q$ et $q'$ seront distincts entre eux; ils seront deux points successifs et infiniment voisins de l'axe A.

Or, pour construire la tangente en un point $p$ de la courbe $\delta$, on n'a besoin de mener une normale à la surface $\Sigma$ que par le point $p$; par conséquent la trace sur le plan des axes de tout plan passant par la droite N, passera par le point $q$, point qui est rigoureusement déterminé.

Mais si l'on voulait construire la tangente au point $p'$ de la courbe $\delta$, ce point $p'$ étant le successif et infiniment voisin du point $p$, et si dès lors on voulait construire la tangente $\theta'$ de la courbe $\delta$ successive et infiniment voisine de la tangente $\theta$ au point $p$, on devrait mener par le point $p'$ une normale N′ à la surface $\Sigma$, laquelle couperait l'axe A au point $q'$ qui serait le successif et infiniment voisin du point $q$ sur la droite A, et la trace sur le plan des axes de tout plan passant par la normale N′ passerait par le point $q'$.

Et ce que nous venons de dire pour deux points quelconques successifs et infiniment voisins, $p$ et $p'$ de la courbe $\delta$, peut se dire pour le point $x$ situé sur le plan des axes et son successif $x'$ qui est hors de ce plan, et comme la tangente $\theta$ au point $x$ est perpendiculaire au plan des axes, on est obligé de construire sa tangente successive $\theta'$ qui n'est autre que la tangente au point successif $x'$ de la courbe $\delta$.

Et, alors la trace du plan des normales ne passera pas par le point $q$ en lequel la

normale N au point $x$ de la courbe $\delta$ coupe l'axe A, mais par le point $q'$ en lequel la normale N' au point $x'$ de $\delta$ coupe cet axe A.

On serait donc tenté de regarder la construction de la tangente au point $x$ comme approximative, puisque l'on fait passer la trace du plan des normales par le point $q$, et non par le point $q'$ infiniment voisin de $q$, comme ce qui précède semble nous y obliger.

Cependant pour ce point $x$ tout particulier de la courbe $\delta$, la construction de la tangente est rigoureuse, parce que pour ce point $x$ il arrive que les deux points $q$ et $q'$ se confondent en un seul point, ou en d'autres termes, c'est que pour le point $x$ de la courbe $\delta$ les normales N au point $x$ et N' au point infiniment voisin $x'$ (ces normales étant menées à la surface $\Sigma$) se coupent, tandis que pour tous les autres points de la courbe $\delta$, les deux normales successives à la surface $\Sigma$ ne se coupent pas. En d'autres termes, encore, c'est que la surface gauche $\Theta$ formée par les diverses normales à la surface $\Sigma$ et qui ont pour directrice la courbe $\delta$, se trouve avoir une courbure développable tout le long de la normale menée par le point $x$, et ainsi tout le long de la normale située dans le plan des axes des deux surfaces de révolution considérées.

Et en effet :

La courbe $\delta$ est symétrique par rapport au plan des axes, l'axe A est une droite de *striction* pour la surface gauche $\Theta$, cette surface $\Theta$ est donc symétrique par rapport au plan des axes.

Si je construis au point $x$ de la courbe $\delta$ le cercle osculateur $\gamma$, son plan sera perpendiculaire au plan des axes et son centre sera sur le plan des axes; on pourra donc construire un cône osculateur à la surface $\Theta$, tout le long de la normale au point $x$, et ce cône sera symétrique par rapport au plan des axes, et son sommet sera au point en lequel la normale menée au point $x$ coupe l'axe A. On a donc, en vertu de ce que la courbe $\delta$ est symétrique par rapport au plan des axes, en ce cercle $\gamma$ un cercle osculateur ayant, non pas seulement un contact du second ordre avec la courbe $\delta$, mais un contact du troisième ordre, par conséquent la surface gauche $\Theta$ a quatre génératrices droites successives et infiniment voisines, qui viennent se couper en un même point de l'axe A.

Et c'est parce que la surface $\Theta$ est développable tout le long de sa génératrice droite située dans le plan des axes, que la construction de la tangente au point $x$ de la courbe $\delta$, par la méthode du plan des normales, est rigoureusement exacte.

## § V.

*Nouvelles propriétés des paraboloïdes hyperboliques.*

Lorsque l'on a deux droites dans l'espace A et A′, et que l'on divise en parties égales ces deux droites par des points 1, 2, 3, 4, 5, ..... également espacés sur A et par des points 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, ..... aussi également espacés sur A′ (les divisions de A étant égales ou non à celles de A′) on sait que si l'on unit les points 1, 1′ et 2, 2′ et 3, 3′, etc., par des droites $G_1$, $G_2$, $G_3$,..... on forme un paraboloïde hyperbolique Σ.

Si l'on unissait les points 1, 2′ et 2, 3′ et 3, 4′, etc. par des droites $G_1'$, $G_2'$, $G_3'$,...... on formerait un nouveau paraboloïde hyperbolique Σ′; si de même on unissait les points 1, 3′ et 2, 4′ et 3, 5′ etc., par des droites $G_1''$, $G_2''$, $G_3''$ etc., on formerait encore un nouveau paraboloïde hyperbolique Σ″.

Car l'on peut, en faisant mouvoir une droite D sur deux droites A et A′ (non situées dans un même plan) parallèlement à un plan P, engendrer une infinité de paraboloïdes hyperboliques en faisant varier la position de ce plan P. Tous ces paraboloïdes se couperont suivant les deux droites A et A′ et auront tous un plan directeur commun qui sera le plan Q parallèle aux droites directrices A et A′; et chaque position du plan P sera celle du second plan directeur d'un des paraboloïdes.

Cela posé :

Concevons trois droites parallèles entre elles D, A, B (*fig.* 95), et tracées dans un même plan. Prenons sur D un point *s*; divisons la droite B en parties égales par les points *a′*, *b′*, *c′*, *d′*,.....

Unissons le point *s* avec chacun de ces points de division, *a′*, *b′*, *c′*, *d′*,..... les divergentes du point *s* couperont la droite A en des points *a*, *b*, *c*, *d*,..... qui seront tels, qu'ils diviseront aussi en parties égales la droite A. Ainsi, ayant sur B, $a'b' = b'c' = c'd' =$ etc, on aura sur A, $ab = bc = cd =$ etc.

Unissons maintenant le point *a′* de B avec le point *b* de A, par une droite coupant D en *s′*.

Si on mène par les points *b′*, *c′*, *d′*,..... de B des droites allant converger en *s′*, ces droites couperont la droite A en des points qui ne seront autres que les points *c*, *d*, etc. déjà placés sur cette droite A. Et en effet : les trois droites *s′a′*, *s′b′*, *s′c′*, coupent A en les points *b*, *c*, *d*,.....

Les deux triangles *s′bc*, et *s′a′b′* sont semblables.

Les deux triangles *sab* et *sa′b′* sont semblables.

Les triangles ont leurs sommets $s$ et $s'$ situés sur une droite D parallèle à leurs bases situées pour les uns sur A, pour les autres sur B, mais A et B sont parallèles.

On a donc évidemment $ab = bc_1$, dont le point $c_1$ n'est autre que le point $c$. Donc etc.

On sait aussi, que si l'on a (*fig.* 96) deux droites parallèles $A_1$ et $B_1$ et qu'on les divise en parties égales par des parallèles équidistantes $K$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$, en unissant : 1° les points $a$ et $b'$, $b$ et $c'$, $c$ et $d'$, etc.; on aura une suite de droites parallèles entre elles $K_1'$, $K_2'$, $K_3'$, etc.; en unissant 2° les points $a$ et $c'$, $b$ et $d'$, $d$ et $e'$, on aura encore une suite de droites parallèles entre elles $K_1''$, $K_2''$, $K_3''$, etc.

Cela posé :

Concevons trois plans rectangulaires entre eux P, Q et R se coupant suivant trois droites X, Y, Z, la droite X étant l'intersection des plans P et Q, la droite Y étant l'intersection des plans P et R et la droite Z étant l'intersection des plans Q et R.

Prenons le plan P pour plan horizontal de projection; P et R seront deux plans verticaux de projection.

X sera la ligne de terre pour les plans P et Q.

Y Sera la ligne de terre pour les plans P et R.

Dès lors et employant nos notations, si l'on a dans l'espace deux droites parallèles aux plans Q et désignées par A et A', leurs projections $A^h$ et $A'^h$ sur le plan P seront parallèles à Z; et leurs projections $A^v$ et $A'^v$ sur le plan Q se couperont en un point $o$.

Prenons les positions de A et A' telles que : si du point $o$ on mène dans le plan Q une droite $Z_1$ parallèle à Z, les points en lesquels le plan P sera coupé par les droites $Z_1$, A et A' se trouvent en ligne droite.

D'après ce que l'on sait, si l'on fait mouvoir une droite G sur A et A' parallèlement au plan P, si cette droite G en ses diverses positions divise la droite A' en parties égales, elle divisera aussi la droite A en parties égales, et l'on aura un paraboloïde hyperbolique Σ dont le sommet sera au point $o$ situé sur le plan Q et dont l'axe infini ξ passera par le sommet $o$ et sera parallèle à la droite X intersection des deux plans directeurs P et Q. L'axe infini ξ du paraboloïde Σ sera donc situé dans le plan Q.

Et les diverses génératrices G du paraboloïde Σ se projetteront sur le plan R suivant des parallèles à la droite Y, et diviseront les droites $A^{v''}$ et $A'^{v''}$ en parties égales ainsi que cela est indiqué sur la *fig.* 96, pour les droites $K$, $K_1$, $K_2$, etc. qui divisent les droites $A_1$ et $B_1$ respectivement en parties égales.

Et ces mêmes génératrices G se projetteront sur le plan P suivant des droites (qui divergeant du point $s$ en lequel la droite $Z_1$ coupe la droite X) diviseront en par-

ties égales les droites $A^{a}$ et $A'^{a}$, ainsi que cela a lieu *fig.* 95 pour les droites parallèles A et B et les droites qui divergent du point *s*.

Cela posé :

Si l'on mène par la droite X un plan P', faisant avec le plan Q un angle $\alpha$ et avec le plan P un angle $\beta$ complémentaire de $\alpha$, et si l'on mène à ce plan P' une suite de plans parallèles et équidistants entre eux $P_1'$, $P_2'$, $P_3'$,..... ces divers plans couperont les droites A et A' en des points qui seront équidistants entre eux, ou en d'autres termes, qui diviseront ces droites A et A' en parties égales.

Dès lors les droites $G_1'$, $G_2'$, $G_3'$ qui passeront par les points de divisions et seront parallèles au plan P' se projetteront sur le plan R suivant des parallèles équidistantes et faisant un angle $\beta$ avec la droite Y (ainsi que cela a lieu pour les droites $K_1'$, $K_2'$, $K_3'$, etc. *fig.* 96) et diviseront $A^{r}$ et $A'^{r}$ en parties égales.

Et ces mêmes droites $G_1'$, $G_2'$, $G_3'$, se projetteront sur le plan P suivant des droites qui diviseront en parties égales les droites $A^{a}$ et $A'^{a}$ et concourront en un point *s'*; comme en la *fig.* 95, et le point *s'* ainsi que le point *s* devront en vertu de ce qui a été dit ci-dessus être situés sur une droite parallèle à $A^{a}$ et $A'^{a}$ et dès lors ce point *s'* sera situé sur la droite X.

Nous pouvons donc énoncer le *théorème* suivant :

Si l'on a un paraboloïde hyperbolique $\Sigma$, et que par son axe infini $\xi$ on mène deux plans $Q_1$ et $P_1$ respectivement parallèles aux génératrices du premier et du deuxième système. Si l'on prend deux génératrices du premier système A et A' parallèles au plan $Q_1$, on pourra par ces deux droites A et A' faire passer une infinité de paraboloïdes hyperboliques $\Sigma'$, $\Sigma''$, $\Sigma'''$,..... qui auront respectivement pour second plan directeur l'un des plans $P_1'$, $P_1''$, $P_1'''$,..... lesquels passeront tous par l'axe $\xi$, ces divers paraboloïdes ayant le plan $Q_1$ pour plan directeur commun.

Les sommets de ces divers paraboloïdes et leurs axes infinis $\xi'$, $\xi''$, $\xi'''$ seront tous situés dans le plan $Q_1$ et ces axes seront parallèles entre eux et à l'axe $\xi$ du paraboloïde $\Sigma$.

Maintenant je dis que les sommets *o*, *o'*, *o''*, *o'''*,...., des divers paraboloïdes $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$, $\Sigma'''$,...... seront sur une droite située dans le plan $Q_1$.

En effet :

On sait que lorsque l'on a un paraboloïde hyperbolique $\Sigma$ ayant deux plans directeurs P et Q se coupant suivant une droite X et sous un angle arbitraire $\alpha$, si l'on mène un plan R perpendiculaire à P et Q et coupant P suivant une droite Y et coupant Q suivant une droite Z, les deux génératrices de systèmes différents qui se croisent au sommet *o* du paraboloïde sont respectivement parallèles aux droites Z et Y, et dès lors sont dans le plan qui, mené par le sommet *o*, serait per-

pendiculaire à la droite X, ou, en d'autres termes, perpendiculaire à l'axe infini ξ du paraboloïde, ou, en d'autres termes, encore parallèle au plan R.

Par conséquent le plan Q, étant un plan directeur commun et tous les sommets $o$, $o'$, $o''$, $o'''$, des divers paraboloïdes $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$, $\Sigma'''$ étant dans ce plan, toutes les génératrices du premier système (parallèles à $Q_1$) qui passent respectivement par ces divers sommets $o$, $o'$, $o''$,.... seront dans le plan $Q_1$ et seront parallèles à Z, et toutes les génératrices du deuxième système (parallèles respectivement à $P_1$, $P_1'$, $P_1''$) et qui passent respectivement par les sommets $o$, $o'$, $o''$, $o'''$ seront parallèles au plan R.

Toutes ces génératrices formeront donc un paraboloïde Δ ayant les plans $Q_1$ et R pour plans directeurs et les droites A et A' pour directrices.

Or, toutes les génératrices du système parallèle an plan R pour le paraboloïde Δ coupent le plan $Q_1$ en des points qui sont sur une génératrice de Δ appartenant au système de génératrices droites parallèles au plan $Q_1$, donc tous les sommets $o$, $o'$, $o''$,..... des divers paraboloïdes $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$,..... sont sur une droite située dans le plan $Q_1$. Et il sera toujours facile de construire cette droite, par la *considération* du paraboloïde Δ.

## § VI.

Lorsque nous avons parlé des épicycloïdes annulaires, nous avons eu l'occasion d'examiner deux systèmes qui étaient tels que l'un d'eux était *la transformation* de l'autre. Dans l'un des systèmes, il y avait un *plan* qui se trouvait représenté dans l'autre système par un *plan gauche* ou *paraboloïde hyperbolique;* nous allons examiner un second système dans lequel la même chose a lieu.

Cet examen ne sera pas sans intérêt, parce que les *transformations* sont fréquemment employées en *géométrie descriptive*, ainsi que nous l'avons déjà dit, comme moyen ou méthode de recherche.

Concevons (*fig.* 97), un cône de révolution ayant pour axe la droite A et pour base le cercle C et son sommet étant en un point $s_1$.

Imaginons un second cône ayant le même cercle C pour base et son sommet situé en $s$ sur l'axe A.

Si par un point $m$ de C et par l'axe A on fait passer un plan méridien P, ce plan coupera les deux cônes suivant deux génératrices G et $G_1$ qui feront entre elles un angle droit ou un angle arbitraire $\alpha$; de sorte que les demi-angles au sommet $\theta$ et $\theta_1$ des deux cônes $(s, C)$ et $(s_1, C)$ seront ou ne seront pas complémentaires l'un de l'autre.

Traçons sur le cône $(s_1, C)$ une section conique $\varepsilon$.

Cette courbe $\varepsilon$ sera coupée par la génératrice G, en un point $x$.

Menons par $x$ une droite K parallèle à G, elle coupera l'axe A en un point $p$.

Opérant de la même manière pour tous les points $x$ de la courbe $\varepsilon$, on aura une suite de droites K qui formeront une surface gauche $\Sigma$ engendrée par une droite K se mouvant sur l'axe A, sur la courbe $\varepsilon$ et parallèlement au cône $(s, C)$.

Concevons la tangente $t$ en $m$ au cercle C.

Traçons la tangente $\theta$ en $x$ à la courbe $\varepsilon$.

Si nous menons une droite $sn$ dans le plan tangent au cône $(s, C)$, lequel plan passe par $t$ et G, si nous unissons le point $n$, en lequel se coupent les droites $\overline{sn}$ et $t$, au point $s_1$ sommet du premier cône, cette droite coupera $\theta$ en un point $y$, et si par $y$ nous menons une droite L parallèle à $sn$, elle coupera l'axe A en un point $q$.

Opérant pour tous les points de la droite $t$ comme nous venons de le faire pour le point $n$, nous obtiendrons une suite de droites L s'appuyant sur l'axe A et sur $\theta$ et étant toutes parallèles au plan tangent $(t, G)$.

La surface $\Delta$, lieu des droites L, sera donc un *paraboloïde* hyperbolique ayant A et $\theta$ pour directrices et le plan tangent $(t, G)$ pour plan directeur.

Ainsi le plan $(t, G)$ est transformé en un paraboloïde $\Delta$, et le cône $(s, C)$ se trouve transformé en une surface gauche $\Sigma$.

Et comme dans tout mode de transformation, deux surfaces tangentes restent tangentes après leur transformatien, on voit que le plan $(t, G)$ étant tangent au cône $(s, C)$ suivant la droite G, le paraboloïde $\Delta$ *transformé* du plan $(t, G)$ sera tangent à la surface $\Sigma$ *transformée* du cône $(s, C)$ tout le long de la droite K *transformée* de la génératrice droite G du cône $(s, C)$.

Cela dit :

Supposons d'abord que les deux cônes $(s, C)$ et $(s_1, C)$ soient deux cônes égaux et tels dès lors qu'en transportant le cône $(s, C)$ parallèlement à lui-même, son sommet $s$ étant venu en $s_1$, les deux cônes en cette nouvelle position, se superposent ; ou, pour plus de généralité, supposons que les deux cônes $(s, C)$ et $(s_1, C)$ ne se coupent que suivant une seule section conique, et soient dès lors tels, qu'en menant par l'axe A un plan, ce plan coupe les deux cônes suivant quatre génératrices parallèles deux à deux.

Ces deux cônes ne pourront se couper que suivant : 1° une ellipse, si la droite A qui unit les sommets $s$ et $s_1$ des deux cônes est dans l'intérieur de ces cônes ; et 2° une hyperbole, si la droite A des sommets est extérieure aux cônes.

Coupons tout le système par un plan X. Ce plan pourra avoir deux positions par rapport à la droite A qui unit les sommets $s$ et $s_1$ des deux cônes, il pourra la couper, ou lui être parallèle.

Premier cas. 1° *La droite* A *étant intérieure aux cônes, le plan* X *étant parallèle à la droite* A *des sommets.*

Le plan X (*fig.* 97) coupera le cône (*s*, C) suivant une section conique H, et le point *v* en lequel le plan X coupe la génératrice G du cône est un point de la courbe H.

Ce même plan coupera le plan tangent (*t*, G) suivant une droite I tangente en *v* à la courbe H.

Ce plan X coupera la génératrice K de la surface Σ parallèle à G en un point *z* et ce même plan coupera la surface gauche Σ suivant une courbe H, et le paraboloïde Δ suivant une section I, et les deux courbes H, et I, seront tangentes l'une à l'autre au point *z*.

Le plan X étant parallèle à la droite A, on voit de suite que les points *v* et *z* seront unis par par une droite parallèle à A.

Maintenant la courbe H, variera de forme suivant la forme des courbes C et ε que nous supposons toujours être des sections coniques.

Puisque l'axe A est supposé intérieur aux cônes la courbe C est une ellipse; supposons que la courbe ε est aussi une ellipse.

Le plan X coupera le cône (*s*, C) suivant une hyperbole H.

La courbe H, sera dès lors composée de deux branches infinies et ayant deux asymptotes.

Les deux asymptotes de la courbe *hyperbolique* H, seront parallèles aux asymptotes de l'hyperbole H.

Et en effet :

Désignons par G′ la génératrice du cône (*s*, C) parallèle à l'asymptote de la courbe H. Sur la surface Σ il y aura une génératrice K′ parallèle à G′, et de même que G′ passe par le point situé à l'infini sur l'hyperbole H, de même la droite K′ contiendra le point situé à l'infini sur la courbe H,, puisque G′ et K′ sont parallèles au plan sécant X.

Ainsi la courbe H, est composée de deux branches séparées et infinies.

Le plan tangent M au cône (*s*, C) suivant G′ se transformera en un paraboloïde hyperbolique Δ′ tangent à la surface Σ tout le long de K′.

On sait que quand un plan est tangent à un paraboloïde et au point situé à l'infini sur une génératrice de ce paraboloïde, il est parallèle au plan directeur de cette génératrice.

Le plan T′ tangent au point situé à l'infini sur K′ sera donc parallèle au plan T. Dès lors comme le plan T coupe le plan X suivant une asymptote à H, le plan T′ coupera ce même plan X suivant une asymptote à H, et les deux asymptotes à la courbe H et à la courbe H, seront évidemment parallèles.

DEUXIÈME CAS. 2° *Le plan* X *coupant la droite* A *des sommets.*

Le plan X coupant l'axe A, coupera le cône suivant une *parabole*, une *hyperbole* ou une *ellipse*, et l'on aura l'une de ces trois sections coniques pour courbe de section, en vertu de la valeur de l'angle que le plan P fera avec l'axe A.

D'après tout ce qui a été dit précédemment, il est évident : que le plan X coupera la surface gauche $\Sigma$ :

1° Suivant une courbe *parabolique* (composée d'une branche infinie dans les deux sens et sans asymptote) si ce plan X coupe le cône $(s, C)$ suivant une *parabole* ;

2° Suivant une courbe *hyperbolique* (composée de deux branches infinies et ayant deux asymptotes) si ce plan X coupe le cône $(s, C)$ suivant une *hyperbole* ;

3° Suivant une courbe *elliptique* (courbe fermée) si ce plan X coupe le cône $(s, C)$ suivant une *ellipse*.

Nous avons, dans ce qui précède, supposé que la courbe $\varepsilon$ tracée sur le cône $(s_1, C)$ était une *ellipse*, supposons maintenant que cette courbe est une *parabole*, et que le plan X coupe l'axe A.

Remarquons d'abord, qu'en supposant que le plan X coupe l'axe A, nous supposons implicitement le cas où le plan X est parallèle à l'axe A, car c'est supposer lors du parallélisme que le plan X coupe l'axe A à l'infini ; dans ce cas particulier il y a des restrictions aux résultats et qui ne sont autres, savoir : que dans ce cas tout particulier le plan X coupe toujours le cône $(s, C)$ suivant une *hyperbole*.

La courbe $\varepsilon$ étant une *parabole* son plan sera parallèle à une génératrice $G_1$ du cône $(s_1, C)$, et $G_1$ sera parallèle à une génératrice G du cône $(s, C)$.

Dans ce cas la surface gauche $\Sigma$ ne pourra pas être coupée par un plan X suivant une courbe fermée (*elliptique*).

Et en effet :

D'après le mode de transformation adopté, lorsque l'on fera passer par l'axe A et la génératrice $G_1$ un plan P, il coupera le cône $(s, C)$ suivant la droite G qui viendra couper le cercle C en un point $g$ et la droite $s_1 g$ ou $G_1'$ sera une génératrice du cône $(s_1, C)$ et coupera la parabole $\varepsilon$ en un point $x$ par lequel on devra mener une droite K parallèle à G, laquelle droite K sera une génératrice à distance finie de la surface $\Sigma$.

Mais le plan P coupera le cône $(s, C)$ suivant une génératrice G' et le cône $(s_1, C)$ *précisément* suivant la génératrice $G_1'$ ; et G' coupera le cercle C en un point $g'$ et la droite $s_1 g'$ qui ne sera autre que $G_1$ coupera la parabole $\varepsilon$ à l'infini, et ce sera par ce point situé à l'infini qu'il faudra mener une droite $K_1'$ parallèle à $G_1'$, laquelle droite $K_1'$ sera une génératrice droite de la surface gauche $\Sigma$.

La surface gauche $\Sigma$ a donc une génératrice droite $K_1'$ située à l'infini.

Ainsi dans le cas ou la directrice $\varepsilon$ est une *parabole* la surface gauche $\Sigma$ ne peut

être coupée par un plan X, quelle que soit la direction de ce plan, que suivant :

1° Une courbe *hyperbolique;* si le plan X coupe le cône ($s$, C) suivant une *hyperbole*.

2° Une courbe *parabolique;* si le plan X coupe le cône ($s$, C) suivant une *parabole* ou une *ellipse*.

Supposons maintenant que la courbe $\varepsilon$ est une *hyperbole,* et supposons encore que *la droite* A *des sommets est extérieure aux deux cônes.*

En discutant la question, ainsi que nous l'avons fait lorsque la droite A était intérieure aux deux cônes ($s$, C) et ($s_1$, C) nous retrouverions *identiquement* les mêmes résultats.

Reprenons maintenant le problème sous un point de vue plus général.

PROBLÈME GÉNÉRAL. Concevons deux cônes du second degré *quelconques*, $s$ et $s_1$ (désignant chacun des cônes par son sommet) et supposons que ces deux cônes sont placés dans l'espace l'un par rapport à l'autre, d'une manière arbitraire.

Menons par le sommet $s_1$ une droite $A_1$ de direction arbitraire et plaçons sur le cône $s_1$ une section conique $\varepsilon$ (ellipse) ou $\varepsilon_1$ (parabole) ou $\varepsilon_1$ (hyperbole).

Concevons ensuite une droite K se mouvant sur l'axe $A_1$ et la section conique $\varepsilon$ ou $\varepsilon_1$ ou $\varepsilon_1$ et parallèlement au cône ($s$); nous engendrerons une surface gauche $\Sigma$.

Examinons cette surface $\Sigma$.

*Supposons une directrice $\varepsilon$ (ellipse).*

Nous mènerons par le sommet $s$ du cône ($s$) une droite A parallèle à $A_1$.

Par l'axe $A_1$ nous mènerons un plan $P_1$ qui coupera la courbe $\varepsilon$ en deux points $x$ et $y$ ou qui la touchera en un point $z$.

Par la droite A nous mènerons un plan P parallèle au plan $P_1$ qui coupera le cône ($s$) suivant deux droites G et G' ou qui le touchera suivant une droite G''.

On devra donc mener de chacun des points $x$ où $y$ et $z$ des parallèles aux droites G et G' ou G''.

Et l'on voit que la surface $\Sigma$ sera composée de deux nappes; $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ s'entrecoupant suivant l'axe $A_1$ et la courbe $\varepsilon$.

Si donc on coupe tout le système par un plan X on obtiendra pour section dans l'une et l'autre nappe ou une courbe *elliptique*, si le plan X coupe le cône ($s$) suivant une *ellipse:* ou une courbe *hyperbolique*, si le plan X coupe le cône ($s$) suivant une hyperbole : ou une courbe *parabolique*, si le plan X coupe le cône ($s$) suivant une *parabole*.

Et l'on voit de suite aussi que dans le cas où :

*L'on suppose une directrice $\varepsilon_4$ (parabole),*

L'on a encore deux nappes $\Sigma_4$ et $\Sigma_4$ qui ne seront coupées par un plan X que suivant des courbes *hyperboliques* ou *paraboliques*.

Et que dans le cas où :

*L'on suppose une directrice $\varepsilon_5$ (hyperbole),*

L'on a encore deux nappes $\Sigma_5$ et $\Sigma_5$ qui ne sont coupées par un plan X que suivant des courbes *hyperboliques*.

## § VII.

*La surface hélicoïde (filet de vis triangulaire) a pour surface osculatrice, tout le long d'une de ses génératrices droites, un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.*

Désignons par A l'axe d'un cylindre de révolution sur lequel se trouve tracée une hélice $\varepsilon$.

Concevons un cône de révolution $\Delta$ ayant son sommet en un point $s$ de l'axe A et cet axe pour axe de révolution.

Imaginons une droite G se mouvant dans l'espace en s'appuyant sur l'axe A et sur l'hélice $\varepsilon$ et ayant le cône $\Delta$ pour cône directeur.

La droite G engendrera une surface hélicoïde gauche $\Sigma$, qui sera la surface connue dans les arts sous le nom de *surface du filet de vis triangulaire*.

Cela posé :

Considérons trois génératrices droites successives ou infiniment voisines G, G′, G″ de la surface $\Sigma$, lesquelles seront parallèles respectivement à trois génératrices droites aussi successives et infiniment voisines K, K′, K″ du cône directeur $\Delta$.

Ces trois droites G, G′, G″ seront les trois directrices ou génératrices du premier système de l'hyperboloïde à une nappe H osculateur de deuxième ordre à la surface $\Sigma$ tout le long de G.

Or, les trois droites G, G′, G″ s'appuient sur l'axe A. Cet axe A sera donc une génératrice droite du deuxième système de l'hyperboloïde H.

Un hyperboloïde à une nappe a toujours un cône directeur ; la surface H aura donc un cône du deuxième degré $\Delta_1$ pour cône directeur : G, G′, G″, et A seront donc parallèles respectivement à quatre génératrices droites de ce cône $\Delta_1$.

On peut placer le cône $\Delta_1$ où l'on veut dans l'espace, on peut donc supposer que son sommet est en $s$.

Dès lors le cône $\Delta_1$ doit avoir parmi ses génératrices droites, les quatre droites, K, K′, K″ et A.

Le cône $\Delta_1$ devant avoir, en commun avec le cône $\Delta$, trois génératrices successives ou infiniment voisines, lui sera osculateur du deuxième ordre tout le long de K.

Le cône $\Delta_1$ sera donc déterminé si l'on connaît sa base. Or, si l'on coupe le cône $\Delta$ par un plan X perpendiculaire à son axe A, on aura un cercle C dont le centre $o$ sera le pied de l'axe A, et ce cercle C passera par les trois points successifs ou infiniment voisines $k$, $k'$, $k''$, en lesquels les droites K, K′, K″ sont coupées par le plan X.

Le cône $\Delta_1$ aura donc pour base sur le plan X une section conique $C_1$ osculatrice du deuxième ordre en K au point $k$ du cercle C et passant par le point $o$.

Il est évident que la courbe $C_1$ n'est autre qu'une ellipse ayant la ligne $\overline{ko}$ pour petit axe et dont le grand axe se calculera de la manière suivante :

Désignant la ligne $\overline{ko}$ ou le rayon du cercle C par $\rho$, $\rho$ sera le rayon de courbure de l'ellipse $C_1$ pour le point $k$.

En désignant par $a$ le demi-grand axe et par $\frac{\rho}{2}$ le demi-petit axe de la courbe $C_1$, on aura : $\rho = \frac{2.a^2}{\rho}$ ; d'où $\rho^2 = a^2 + a^2$.

Pour construire $a$, il faudra donc décrire sur $\rho$ comme diamètre un demi-cercle B et prendre le côté du quarré inscrit dans ce cercle B, et l'on aura la longueur du demi-grand axe de la courbe $C_1$. Or, il est évident que l'on a : $a > \frac{\rho}{2}$ ; donc le sommet du cône $(s, C_1)$ ou $\Delta_1$ sera dans un plan passant par le petit axe de l'ellipse $C_1$ ; le cône osculateur $\Delta_1$ ne sera donc pas de révolution, puisque l'on sait que tous les cônes de révolution qui passent par une ellipse $C_1$ ont leurs sommets situés sur le plan qui passant par le grand axe est perpendiculaire au plan de cette ellipse $C_1$.

Ainsi, le cône directeur de l'hyperboloïde osculateur H est déterminé, et il se trouve démontré que cet hyperboloïde n'est pas de révolution.

Pour déterminer complétement l'hyperboloïde H il faut connaître une seconde directrice du même système que celui auquel appartient la droite A ; or, l'on sait que si en un point $x$ d'une génératrice G d'une surface gauche $\Sigma$ on mène un plan tangent T à cette surface $\Sigma$, ce plan T coupe $\Sigma$ suivant une courbe $\delta$ dont la tangente $t$ au point $x$ est une des directrices de l'hyperboloïde osculateur. On devra donc construire, au point $x$ en lequel la droite G de l'hélicoïde $\Sigma$ coupe l'hélice $\epsilon$, le plan tangent T lequel sera déterminé par la droite G et la tangente $\theta$ au point $x$ de l'hélice $\epsilon$.

Ce plan T contiendra la droite $t$ tangente en $x$ à la section $\delta$ faite par ce même plan T dans l'hélicoïde $\Sigma$.

Or : lors même que cette courbe $\delta$ serait construite on ne saurait pas lui construire directement sa tangente $t$. Mais si l'on remarque que la droite $t$ cherchée doit être parallèle à une des génératrices du cône directeur $\Delta_1$, il sera facile de construire cette droite $t$ sans avoir besoin de construire la courbe $\delta$.

Et en effet :

Menons par le sommet $s$ du cône $\Delta_1$ une droite $\theta_1$ parallèle à $\theta$, et faisons passer par $\theta_1$ parallèle à $\theta$ et par $G_1$ parallèle à G un plan $T_1$ (qui dès lors sera parallèle à T), ce plan $T_1$ coupera le cône $\Delta_1$ suivant la génératrice $G_1$ et suivant une seconde génératrice $t_1$ qui sera parallèle à $t$.

Il suffira donc de mener par le point $x$ une droite $t$ parallèle à $t_1$ pour avoir la seconde directrice droite de l'hyperboloïde osculateur H, lequel sera dès lors engendré par la droite G se mouvant sur les droites A et $t$ et parallèlement au cône directeur $\Delta_1$.

Le demi-angle au sommet du cône $\Delta$ est égal à l'angle sous lequel chaque génératrice G de l'hélicoïde $\Sigma$ coupe l'axe A.

Si cet angle devient droit, les cônes directeurs $\Delta$ et $\Delta_1$ deviennent un seul et même plan directeur Q perpendiculaire à l'axe A et le *filet de vis triangulaire* devient un *filet de vis carré;* alors l'hyperboloïde osculateur H devient un paraboloïde osculateur $H_1$ ayant le plan Q pour plan directeur.

Ce qui nous montre que le paraboloïde osculateur dans ce cas n'est autre que le paraboloïde engendré par une droite s'appuyant sur l'axe A et sur une tangente $\theta$ à l'hélice $\varepsilon$ et se mouvant parallèlement au plan Q.

Ainsi le paraboloïde de raccordement le long d'une génératrice G d'une surface hélicoïde gauche $\Sigma$ (filet de vis carré) qui a pour directrice l'axe A et la tangente $\theta$ à l'hélice $\varepsilon$, n'a pas seulement un contact du premier ordre, tout le long de G, avec la surface $\Sigma$, mais elle a *rigoureusement* un contact du deuxième ordre tout le long de cette même génératrice droite G, avec la surface gauche $\Sigma$ (*).

Ce qui précède peut être *généralisé* de la manière suivante (**) :

Concevons une surface gauche $\Sigma$ engendrée par une droite G se mouvant parallèlement à un cône directeur du deuxième degré $\Delta$, ayant son sommet en un point $s$ de l'espace en s'appuyant sur une droite A et sur une courbe arbitraire $\varphi$.

(*) Propriété que l'on connaissait, mais qui se trouve ainsi démontrée d'une manière nouvelle.

(**) *Voyez* dans le Bulletin de la Société philomatique, séance du 26 mai 1838, la note que j'ai publiée, *Sur les diverses surfaces gauches engendrées par une droite se mouvant sur deux droites et parallèlement à un cône du second degré.*

Pour construire l'hyperboloïde osculateur H de la surface Σ pour une de ses génératrices droites G, on cherchera le cône directeur $\Delta_1$ du second degré de l'hyperboloïde H. Pour cela on mènera par le sommet $s$ une droite $A_1$ parallèle à A, on coupera le cône Δ par un plan P suivant une section conique $\varepsilon$.

Ce plan P coupera la droite $A_1$ en un point $o$, et la droite K génératrice du cône Δ, laquelle est parallèle à G en un point $k$.

On construira dans le plan P une section conique $\varepsilon_1$ passant le point $o$, et ayant en $k$ un contact du deuxième ordre avec $\varepsilon$.

Le cône ($s$, $\varepsilon_1$) sera le cône directeur $\Delta_1$ de l'hyperboloïde osculateur H, et l'on obtiendra une seconde directrice du même système que A, en construisant le plan T tangent à la surface Σ au point $x$ en lequel la droite G coupe $\varphi$. Ce plan T passera par G et par la tangente $\theta$ en $x$ à la courbe $\varphi$.

Par le sommet $s$ et la droite K on mènera un plan $T_1$ parallèle au plan T ; ce plan $T_1$ coupera le cône $\Delta_1$ suivant deux génératrices K et $K_1$ et en menant par le point $x$ une droite $t$ parallèle à $K_1$ on aura en A et $t$ les deux génératrices droites de l'hyperboloïde osculateur H.

Cet hyperboloïde H peut donc toujours être construit et avec facilité. Si le cône $\Delta_1$ est de révolution l'hyperboloïde H sera aussi de révolution.

Si par hasard le plan $T_1$ était tangent au cône $\Delta_1$ suivant la droite K, alors les droites $t$ et G se superposeraient.

Alors la droite G ne serait autre que $\theta$, c'est-à-dire tangente en $x$ à la directrice courbe $\varphi$.

Dans ce cas la surface Σ aurait pour le point $x$ une infinité de plans tangents. Tout plan passant par la génératrice G serait tangent en $x$ à la surface Σ.

La surface Σ offrirait donc une *singularité* le long de la génératrice G et l'hyperboloïde osculateur n'existerait pas pour cette génératrice.

§ VIII.

Il y a deux manières de déterminer une courbe plane : la première consiste à construire un certain nombre de points de cette courbe, chaque point étant déterminé séparément et indépendamment des autres; la seconde consiste à construire un certain nombre de tangentes à cette courbe, chaque tangente étant déterminée séparément et indépendamment des autres. Dans le premier cas, la courbe est le *lieu* des points; dans le deuxième cas, la courbe est l'*enveloppe* des tangentes.

Dans beaucoup de questions, il est utile de construire une courbe comme étant l'*enveloppe* de ses tangentes.

Il n'est donc pas sans intérêt de savoir construire une suite de tangentes à une section conique donnée par deux tangentes et ses points de contact et un troisième point situé dans l'angle des tangentes.

Lorsque l'on a résolu pour le cercle ou une section conique particulière C un problème de relation de position, on peut toujours faire passer, comme on le dit, cette relation de position sur toutes les autres sections coniques ; et, pour cela faire, on considère la section conique particulière C comme la base d'un cône $\Delta$ ayant pour sommet un point $s$ arbitrairement placé dans l'espace, et l'on fait passer par ce point $s$ et par toutes les lignes du système plan, du système tracé dans le plan de la courbe C, des plans ou des cônes, et l'on coupe tout le nouveau système de l'espace par un plan P. Ce plan P coupe le cône $\Delta$ suivant une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole ;* on obtient la relation de position qui existe pour chacune de ces sections coniques entre les diverses *lignes* situées sur le plan sécant P. Et l'on voit que par ce moyen on n'a besoin de démontrer une relation de position que pour une des sections coniques, pour l'obtenir immédiatement pour toutes les autres.

Lors donc que l'on veut résoudre un problème du genre des relations de position, on doit choisir la section conique pour laquelle la solution est la plus simple et la plus facile, et ensuite au moyen d'un cône on fait passer la propriété démontrée sur toutes les autres sections coniques.

C'est ainsi que l'on fait pour les propriétés des hexagones, ou pentagones ou quadrilatères inscrits à une section conique ; on démontre d'abord les propriétés pour l'ellipse, et l'on fait passer ensuite ces propriétés sur les autres sections coniques au moyen d'un cône auxiliaire (*).

Nous allons appliquer cette méthode à la construction d'une suite de tangentes à une section conique donnée par deux tangentes et ses points de contact sur ces tangentes et un troisième point situé dans l'angle des tangentes.

On sait que si l'on a deux droites A et B se coupant en un point $o$ (*fig.* 98), si l'on porte, à partir du point $o$, des divisions égales entre elles, $oa'$, $a'a''$, $a''a$ sur A, et $ob''$, $b''b'$, $b'b$ sur B ; les divisions de A étant égales ou inégales à celles de B ; les droites $a'b'$, $a''b''$, seront les tangentes d'une parabole P, ayant A et B pour tangentes et les points $a$ et $b$ pour points de contact avec ces tangentes.

(*) Voir mon *cours de géométrie descriptive*, lithographie pour les élèves de l'École centrale des arts et manufactures.



Si donc (*fig.* 99) on a une parabole P et deux tangentes A et B aux points $a$ et $b$ de cette courbe, ces deux tangentes se coupant en un point $o$, pour mener par le point $b'$, situé sur la tangente B, une seconde tangente à la courbe P, il faudra porter sur A à partir du point $o$, une longueur $oa'$ calculée au moyen de la proportion :

$$oa' : bb' :: oa : ob.$$

Et l'on est conduit à cette proportion, parce que (*fig.* 98), les droites $ab$, $a''b'$, $a'b''$ sont parallèles.

Il nous suffira donc de faire passer sur toutes les sections coniques la propriété reconnue vraie pour la parabole.

Concevons un cône de révolution (*fig.* 100) ayant la cercle B pour base sur le plan horizontal et le point $s$ pour sommet.

Coupons ce cône par un plan parallèle à la génératrice G laquelle est parallèle au plan vertical de projection, nous aurons pour section une parabole P.

Menons en son sommet $a$ une tangente, laquelle sera horizontale.

Et construisons au point $a'$, en lequel la courbe P coupe le cercle B, la tangente à cette parabole P.

Les deux tangentes aux points $a$ et $a'$ de la courbe P se couperont en un point $o$.

Divisons la tangente $oa$ en $n$ parties égales entre elles et aussi la tangente $oa'$ en $n$ parties égales entre elles.

Les droites $aa'$, $bb'$, $cc'$, seront parallèles et les droites $cb'$, $bc'$, seront des tangentes à la courbe P.

Cela posé :

Menons par le point $s$, sommet du cône une droite K, parallèle à la droite K qui unit les points $a$ et $a'$ de la courbe P; la droite K, percera le plan horizontal en un point $p$.

Et tous les plans passant par le sommet $s$ et les parallèles $aa'$, $bb'$, $cc'$,..... auront leurs traces horizontales Q, Q', Q'', passant par le point $p$ et par les points $a'$, $b'$, $c'$, $o'$ en lesquels les droites $aa'$, $bb'$, $cc'$, parallèles à K percent le plan horizontal.

Tous les points $a'$, $b'$, $c'$, $o'$ seront sur la trace horizontale du plan de la courbe P, laquelle trace sera perpendiculaire à la ligne de terre et tous ces points seront équidistants entre eux ; en sorte que l'on aura : $a'b' = b'c' = c'o'$.

Le plan tangent mené au cône par la génératrice $sa$, aura sa trace tangente en $a$, au cercle B et les droites Q, Q', Q'' couperont cette trace en des points $a_1$, $b_1$, $c_1$, $o_1$ qui seront aussi équidistants entre eux, puisque les droites $a'o'$ et $a_1o_1$ sont parallèles.

Si l'on mène par la génératrice $sa'$ un plan tangent au cône, il passera par la tangente $oa'$ en $a'$ à la parabole P, et sa trace $a'o_1$ sera tangente en $a'$ au cercle B.

Et cette trace $a'o_1$ coupera les droites Q, Q′, Q″, Q‴ en les points $a$, $r$, $r'$, $o_1$ tels que les droites $a'o_1$, $rc_1$, $r'b_1$, $o_1a$, seront des tangentes au cercle B.

Il suffit de jeter les yeux sur l'*épure* et d'y suivre les constructions pour être assuré de l'exactitude du résultat énoncé; car il suffit de voir que les droites $a'o_1$, $rc_1$, $r'b_1$, $o_1a_1$ sont les traces horizontales de plans passant par le sommet $s$ et par les tangentes $a'o$, $b'c$, $c'b$, $oa$ à la parabole P, et que dès lors ces plans sont tangents au cône, et que dès lors leurs traces horizontales doivent être tangentes au cercle B, base de ce cône.

De ce qui précède, on peut donc conclure pour le *cercle*, les constructions suivantes.

I. Étant donné (*fig.* 101) un cercle B on mènera aux extrémités $a$ et $b$ d'un de ses diamètres deux tangentes, dès lors parallèles, $aq$ et $bp$.

On unira un point $m$ du cercle B avec le point $a$; la droite $ma$ coupera $bp$ en un point $p$.

On mènera au point $m$ la tangente $mq$ au cercle B, laquelle coupera $aq$ en un point $q$.

Cela fait : si l'on divise la droite $aq$ en $n$ parties égales entre elles par des points de division équidistants entre eux, savoir, 1, 2, 3, ... et si l'on mène les diverses tangentes $\overline{p.1}$, $\overline{p.2}$, $\overline{p.3}$, elles couperont la tangente $mq$ en des points 3′, 2′, 1′,..... tels que les droites $\overline{1,3'}$, $\overline{2,2'}$, $\overline{3,3'}$,..... seront tangentes au cercle B.

Si le point $m$ (*fig.* 102) choisi sur le cercle B, est à l'extrémité du diamètre perpendiculaire au diamètre $ab$, les constructions seront les mêmes, seulement on remarquera que le point $p$ situé sur la tangente $bq$ sera tel que l'on aura $bp = ab$.

II. Pour l'*ellipse*, les constructions seront identiquement les mêmes que pour le cercle, si l'on considère le grand axe ou le petit axe ou un diamètre quelconque comme remplaçant le diamètre $ab$ du cercle B dans le cas indiqué par la *fig.* 101.

Mais dans le cas analogue à celui indiqué *fig.* 101, les diamètres perpendiculaires entre eux $ba$ et $mn$ du cercle devront être remplacés pour l'*ellipse* par un système de diamètres conjugués.

Il est facile de se convaincre de l'exactitude des résultats énoncés pour l'*ellipse*, car il suffit de considérer le cercle B comme la base d'un cylindre de révolution et de mener par les diverses droites du système (*fig.* 101 et 102) des plans parallèles aux génératrices droites de ce cylindre, et de couper ensuite tout le système de l'espace par un plan quelconque; on obtiendra une *ellipse* pour section dans le cylindre et une suite de droites pour sections dans les divers plans verticaux qui auront évidemment entre elles les relations de position décrites ci-dessus.

III. Pour l'*hyperbole* les constructions seront les mêmes que pour l'*ellipse*; on

pourra prendre pour *ab* l'axe réel ou un diamètre réel, et un point *m* sur l'une des deux branches. Seulement on remarquera que les droites $\overline{1, 1'}$, $\overline{2, 2'}$ qui sont tangentes à la branche sur laquelle on a pris le point *m*, ne se croisent pas dans l'intérieur de l'angle $\widehat{mqa}$ comme pour le cercle (*fig.* 101) : cela tient à ce que le point *p* est situé dans l'intérieur de l'angle $\widehat{mqa}$ pour l'*hyperbole* (*fig.* 103), et hors de cet angle pour le *cercle* et l'*ellipse* (*fig.* 102).

## § IX.

1° Proposons-nous la solution du problème suivant, qui peut se présenter assez souvent dans la *pratique*.

Problème. *Étant donné sur un plan une droite* B *et deux points* m *et* n, *construire le sommet de la parabole qui passant par les points* m *et* n *aurait la droite* B *pour tangente en son sommet.*

L'on sait que par deux sections coniques qui ont une corde commune on peut toujours faire passer deux cônes (*).

Prenant le plan qui contient la *droite* B et les deux *points m et n* pour plan horizontal de projection, on pourra considérer :

1° la parabole cherchée comme étant la base de la trace $\gamma$ sur le plan horizontal du cône qui passerait en même temps par un certain cercle C assujetti à passer par les deux points *m* et *n* et dont le plan ferait avec le plan horizontal un certain angle, ou considérer 2° un certain cercle C passant par les points *m* et *n* et tracé sur le plan horizontal comme la base d'un cône qui passerait en même temps par une parabole 6 coupant ce cercle C aux points *m* et *n* et dont le plan ferait avec le plan horizontal un certain angle ; dans ce dernier cas, la parabole cherchée serait la projection horizontale $6^h$ de la parabole 6.

### *Première solution du problème.*

Soient donnés sur le plan horizontal les deux points *m* et *n* (*fig.* 106) et la droite B.

Unissons les points *m* et *n* par une droite que nous désignerons par $C^h$,

(*) *Voyez* dans la *Correspondance de mathématiques et de physique*, rédigée par M. Quetelet, de Bruxelles, le mémoire que j'ai publié et qui a pour titre : *Des propriétés des courbes du second degré, considérées dans l'espace*, tome III.

cette droite coupera la droite B en un point que nous désignerons par $p^h$.

Prenons la ligne de terre LT parallèle à la droite $\overline{mn}$.

Concevons par la droite $\overline{mn}$ un plan vertical N, lequel coupera le plan vertical M dont B devra être considérée comme la trace horizontale $H^m$, suivant une droite verticale Y.

Traçons dans le plan N un cercle C passant par les points $m$ et $n$ et tangent en un point $p$ à la droite Y. Ce cercle C aura la droite $C^h$ pour projection horizontale.

La parabole $\gamma$ cherchée doit passer par les points $m$ et $n$ et être tangente en son sommet $x$ à la droite B, dès lors le plan M sera tangent au cône $\Sigma$ passant par les deux courbes C et $\gamma$.

Le plan horizontal devant couper le cône $\Sigma$ suivant une parabole $\gamma$, ce cône $\Sigma$ doit avoir une de ses génératrices G parallèle au plan horizontal.

Cette génératrice G aura donc pour projection verticale une droite $G^v$ parallèle à la ligne de terre et tangente à $C^v$.

Prenons d'abord $G^h$ arbitraire, mais passant par $q^h$ projection du point $q$ en lequel la droite G coupe le cercle C, le sommet $s$ du cône $\Sigma$ devra se trouver sur G et sur le plan M, dès lors $s^v$ et $s^h$ projections du sommet $s$ du cône $\Sigma$ seront situés de la manière suivante : le point $s^h$ sera sur B ou $H^m$ et le point $s^v$ sera à l'intersection de la droite $G^v$ et de la perpendiculaire menée du point $s^h$ sur la ligne de terre LT.

Le plan horizontal étant parallèle à la génératrice G du cône $\Sigma$, l'axe de la parabole $\gamma$ sera parallèle à G et par conséquent à $G^h$.

Et puisque l'on veut que la droite B soit tangente au sommet $x$ de la parabole $\gamma$, il faudra que $G^h$ soit perpendiculaire sur la droite B. On ne donnera donc pas à $G^h$ une direction arbitraire, mais on mènera $G^h$ perpendiculaire à B.

Le plan M sera tangent au cône $\Sigma$ suivant une génératrice G, qui passera par le sommet $s$ et le point $p$ en lequel le cercle C est tangent au plan M, le plan M coupera donc le plan horizontal suivant une droite tangente à la parabole $\gamma$ au point $x$ en lequel la droite G, perce le plan horizontal. Le point $x$ sera le sommet cherché.

*Deuxième solution du problème.*

Construisons un cercle C (*fig.* 104) passant par les points $m$ et $n$ et tangent en $p$ à la droite B.

Prenons la ligne de terre LT perpendiculaire à la droite $\overline{mn}$ ; puisque la parabole $\delta$ doit couper le cercle C aux points $m$ et $n$, le plan P de cette courbe $\delta$ aura la droite $\overline{mn}$ pour trace horizontale $H^p$.

Pour que le plan P coupe suivant une parabole 6 le cône Σ qui aura le cercle C pour base sur le plan horizontal, il faudra que ce plan P soit parallèle à une génératrice G du cône Σ; et de plus il faudra que la droite B soit la trace horizontale $H^m$ d'un plan M vertical et tangent au cône Σ, car il faudra que la parabole $6^h$ soit tangente à B.

Pour satisfaire à ces conditions nous prendrons un point $s^h$ sur la droite B; par le point $r$ en lequel le diamètre parallèle à la ligne de terre coupe le cercle C nous mènerons une droite G dont les projections seront $G^v$ et $G^h$, $G^v$ étant arbitraire; puis nous prendrons $V^p$ parallèle à $G^v$; dès lors nous sommes assurés que le plan P est parallèle à G et coupera le cône Σ dont le sommet $s$ a pour projections $s^v$ et $s^h$ suivant une parabole 6.

Si l'on joint les points $s$ et $p$ par une droite $G_1$, on aura la génératrice du cône Σ suivant laquelle ce cône est touché par le plan vertical M.

Dès lors le plan P coupera la droite $G_1$ en un point $x$ et la parabole 6 se projettera sur le plan horizontal suivant une parabole $6^h$ passant par les points $m$ et $n$ et tangente à la droite B au point $x^h$.

Le plan P étant parallèle à la génératrice G, le diamètre A de la parabole 6 sera parallèle à G, dès lors, pour que $A^h$ soit perpendiculaire à B, il faudra que $G^h$ soit perpendiculaire à B.

Pour satisfaire à cette condition nous ne pouvons pas prendre le point $s^h$ arbitrairement sur la droite B, nous devrons (*fig.* 104) par le point $r$ mener $G^h$ perpendiculaire à la droite B, et le point $s^h$ sera déterminé convenablement.

D'ailleurs nous pourrons prendre $s^v$ où nous voudrons sur la verticale passant par le point $s^h$.

Par ces dernières constructions nous sommes assurés que le point $x^h$ est le sommet de la parabole cherchée $6^h$.

Remarquons que le plan qui contient les deux génératrices G et $G_1$ coupe le plan P suivant l'axe A de la parabole 6.

Or, la droite $\overline{rp}$ est la trace horizontale du plan $(G, G_1)$; par conséquent le point $y$ en lequel $\overline{rp}$ coupe $\overline{mn}$ sera la trace horizontale du diamètre A de la parabole 6, diamètre dont la projection $A^h$ est l'axe de la parabole $6^h$; on voit donc de suite que la construction du point $x^h$ sommet de la parabole $6^h$ peut être très-simple et en effet :

Il suffira de décrire le cercle C (*fig.* 105), passant par les points $m$ et $n$ et tangent à la droite B au point $p$.

Du centre $o$ du cercle C, on mènera $or$ perpendiculaire à la corde $\overline{mn}$ et l'on unira les points $r$ et $p$ par une droite $\overline{rp}$ coupant la corde $\overline{mn}$ au point $y$.

Par le point $y$, on mènera $yx'$ perpendiculaire à B et coupant cette droite B au point $x'$ qui sera le sommet de la parabole demandée 6.

D'après ce qui précède, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Étant données une parabole* 6 *et une tangente* θ *en un point* x *à cette courbe, si par deux points* m *et* n *arbitraires de cette parabole l'on fait passer un cercle* C *tangent en un point* p *à la tangente* θ ; *si du centre* o *du cercle* C *on abaisse une perpendiculaire sur la corde* mn, *coupant le cercle* C *en un point* r, *la droite* rp *coupera la corde* mn *en un point* y *qui appartiendra au diamètre de la parabole qui est le conjugué de la tangente* θ.

2° Donnons maintenant la solution de divers problèmes que l'on peut proposer sur les sections coniques déterminées par certaines conditions et non données par leur tracé complet.

Lorsque deux sections coniques situées dans des plans différents ont une corde commune, ou ont un point de contact, on peut toujours les envelopper dans le premier cas par deux cônes, dans le second cas par un seul cône (*).

Il nous sera donc toujours facile de construire, par les méthodes de la *géométrie descriptive*, une section conique passant par des points donnés et tangente à des droites données, pourvu que les conditions, comme on le sait, soient au nombre de cinq, et toutes les fois que parmi les données, il y aura : 1° deux points, ou 2° une droite et un point de contact sur cette droite.

Ainsi on pourra résoudre les problèmes suivants :

Construire une section conique :

1re SÉRIE.

1. Passant par cinq points;
2. Passant par quatre points et tangente à une droite;
3. Passant par trois points et tangente à deux droites;
4. Passant par deux points et tangente à trois droites;

2e SÉRIE.

5. Tangente à quatre droites et ayant avec l'une d'elles un point de contact déterminé;

(*) Voyez le mémoire que j'ai publié dans la *Correspondance de mathématiques et de physique*, rédigée par M. Quetelet, de Bruxelles, t. III, n° 3.

6. Tangente à trois droites passant par un point et ayant avec l'une des droites un point de contact déterminé ;
7. Tangente à trois droites et ayant avec deux de ces droites des points de contact déterminés;
8. Tangente à deux droites et passant par deux points et ayant un contact déterminé sur l'une des droites;
9. Tangente à deux droites et passant par un point et ayant un contact déterminé sur chacune des deux droites;
10. Tangente à une droite et passant par trois points et ayant un contact déterminé sur la droite.

Les seuls problèmes que l'on ne pourra pas résoudre seront les deux suivants :

1. Construire une section conique tangente à cinq droites ;
2. Construire une section conique passant par un point et tangente à quatre droites.

Mais nous savons que ces deux problèmes peuvent se résoudre au moyen de la théorie des *polaires*, par des constructions graphiques exécutées sur le plan même de la courbe cherchée et sans avoir besoin d'employer la construction d'un cône, et ainsi sans avoir besoin de passer dans l'espace.

*Mode de solution à employer pour la 1^re série.*

Sur la droite qui unira deux des points donnés $m_1$ et $m_2$, on construira un cercle C ayant la droite $\overline{m_1m_2}$ pour diamètre et dont le plan sera vertical, et l'on prendra ce plan pour plan vertical de projection.

Pour le *problème* 1 :

On regardera chacun des points $m_3$, $m_4$, $m_5$ comme le sommet d'un cône ayant le cercle C pour base.

On aura donc trois cônes $\Sigma_3$, $\Sigma_4$, $\Sigma_5$.

Les deux cônes $\Sigma_3$ et $\Sigma_4$ se coupant déjà suivant le cercle C se couperont encore suivant une section conique E.

Les deux cônes $\Sigma_3$ et $\Sigma_5$ par la même raison se couperont suivant une section conique E′, et les deux cônes $\Sigma_4$ et $\Sigma_5$ par la même raison se couperont suivant une section conique E″.

Or, l'on sait que la section conique 6 cherchée, et qui est celle qui doit passer par les cinq points donnés $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, $m_5$, et le cercle C ayant une corde commune $m_1m_2$, ne peuvent être enveloppées que par deux cônes K et K′, par conséquent les trois courbes E, E′, E″ se couperont en deux points $s$ et $s'$, qui seront les sommets des cônes K et K′.

Or, l'on peut déterminer ces points $s$ et $s'$ sans avoir besoin de construire les courbes E; E', E''; et en effet :

On construira trois points de la courbe E et trois points de la courbe E', on connaîtra dès lors les plans de ces deux courbes; on pourra déterminer la droite D intersection de ces deux plans, et cette droite D par son intersection avec l'un des trois cônes $\Sigma_1$, $\Sigma_4$, $\Sigma_3$ déterminera les points $s$ et $s'$.

Il ne restera plus qu'à chercher l'intersection du cône K ou du cône K' par le plan horizontal de projection pour avoir la section conique $\mathfrak{S}$ passant par les cinq points donnés sur le plan horizontal.

Pour le *Problème* 2 :

Étant donnés les quatre points $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ et la droite B, nous tracerons le cercle C sur la corde $\overline{m_1m_2}$ comme diamètre, par la droite B nous mènerons un plan T tangent au cercle C en un point $p$; ce plan T contiendra les sommets $s$ et $s'$ des deux cônes K et K'.

Nous regarderons les points $m_3$ et $m_4$ comme les sommets respectifs des deux cônes $\Sigma_3$ et $\Sigma_4$ ayant le cercle C pour base commune, et nous déterminerons le plan P de la courbe E, intersection de ces deux cônes $\Sigma_3$ et $\Sigma_4$.

Le plan P coupera le plan T suivant une droite D qui contiendra les sommets $s'$ et $s$, et ces sommets seront les points en lesquels la droite D percera l'un et l'autre cône $\Sigma_3$, $\Sigma_4$.

Pour le *Problème* 3 :

Étant donnés les trois points $m_1$, $m_2$, $m_3$ et les deux droites $B_1$ et $B_2$, sur $\overline{m_1m_2}$ comme diamètre nous construirons le cercle C.

Par $B_1$ et $B_2$ nous mènerons deux plans $T_1$ et $T_2$ tangents au cercle C; ces deux plans $T_1$ et $T_2$ se couperont suivant une droite D qui contiendra les sommets $s$ et $s'$.

Par la droite D et le point $m_3$ nous ferons passer un plan X lequel coupera le cercle C en deux points $x_1$, $x_2$; la droite $\overline{x_1m_3}$ coupera la droite D au point $s$, et la droite $\overline{x_2m_3}$ coupera la droite D au point $s'$.

Pour le *Problème* 4 :

Étant donnés les deux points $m_1$, $m_2$ et les trois droites $B_1$, $B_2$, $B_3$, nous construirons sur $\overline{m_1m_2}$ comme diamètre le cercle C.

Par les droites $B_1$, $B_2$, $B_3$ nous mènerons trois plans $T_1$, $T_2$, $T_3$ tangents au cercle C; ces trois plans se couperont en un point $s$ qui sera le sommet d'un cône qui, ayant le cercle C pour directrice, sera coupé par le plan horizontal suivant une section conique $\mathfrak{S}$ passant par les deux points donnés et tangente aux trois droites données.

Mais il faut remarquer que toutes les fois que par une droite on mène un plan tangent à un cercle, on a toujours deux plans tangents passant par cette droite. Dès lors pour la solution du problème proposé, il faudra mener les plans de manière à ce qu'ils soient tous tangents au demi-cercle situé au-dessus du plan horizontal ou tous tangents au demi-cercle situé au-dessous du plan horizontal.

*Mode de solution pour la 2ᵉ série.*

On construira un cercle C ayant pour tangente la droite sur laquelle se trouve un point de contact; on prendra ce cercle C de rayon arbitraire et son plan qui sera mené perpendiculaire au plan sur lequel sont tracées les *données* du problème sera pris pour plan vertical de projection. Ainsi :

Pour le *problème* 5 :

Étant donnés quatre droites $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ et un point de contact $m_1$ sur $B_1$ on construira un cercle C d'un rayon arbitraire, dont le plan sera vertical et ayant la droite $B_1$ pour tangente au point $m_1$.

Ensuite par chacune des trois droites $B_2$, $B_3$, $B_4$ on mènera des plans tangents au cercle C lesquels se couperont en un point $s$ qui sera le sommet du cône K qui ayant le cercle C pour directrice sera coupé par le plan horizontal suivant la section conique demandée.

On doit remarquer qu'ici il n'y a pas d'embarras, car par chaque droite on ne peut mener qu'un seul plan tangent au cercle C puisque le second plan tangent est le plan horizontal de projection.

Pour le *problème* 6 :

Étant donnés trois droites $B_1$, $B_2$, $B_3$, un point de contact $m_1$ sur $B_1$ et un point $n$, nous construirons le cercle C vertical et tangent à $B_1$ au point $m_1$; nous mènerons par les droites $B_2$ et $B_3$ deux plans tangents au cercle C et se coupant suivant une droite D; nous ferons passer par la droite D et le point $n$ un plan X qui sera forcément tangent au cercle C en un point $x$ (parce que deux sections coniques qui ont une tangente commune ne peuvent être enveloppées que par un seul cône).

La droite $nx$ coupera la droite D en un point $s$ qui sera le sommet du cône K.

Pour le *problème* 7 :

Étant donnés trois droites $B_1$, $B_2$, $B_3$ et deux points de contact $m_1$ sur $B_1$ et $m_2$ sur $B_2$, nous tracerons un cercle C vertical et ayant en $m_1$ la droite $B_1$ pour tangente.

Par les droites $B_2$ et $B_3$ nous mènerons deux plans tangents $T_2$ et $T_3$ au cercle C, ces plans se couperont suivant une droite D, le plan $T_2$ touchera le cercle C au point $p_2$ et le plan $T_3$ touchera ce même cercle au point $p_3$.

Nous unirons les points $n$ et $p_1$ par nne droite qui sera une génératrice du cône K et viendra couper la droite D en un point $s$ qui sera le sommet de ce cône K.

Pour le *problème* 8 :

Étant donnés deux droites $B_1$ et $B_2$, deux points $n_1$ et $n_2$ et un point de contact $m_1$ sur $B_1$, nous construirons le cercle C vertical et tangent à la droite $B_1$ au point $m_1$.

Nous mènerons par la droite $B_2$ un plan $T_2$ tangent au cercle C ; ce plan $T_2$ contiendra le sommet $s$ du cône K.

Nons regardons les points $n_1$ et $n_2$ comme les sommets de deux cônes $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ ayant le cercle C pour base commune, ces deux cônes se couperont suivant une section conique dont, au moyen de trois points, nous déterminerons le plan E, et ce plan coupera le plan $T_2$ suivant une droite D qui contiendra le sommet $s$.

Menant par la droite D et le point $n_1$ un plan X, ce plan sera tangent au cercle C en un point $x$ (puisqu'il ne peut y avoir qu'un seul sommet $s$), et la droite $\overline{n_1x}$ coupera la droite D au point $s$ qui sera le sommet du cône K.

Si l'on menait par la droite D et le point $n_2$ un plan $X_1$, ce plan toucherait le cercle C en un point $x_1$, et la droite $\overline{n_2x_1}$ couperait forcément la droite D au même point $s$, sommet du cône K.

Pour le *problème* 9 :

Étant donnés les deux droites $B_1$ et $B_2$, le point $n$ et les points de contact $m_1$ et $m_2$ situés sur les droites $B_1$ et $B_2$, nous construirons lo cercle C vertical et ayant au point $m_1$ la droite $B_1$ pour tangente.

Par la droite $B_2$ nous mènerons un plan $T_2$ tangent au point $p_2$ au cercle C ; la droite $\overline{m_2p_2}$ sera une génératrice du cône K.

Par la droite $\overline{m_2p_2}$ et le point $n$ nous mènerons un plan X, ce plan coupera le cercle C aux points $p_2$ et $x$, et la droite $\overline{nx}$ coupera la droite $\overline{m_2p_2}$ en un point $s$ qui sera le sommet du cône $K$.

Pour le *problème* 10 :

Étant donnés la droite B, un point de contact $m$ sur B et trois points $n_1$, $n_2$, $n_3$, nous construirons le cercle C vertical et tangent à la droite B au point $m$.

Nous regarderons les trois points $n_1$, $n_2$, $n_3$ comme les sommets de trois cônes $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ ayant le cercle C pour base commune.

Ces trois cônes se couperont deux à deux suivant trois courbes planes E, E', E'', dont les trois plans se couperont suivant une seule et même droite D, et comme il ne peut exister qu'un sommet $s$, cette droite D sera une tangente commune aux trois courbes E, E', E'', et le point de contact commun entre ces trois courbes sera le sommet $s$ du cône K.

Pour construire ce point $s$, sans avoir besoin de construire les courbes E, E', E'', la droite D étant déterminée, nous mènerons par la droite D et l'un des trois

points $n_1$, $n_2$, $n_3$ (le point $n_1$ par exemple) un plan O qui touchera le cercle B en un point $x$ et la droite $xn_1$ coupera la droite D en un point $s$ qui sera le sommet du cône K.

D'après ce qui précède, il est donc toujours possible de construire *par points*, et en se servant des méthodes de la *géométrie descriptive*, une section conique assujettie aux cinq conditions établies dans les dix problèmes précédents.

Maintenant nous pouvons arriver facilement à la solution de divers problèmes qui se présentent fréquemment dans la pratique des arts. Et ainsi, étant donnée une section conique par cinq conditions, nous pourrons, *sans tracer la courbe*: 1° construire les points en lesquels elle est coupée par une droite donnée; 2° mener par un point donné une tangente à la courbe, et déterminer le point de contact; 3° mener à la courbe une tangente qui fasse, avec une droite donnée de position, un angle donné, et, comme *corollaires*, construire une tangente parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée.

Et ces divers problèmes deviennent faciles, car il suffira de construire le sommet $s$ du cône K, qui a pour trace horizontale la section conique $\mathfrak{S}$ donnée par les cinq conditions, et le cercle C, qui, situé dans le plan vertical, sert de *directrice* au cône K; alors par le sommet $s$ et le point $p$ par lequel on veut mener une tangente à la section conique $\mathfrak{S}$, on fera passer une droite L qui percera le plan vertical du cercle C en un point $q$, et en menant par le point $q$ une tangente $t$ au cercle C, le plan $(s, t)$, qui sera tangent au cône K, coupera le plan horizontal suivant une droite $\theta$, qui sera la tangente demandée.

Pour mener à la section conique $\mathfrak{S}$ une tangente $\theta$ parallèle à une droite donnée B, il suffira de mener par le sommet $s$ du cône K une droite D parallèle à B; la droite D percera le plan vertical du cercle C en un point $d$; par ce point $d$ on mènera une tangente $t$ au cercle C, et le plan $(s, t)$ passera par la droite D et sera tangent au cône K. Ce plan $(s, t)$ étant tangent au cône K, coupera dès lors le plan horizontal suivant une droite $\theta$ tangente à la section conique $\mathfrak{S}$; et comme ce plan $(s, t)$ passe par la droite D, parallèle à la droite B, la droite $\theta$ sera parallèle à la droite B. Donc, etc.

En définitive, on voit que ces divers problèmes se résolvent en considérant la section conique $\mathfrak{S}$ comme étant la projection conique (ou projection *centrale*, le point $s$ étant le centre de projection) d'un cercle C situé dans un plan vertical et cette courbe $\mathfrak{S}$ devant être tracée sur un plan horizontal; on pourra donc modifier les solutions précédentes et les simplifier en y appliquant les règles de la *perspective*, le plan du cercle C étant le *tableau* et le plan de la courbe $\mathfrak{S}$ étant le plan *géométral*.

---

# CHAPITRE VI.

## DE LA SPHÈRE SATISFAISANT A QUATRE CONDITIONS.

Lorsque l'on propose de construire une sphère satisfaisant à certaines conditions, on demande évidemment la *position* du centre et la *longueur* du rayon de la sphère.

Supposons que les conditions soient pour la sphère de passer par certains points, ou d'être tangente à certaines droites ou à certains plans.

Quatre conditions, comme on le sait, suffisent pour déterminer la sphère, on pourra donc avoir (pour construire le centre et le rayon d'une sphère satisfaisant à quatre des conditions indiquées ci-dessus) à résoudre l'un des quinze problèmes suivants :

*Problème* 1. Sphère passant par quatre points.
— 2. passant par trois points et tangente à une droite.
— 3. passant par deux points et tangente à deux droites.
— 4. passant par un point et tangente à trois droites.
— 5. tangente à quatre droites.
— 6. passant par trois points et tangente à un plan.
— 7. passant par deux points et tangente à deux plans.
— 8. passant par un point et tangente à trois plans.
— 9. tangente à quatre plans.
— 10. tangente à trois droites et un plan.
— 11. tangente à deux droites et deux plans.
— 12. tangente à une droite et trois plans.
— 13. passant par deux points et tangente à une droite et à un plan.
— 14. passant par un point et tangente à deux droites et à un plan.
— 15. passant par un point et tangente à une droite et à deux plans.

On sait : 1° que le centre d'une sphère passant par deux points est situé sur le *lieu géométrique* des points de l'espace également distants des deux points donnés : et lorsqu'on suppose : 2° que la sphère passe par un point et se trouve tangente à

une droite et à un plan ; et 3° que la sphère est assujettie à être tangente à deux droites, ou à deux plans, ou à une droite et à un plan; on sait aussi que dans ces divers cas le centre de la sphère est toujours situé sur le *lieu géométrique* des points de l'espace également distants; 2° du point et de la droite, ou du point et du plan, et 3° ou des deux droites, ou des deux plans, ou de la droite et du plan.

La première chose à faire est donc de rechercher la nature géométrique de ces divers *lieux géométriques*, puisque nous devrons nous servir de ces *lieux* pour obtenir la solution des problèmes proposés.

## § I$^{er}$.

I. *Lieu géométrique des points de l'espace également distants de deux points donnés.*

Étant donnés deux points $m$ et $m'$ situés dans l'espace, on sait que la surface demandée est un plan P mené perpendiculairement à la corde qui unit les deux points et en son milieu.

II. *Lieu géométrique des points de l'espace également distants de deux plans donnés.*

Étant donnés deux plans Q et Q', on sait que la surface demandée est composée de deux plans P et $P_1$ passant par la droite intersection des deux plans donnés Q et Q', et divisant en deux parties égales, savoir : le plan P, l'angle $\alpha$ formé par les plans Q et Q' et le plan $P_1$ l'angle supplémentaire de $\alpha$.

Les deux plans P et $P_1$ sont rectangulaires entre eux.

Si les deux plans donnés Q et Q' sont parallèles, la surface ne se compose plus que d'un seul plan P équidistant des deux plans donnés et dès lors qui leur est parallèle; le second plan $P_1$ se trouve transporté à l'infini.

III. *Lieu géométrique des points de l'espace également distants de deux droites données.*

Étant données deux droites D et D', il peut se présenter deux cas.

PREMIER CAS. *Les deux droites étant situées dans un même plan.*

Lorsque deux droites D et D' sont situées dans un même plan X, on sait (*) que la surface se compose de deux plans P et $P_1$ passant par le point $d$ en lequel se coupent les droites données, ces deux plans étant perpendiculaires au

(*) *Voir* le chapitre IV de la *Théorie géométrique des engrenages*, etc., ouvrage que j'ai publié en 1842.

plan X et divisant en deux parties égales, le plan P, l'angle $\alpha$ des deux droites données D et D' et le plan $P_1$, l'angle supplémentaire de $\alpha$.

Si les deux droites D et D' sont parallèles, la surface se réduit à un seul plan P équidistant des deux droites données, le second plan $P_1$ se trouvant transporte à l'infini.

DEUXIÈME CAS. *Les deux droites n'étant pas situées dans un même plan.*

Lorsque deux droites D et D' ne sont pas situées dans un même plan, on sait que(*) la surface demandée n'est autre qu'un paraboloïde hyperbolique $\Sigma$, ayant son sommet situé au point $o$ milieu de la plus courte distance existant entre les deux droites données, et dont l'axe infini est dirigé suivant cette plus courte distance, et qui a pour ses génératrices droites, se croisant au sommet $o$, deux droites G et K qui sont rectangulaires entre elles et font des angles égaux avec les droites données. Les deux plans directeurs R et R' de la surface $\Sigma$ sont, l'un R perpendiculaire à la droite G, et l'autre R' perpendiculaire à la droite K.

Pour que le paraboloïde $\Sigma$ soit complétement déterminé, il faudra construire une seconde génératrice G' du système G ou une seconde génératrice K' du système K.

Pour cela, on mènera un plan X parallèle au plan R, ce plan sera perpendiculaire à la droite G et la coupera en un point $g$.

Les droites D et D' couperont ce plan X, la droite D en un point $a$ et la droite D' en un point $a'$.

Les droites D et D' se projetteront sur ce plan X pris pour plan horizontal de projection suivant deux droites $D^h$ et $D'^h$ qui seront parallèles et équidistantes du point $g$; de plus les deux droites D et D' feront des angles égaux avec le plan X.

En sorte qu'en prenant le plan qui passe par les droites G et K pour plan vertical de projection, les droites D, D' et G s'y projetteront suivant les droites $D^v$, $D'^v$, $G^v$, et la droite $G^v$ sera perpendiculaire à la ligne de terre et partagera en deux parties égales l'angle $\alpha$ formé par les droites $D^v$ et $D'^v$, cet angle $\alpha$ étant évidemment égal à celui que font entre elles les droites D et D' dans l'espace.

Cela posé :

Il faudra chercher sur le plan horizontal X un point $x$, tel qu'il soit également distant des deux droites D et D', et la droite $\overline{gx}$ ne sera autre que la droite K' cherchée.

(*) *Voir* le chapitre IV de la *Théorie géométrique des engrenages, etc.*

K′ étant déterminée, si l'on fait mouvoir la droite G sur K et K′ et parallèlement au plan X, on engendrera le paraboloïde Σ.

Or, pour construire ce point $x$, nous mènerons dans le plan X et par le point $a$ une droite N perpendiculaire à $D^h$, et nous chercherons sur N un point $x$ tel qu'il soit également distant du point $a$ et de la droite D′.

Cette même question devant se représenter dans la solution de plusieurs des quinze problèmes à résoudre, nous allons la traiter complétement

Problème 1. *Étant donnés dans l'espace un point* m *et une droite* D, *trouver sur une droite* B (*assujettie à couper la droite* D) *un point* X *également distant et de la droite* D *et du point* m.

Concevons le plan X passant par le point $m$ et la droite D.

Prenons ce plan X pour plan horizontal de projection (*fig.* 107).

Prenons pour plan vertical de projection un plan perpendiculaire à la droite D. La ligne de terre sera dès lors perpendiculaire à D.

Projetons sur les plans de projection la droite B et rappelons-nous qu'elle coupe la droite D; nous aurons $B^v$ et $B^h$.

Cela posé :

Concevons un point $x$ situé sur B; sa distance au point $m$ sera la droite $\overline{mx}$ et sa distance à la droite D sera la perpendiculaire N abaissée de ce point $x$ sur la droite C; dès lors la projection $N^h$ de cette perpendiculaire N sera perpendiculaire à D.

Désignons par $p$ le point en lequel le droites N et D se coupent, on devra avoir $\overline{mx} = \overline{px}$ et par suite $\overline{mx^h} = \overline{px^h}$.

Le problème de l'espace est donc ramené à un problème dans un plan, car il suffit de chercher sur la droite $B^h$ un point $x^h$ tel que ses distances au point $m$ et à la droite D soient égales.

Pour trouver ce point $x^h$, on peut employer deux constructions.

*Première construction.* Construisons la parabole $\mathfrak{G}$ ayant le point $m$ pour *foyer* et la droite D pour *directrice* (*fig.* 107); cette courbe $\mathfrak{G}$ coupera la droite $B^h$ en deux points ou en un seul point, ou ne la rencontrera pas.

Ainsi le problème aura deux solutions ou une seule solution ou aucune solution; cela dépendra des relations de position qui existeront dans l'espace entre le point $m$ et les droites D et B.

*Deuxième construction.* Le point $x^h$ (*fig.* 108), que l'on cherche sur $B^h$, est évidemment le centre d'un cercle C passant par le point $m$ et tangent à la droite D.

Le problème à résoudre est donc celui-ci :

*Construire un cercle* C *passant par un point* m, *tangent à une droite* D *et dont le centre soit situé sur une droite* $B^h$.

Pour résoudre ce problème, nous abaisserons du point $m$ une perpendiculaire sur $B^h$; cette perpendiculaire coupera $B^h$ en un point $q$ et D en un point $s$.

A partir du point $q$ nous prendrons un point $m'$ tel que l'on ait $\overline{qm} = \overline{qm'}$.

Évidemment le point $m'$ appartiendra au cercle C.

Il suffira donc de trouver le point en lequel le cercle C touche la droite D.

Désignons ce point par $y$. On devra avoir :

$$\overline{sy}^2 = \overline{sm} \cdot \overline{sm'}.$$

Il suffira donc de construire une moyenne proportionnelle aux droites $sm$ et $sm'$, et à porter cette moyenne proportionnelle de $s$ en $y$ ou de $s$ en $y'$ (à droite et à gauche du point $s$), et l'on aura en $y$ et $y'$ les points de contact de deux cercles C et C' passant par le point $m$ ayant leur centre sur $B^h$ et tangents à la droite D, l'un au point $y$ et l'autre au point $y'$.

Pour construire les centres de ces cercles C et C', il suffira d'élever en $y$ et en $y'$ des perpendiculaires à D, lesquelles couperont $B^h$, la première en un point $x^h$ et la seconde en un point $x'^h$, et ces points seront les centres, le premier du cercle C, et le second du cercle C'.

Si le point $s$ est situé entre les points $m$ et $m'$, le problème est impossible.

Si le point $m'$ n'est autre que le point $s$, ce point $m'$ est le point de contact du cercle cherché et de la droite D, et le problème n'a qu'une seule solution.

Problème 2. *Étant donnés deux droites* B *et* D *qui ne se rencontrent point dans l'espace et un point* m *sur la droite* B, *chercher sur cette même droite* B, *un point* x *tel que ses distances au point* m *et à la droite* D *soient égales.*

Par le point $m$ et la droite D, nous ferons passer un plan X, que nous prendrons pour plan horizontal de projection, dès lors nous connaîtrons sur ce plan X la droite $B^h$ projection de B, et en prenant un plan vertical de projection perpendiculaire à D, nous connaîtrons $B^v$.

Ainsi sont écrites *graphiquement* les données de la question, et le problème proposé dans l'espace se trouve ramené à un problème dans le plan, car il suffit de chercher sur $B^h$ un point $x^h$ tel que les distances à ce point $m$ et à la droite D soient égales.

Pour trouver ce point $x^h$ il suffira de mener par le point $m$ et dans le plan X une droite K perpendiculaire à $B^h$, laquelle coupera D en un point $s$. On divisera

l'angle (K, D) en deux parties égales par une droite L, qui coupera $B^h$ au point $x^h$ demandé.

Et comme les droites K et D font deux angles supplémentaires l'un de l'autre, on aura deux droites K et par suite deux points $x^h$, et le problème aura toujours deux solutions.

La solution du premier problème nous servira plus tard, lorsque nous résoudrons les problèmes relatifs à la sphère, et dans lesquels les *données* sont des *points* et des *plans*.

Quant au second problème, il est posé en des termes trop généraux pour le cas qui précédemment devait être résolu.

Car on doit remarquer que les données de la question étaient telles que les droites B et D sont rectangulaires entre elles.

Dès lors, si par B on mène un plan perpendiculaire à D, il sera perpendiculaire à tout plan passant par D et par conséquent au plan X passant par D et le point $m$ : dès lors $B^h$ sera perpendiculaire à D (*fig.* 109).

Il suffira donc, pour résoudre le problème, de prendre le point $p$ en lequel $B^h$ coupe D et de prendre le milieu de $\overline{pm}$, et l'on aura le point $x^h$ demandé.

Et dans ce cas tout particulier, le problème n'a plus qu'une seule solution et en a toujours une.

Nous avons dit précédemment que le *lieu géométrique* des points de l'espace également distants des deux droites situées ou non situées dans un même plan était connu.

Et nous avons, dans une note au bas de la page, renvoyé à un ouvrage publié en 1842, dans lequel la solution se trouve exposée. Cette solution a été donnée dans cet ouvrage en employant l'*analyse* de DESCARTES; nous reproduirons à la fin de ce chapitre la même question, et nous la traiterons encore par l'*analyse*, mais avec plus de développements que dans l'ouvrage cité.

Toutefois, il n'est pas sans intérêt et aussi parce que cela rentre tout à fait dans nos idées, de faire voir que la *géométrie descriptive* n'est pas aussi *bornée* qu'on paraît trop généralement le supposer et de donner ici une démonstration purement *géométrique* relativement à la nature *géométrique* de ces *lieux*, en employant les méthodes *graphiques* que nous fournit la *géométrie descriptive*.

Car d'ailleurs, on sera ainsi conduit à mieux apprécier la différence qui existe entre l'esprit des méthodes *analytiques* et l'esprit des méthodes *graphiques*.

Et il faut bien le reconnaître, l'*intelligence* ne travaille pas de la même manière lorsqu'on cherche la solution d'un problème par l'*analyse*, ou qu'on la cherche par la *géométrie descriptive*.

*Lieu des points de l'espace également distants :*

1° *De deux droites qui se coupent.*

Soient données deux droites $D_1$ et $D_2$ se coupant en un point $s$ (*fig.* 110).

Désignons le plan de ces deux droites par P, et par $\alpha$ l'angle que ces droites comprennent entre elles.

Traçons dans le plan P deux droites B et B′ divisant en deux parties égales, l'une l'angle $\alpha$ et l'autre l'angle $\alpha'$ supplémentaire de $\alpha$.

Je dis que tous les points des droites B et B′ sont également distants des deux droites $D_1$ et $D_2$.

Et en effet :

Prenons sur B un point quelconque $m$, abaissons de ce point deux perpendiculaires $my$ et $my'$ sur $D_1$ et $D_2$, ces deux perpendiculaires seront les distances du point $m$ aux droites $D_1$ et $D_2$, et ces perpendiculaires seront égales, puisque les triangles $sym$ et $sy'm$ sont évidemment égaux. On pourra en dire autant de chaque point de B et B′, donc, etc.

Cela posé :

Menons par le point $m$ une droite K perpendiculaire au plan P. Prenons sur K un point arbitraire $z$.

Le plan passant par le point $z$ et la droite $my$ sera perpendiculaire à $D_1$ et coupera $D_1$ au point $y$; de même, le plan passant par le point $z$ et la droite $my'$ sera perpendiculaire à $D_2$ et coupera $D_2$ au point $y'$; dès lors, $zy$ et $zy'$ sont respectivement perpendiculaires à $D_1$ et $D_2$ et mesurent la distance du point $z$ à chacune de ces droites $D_1$ et $D_2$.

Or, les triangles rectangles $zym$ et $zy'm$ sont égaux, donc : $zy = zy'$ ; donc tous les points de la droite K sont également distants des deux droites $D_1$ et $D_2$.

En faisant mouvoir la droite K sur B et parallèlement à elle-même, on engendrera un plan R dont tous les points seront également distants des deux droites $D_1$ et $D_2$.

Par les mêmes raisons le plan R′ passant par B′ et perpendiculare au plan P aura tous ses points également distants des deux droites $D_1$ et $D_2$.

Les deux plans R et R′, *lieu des points également distants des deux droites données*, se couperont suivant une droite L passant par le point $s$ et perpendiculaire au plan P.

2° *De deux droites non situées dans un même plan.*

Soient données deux droites D et D′ non situées dans un même plan. Nous

Nous pourrons mener dans le plan X une suite de droites I, I', I''..... parallèles à I, et pour chacune d'elles construire les points $o$, $o'$, $o''$,..... dont les distances aux droites D et D' seront égales. Tous ces points formeront une *ligne* $\xi$.

Nous pourrons mener une suite de plans X, X', X'',..... parallèles entre eux, et pour chacun d'eux nous aurons une *ligne* $\xi$, $\xi'$, $\xi''$...... Toutes ces *lignes* formeront une surface $\Sigma$ qui sera le *lieu* des points de l'espace également distants des deux droites données D et D'.

Remarquons que toutes ces *lignes* $\xi$, $\xi'$, $\xi''$..... s'appuient toutes sur la droite B; et, en effet, le point $m$ en lequel le plan X coupe la droite B est également distant des droites D et D'. C'est ce qu'il est facile de voir en supposant que la droite I passe par le point $m$; en opérant comme nous l'avons fait ci-dessus, on verra que les points $o$ et $g$ se confondent dans ce cas particulier.

Ce que nous venons de faire par rapport à la droite B, nous pouvons le faire par rapport à la droite B' en menant des plans $X_1$, $X_1'$, $X_1''$, parallèles entre eux et perpendiculaires à B', et nous trouverions encore une suite de *lignes* $\xi_1$, $\xi_1'$, $\xi_1''$,..... situées sur la surface $\Sigma$ et chacune d'elles passant par un point de la droite B'.

Cela posé :

Cherchons la *nature géométrique* de ces diverses *lignes* $\xi$, $\xi'$, $\xi''$,..... et $\xi_1$, $\xi_1'$, $\xi_1''$.....; mais pour y parvenir il est nécessaire d'établir plusieurs *remarques préliminaires*.

### *Remarques préliminaires.*

(ART. 1$^{er}$). Concevons la suite de plans parallèles au plan horizontal, X, X', X''..... (*fig.* 112), chacun de ces plans coupera les droites D et D' en des points qui seront unis par une droite horizontale s'appuyant sur la droite B, et qui formeront un paraboloïde hyperbolique.

Par chacun des points $m$, $m'$, $m''$,..... de la droite B, menons des plans perpendiculaires aux droites D et D', ainsi :

Par le point $m$ passeront deux plans N et N' respectivement perpendiculaires à D et D'.

Par le point $m'$ passeront deux plans $N_1$ et $N_1'$ aussi perpendiculaires à D et D'.
Par le point $m''$ passeront deux plans $N_2$ et $N_2'$, aussi perpendiculaires à D et D'.
Et ainsi de suite.

Les plans N, $N_1$, $N_2$,..... couperont la droite D en des points $z$, $y$, $u$.....
Les plans N', $N_1'$, $N_2'$,..... couperont la droite D en des points $z'$, $y'$, $u'$.....
Les plans N et N' se couperont suivant une droite I passant par le point $m$.

Les plans $N_1$ et $N_1'$ se couperont suivant une droite $I_1$ passant par le point $m'$.

Les plans $N_2$ et $N_2'$ se couperont suivant une droite $I_2$ passant par le point $m''$.

Et ainsi de suite.

Et toutes les droites $I$, $I_1$, $I_2$,..... seront perpendiculaires à la droite B, et perpendiculaires au plan vertical de projection.

Cela posé :

Faisons tourner les plans N et N′ autour de la droite I pour les amener dans le plan X.

Faisons tourner les plans $N_1$ et $N_1'$ autour de la droite $I_1$ pour les amener dans le plan X′.

Et ainsi de suite.

Les points $y$ et $y'$ viendront en $y_1$ et $y_1'$ sur le plan X.

Les points $z$ et $z'$ viendront en $z_1$ et $z_1'$ sur le plan X′.

Et ainsi de suite.

Et il est évident que les droites $z_1z_1'$, $y_1y_1'$,..... se projetteront sur le plan horizontal en des droites $z_1^hz_1'^h$, $y_1^hy_1'^h$..... qui se croiseront toutes au point $B^h$ projection de la droite B.

(Art. 2). Concevons un seul plan X (*fig.* 113), et dans ce plan une suite de droites I, I′, I″, I‴, parallèles entre elles, équidistantes et perpendiculaires au plan vertical de projection ; supposons d'ailleurs que la droite I passe par le point $m$ en lequel la droite B est coupée par le plan X.

Menons par chacune de ces droites deux plans, l'un perpendiculaire à la droite D, l'autre à la droite D′. Dès lors on aura, sur le plan vertical de projection, une suite de droites perpendiculaires à $D'^v$, et dont les portions $I^va$, $I'^va'$, $I''^va''$,..... comprises entre les droites $D'^v$ et $V^x$, iront toutes en diminuant, la différence entre la première et la suivante étant constante et égale à : $\overline{ae}$.

De même les portions de droites $I^vb^v$, $I'^vb'$, $I''^vb''$,... perpendiculaires à $D^v$ iront toutes en augmentant, et la différence entre la première et la suivante sera constante et égale à : $\overline{b^vd^v}$.

Mais les deux triangles rectangles $a'ae$ et $b'b^vd^v$ sont égaux, ainsi l'on a $\overline{b^vd^v} = \overline{ae}$.

La somme des perpendiculaires abaissées d'un même point sera donc constante et l'on aura :

$$\overline{I^va} + \overline{I^vb^v} = \overline{I'^va'} + \overline{I'^vb'} = \overline{I''^va''} + \overline{I''^vb''} = \text{etc.} = A.$$

Dans le triangle $a'ae$ rectangle en $a$, on a l'hypoténuse $\overline{a'e} = \overline{I^vI'^v}$, et cette distance $\overline{I^vI'^v}$ est celle qui existe entre deux positions successives des droites I, I′, I″,.....; désignons par $l$ cette distance.

Dans le même triangle, *ae* est la différence qui existe entre deux perpendiculaires, successives, menées à D''; et en désignant par $\alpha$ l'angle compris entre D' et D'', on aura :

$$\overline{ae} = \overline{a'e} . \cos \widehat{aea'} \text{ ou } \overline{ae} = l . \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ce qui précède étant compris, revenons au problème à résoudre et démontrons que les *lignes* $\xi$, $\xi'$,..... et $\xi_{,}$, $\xi_{,}'$,..... sont des *droites*.

Concevons les deux plans $N_{,}$ et $N_{,}'$ respectivement perpendiculaires aux droites D et D' et se coupant suivant la droite I' située dans le plan horizontal X qui coupe la droite B en un point *m*.

Le plan $N_{,}$ coupera la droite D en un point $y_{,}$, et le plan $N_{,}'$ coupera la droite D' en un point $y_{,}'$; concevons sur la droite I' le point $o'$ également distant des deux points $y_{,}$ et $y_{,}'$.

Désignons par $p'$ le point en lequel la droite I' perce le plan P' vertical et passant par D', et par $p$ le point en lequel I' perce le plan P vertical et passant par D; nous aurons deux triangles $o'p'y_{,}'$ et $o'py_{,}$.

Faisons glisser le système des deux plans $N_{,}$ et $N_{,}'$ parallèlement à lui-même jusqu'à ce que la droite I' se superpose sur la droite I passant par le point *m*, et concevons par ce point *m* deux plans N et N' perpendiculaires à D et D'. Les plans N et $N_{,}$, N' et $N_{,}'$ se superposent.

En cette position, faisons tourner les plans N et $N_{,}$ (qui sont superposés) autour de I pour les amener dans le plan X; faisons ensuite la même opération pour les plans superposés N' et $N_{,}'$.

Cela posé, il est évident que les points en lesquels viendront se placer sur le plan horizontal X, les points $y_{,}$ et $y_{,}'$ seront unis par une droite qui se projettera sur le plan horizontal de projection, suivant la droite $q.d_{,}^{h}$ (*fig.* 113), et l'on aura : $s'q + sd_{,}^{h} =$ constante $=$ A, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus (art. 1°) et les points en lesquels viendront se placer sur le plan X les points en lesquels les plans N' et $N_{,}$ coupent les droites D et D' seront sur une droite qui se projettera sur le plan horizontal de projection suivant la droite $pb_{,}^{h}$, et l'on aura : $s'p + sb_{,}^{h} =$ constante $=$ A, en vertu de ce qui a été dit précédemment (art. 1°).

Les droites $pb_{,}^{h}$ et $qd_{,}^{h}$ seront donc parallèles.

En vertu du transport des plans normaux $N_{,}$ et $N_{,}'$, le point $o_{,}$ sera venu en un point $o_{,}'$ situé sur I, et dont on déterminera la projection $o_{,}'^{h}$ en menant sur le milieu *r* de la droite $qd_{,}^{h}$ une perpendiculaire à cette droite $qd_{,}^{h}$ et qui viendra couper la droite $I^{h}$ au point $o_{,}'^{h}$, et en ramenant le point $o_{,}'^{h}$ parallèlement à la ligne de terre et d'une quantité égale à *l*, on aura le point $o'^{h}$.

Or, faisant pour chacune des droites I″, I‴,..... ce que nous venons de faire pour I′, on voit que l'on aura pour le *lieu* des points $o''^h$, $o'''^h$, $o''''^h$ une droite passant par $m^h$, car le rapport $\frac{m^h o_1'^h}{o_1'^h o'^h}$ est constant.

Remarquons que la longueur $\overline{m^h o_1'^h}$ dépend 1° de l'angle que la droite $m^h b_1^h$ fait avec la droite $ss'$, et 2° de la quantité $\overline{m^h r}$ qui est égale à $\overline{b_1^h d_1^h}$ qui elle-même est égale à $\overline{b^v d^v}$ ou à $\left(l \,.\, \cos .\, \frac{\alpha}{2}\right)$; et la quantité $\overline{o'^h o_1'^h}$ est égale à $l$.

Lorsque l'on prendra un autre plan $X_1$ la droite analogue de $pb_1^h$ fera un angle différent avec $ss'$, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus (art. 2), mais la quantité analogue de $m^h r$ restera la même, car l'on peut supposer $l$ constant pour toutes les droites I, I′, tracées successivement dans les plans X, X′, X″.....

Ainsi dans chaque plan X, X′, X″,..... on obtiendra une suite de *droites* ξ, ξ′, ξ″,..... qui s'appuieront toutes sur la droite B et qui feront avec la plus courte distance $ss'$ des angles différents entre eux.

La surface Σ est donc réglée.

Mais ce que nous venons de dire en considérant des plans X, X′, X″, perpendiculaires à B, nous pourrons le dire, en considérant des plans $X_1$, $X_1'$, $X_1''$, perpendiculaires à B′, la surface Σ est donc *doublement* réglée et elle a deux plans *directeurs*, elle est donc un *paraboloïde hyperbolique*.

IV. *Lieu géométrique des points de l'espace également distants d'un point et d'un plan.*

Étant donnés un point $m$ et un plan P, on peut par le point $m$ faire passer une infinité de plans Y, Y′, Y″, perpendiculaires au plan P; tous ces plans Y, Y′, Y″, se couperont suivant une droite R perpendiculaire au plan P et passant par le point $m$.

Chaque plan Y coupera le plan P suivant une droite A, et si l'on considère sur le plan Y un point $x$, et que l'on veuille connaître sa distance au plan P, il suffira d'abaisser de ce point $x$ une perpendiculaire D sur A, laquelle sera parallèle à la droite R, et par suite sera perpendiculaire au plan P.

Or, le lieu géométrique des points $x$ qui, situés sur le plan Y, sont également distants du point $m$ et de la droite A est une parabole 𝔊 ayant le point $m$ pour *foyer* et la droite A pour *directrice*; sur chaque plan Y′, Y″, Y‴,..... nous trouverons une parabole 𝔊′, 𝔊″, 𝔊‴, et évidemment toutes ces *paraboles* sont identiques, car elles ont même *paramètre*; le lieu de toutes ces paraboles sera un *paraboloïde* de révolution ayant la droite R pour axe infini ou de rotation et le point $m$ pour *foyer* et le plan P pour plan *directeur*.

V. *Lieu géométrique des points de l'espace également distants d'un point et d'une droite.*

Étant donnés un point $m$ et une droite D, on peut faire passer par ce point et cette droite un plan X. Sur ce plan le lieu des points également distants du point $m$ et de la droite D sera une parabole $\beta$ ayant le point $m$ pour *foyer* et la droite D pour *directrice*.

Imaginons un cylindre B ayant pour base la courbe $\beta$, et ayant ses génératrices droites perpendiculaires au plan X. Prenons sur ce cylindre B un point $x$, et considérons le plan X comme un plan horizontal de projection.

Le point $x$ se projettera en $x^h$ sur la courbe $\beta$, et la droite $mx$ se projettera en $mx^h$. La perpendiculaire menée du point $x$ à la droite D coupera cette droite en un point $p$; et la droite $px^h$, projection de la droite $px$ de l'espace, sera perpendiculaire à D.

Or, la courbe $\beta$ étant une parabole, on aura :

$$\overline{mx^h} = \overline{px^h}.$$

D'où l'on doit conclure que $\overline{mx} = \overline{px}$.

Donc tous les points $x$ du cylindre B seront également distants du point $m$ et de la droite D.

VI. *Lieu géométrique des points de l'espace également distants d'une droite et d'un plan.*

Étant donnés une droite D et un plan P, il peut arriver deux cas, la droite D peut être parallèle au plan P ou percer ce plan.

Premier cas. *La droite D étant parallèle au plan P.*

Menons un plan X perpendiculaire à la droite D. Ce plan coupera D en un point $m$ et le plan P suivant une droite A. Sur ce plan X le lieu des points également distants du point $m$ et de la droite A sera une parabole $\beta$ ayant $m$ pour *foyer* et A pour *directrice*, et de plus, il faut bien le remarquer, si l'on prend un point $x$ sur $\beta$, et si l'on mène de ce point $x$ une perpendiculaire $xp$ sur A, les droites $mx$ et $xp$ seront égales, et de plus $mx$ sera perpendiculaire à la droite D et $xp$ sera perpendiculaire au plan P. Les points de la parabole $\beta$ satisferont donc au problème proposé.

Pour tous autres plans X′, X″, X‴,..... perpendiculaires à la droite D, on trouvera des paraboles $\beta'$, $\beta''$, $\beta'''$,..... satisfaisant à la question. Évidemment toutes ces paraboles ont même *paramètre*, et sont parallèles entre elles; elles forment donc un cylindre B ayant la parabole $\beta$ pour base et section droite, et ayant ses

génératrices droites parallèles à la droite D. La surface demandée sera donc un *cylindre parabolique*.

Deuxième cas. *La droite* D *perçant le plan* P.

Étant donnés une droite D et un plan P, nous pourrons toujours prendre le plan P pour plan horizontal de projection.

Désignons par $a$ le point en lequel la droite D perce le plan P. Menons par D un plan X perpendiculaire à P. Ce plan X coupera P suivant une droite A, et si l'on divise en deux parties égales l'angle $\alpha$ que font les droites D et A, on aura une droite G, dont tous les points seront également distants de la droite G et du plan P; la droite K qui divisera en deux parties égales l'angle supplémentaire de $\alpha$ satisfera aussi à la question, et les deux droites G et K sont évidemment rectangulaires entre elles.

Cela posé, menons par le point $a$ une droite arbitraire L faisant avec D un angle $\alpha'$, on fera tourner L autour de D et l'on aura un cône de révolution $\Delta$ ayant D pour axe de rotation, et son demi-angle au sommet égal à $\alpha'$.

Menons par le point $a$ une droite Z perpendiculaire au plan P.

Et par le point $a$ une droite $L_1$ faisant avec Z un angle complémentaire de $\alpha'$; la droite $L_1$, en tournant autour de Z, engendrera un cône $\Delta_1$ qui sera de révolution, et dont toutes les génératrices feront avec le plan P un angle $\alpha'$.

Les deux cônes $\Delta$ et $\Delta_1$ ayant même sommet $a$, se couperont suivant deux génératrices droites, ou se toucheront, ou ne se couperont pas.

Or, il est évident 1° que les deux cônes se toucheront, lorsque l'angle $\alpha'$ sera égal à l'angle $\alpha$ que la droite D fait avec le plan P; 2° que les deux cônes ne se couperont pas, lorsque l'on prendra $\alpha'$ plus petit que $\alpha$; et 3° que les deux cônes se couperont toujours suivant deux génératrices droites, lorsque l'on prendra $\alpha'$ plus grand que $\alpha$.

Les deux génératrices d'intersection, l'une G' et l'autre K', satisferont à la question.

Ainsi la surface demandée est une surface conique ayant le point $a$ pour sommet, et il sera facile de construire autant de génératrices droites, que l'on voudra, de cette surface conique.

Cherchons maintenant la nature *géométrique* de cette surface conique. Rappelons-nous que la surface lieu des points de l'espace également distants d'un point et d'un plan, est un *paraboloïde* de révolution ayant le point pour *foyer* et le plan pour *plan directeur*.

Menons par un point $m$, arbitrairement pris sur la droite D, un plan $\gamma$ perpendiculaire à D.

Construisons la surface paraboloïde $\psi$, ayant le point $m$ pour *foyer* et le plan P pour *plan directeur;* le plan $\gamma$ coupera la surface $\psi$ suivant une section conique, qui sera une ellipse, ou un cercle, ou une parabole $6$; cette courbe sera telle, que si l'on prend un de ses points $x$ et que de ce point $x$ l'on abaisse une perpendiculaire $xp$ sur le plan P, et que l'on mène la droite $xm$, on aura $\overline{xm} = \overline{xp}$; et comme la droite $\overline{xm}$ est dans le plan $\gamma$, elle sera perpendiculaire à la droite D; tous les points $x$ de $6$ seront donc également distants du plan P et de la droite D; on pourra faire des constructions analogues pour tout autre point $m'$, $m''$, $m'''$,..... de la droite D.

La surface conique, lieu des points de l'espace également distants de la droite D et du plan P, est donc un cône du second degré. Mais si l'on remarque que l'axe du paraboloïde $\psi$ est perpendiculaire au plan P, on voit de suite que le plan $\gamma$, perpendiculaire à la droite D, coupera toujours la surface $\psi$ suivant une *ellipse*, qui aura pour l'un de ses axes la droite unissant les points en lesquels les deux droites G et K seront coupées par ce même plan $\gamma$.

Passons maintenant à la solution de chacun des quinze problèmes proposés.

Problème 1. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par quatre points.*

Désignons les quatre points donnés par $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$.

On mènera sur le milieu des cordes $m_1m_2$, $m_1m_3$, $m_1m_4$, qui se coupent en un même point $m_1$, des plans Q, Q', Q'', respectivement perpendiculaires à ces cordes.

Ces trois plans se couperont en un point $o$, qui sera le *centre* de la sphère, et a droite $om_1$ en sera le *rayon*.

On aura donc toujours une solution et une seule.

Si les quatre points sont sur un même plan, il faudra considérer les divers plans menés perpendiculairement sur le milieu de toutes les cordes données, en unissant deux à deux les quatre points. Si tous les plans se coupent suivant une seule droite D, le problème aura une infinité de solutions; la droite D sera le *lieu* des centres de l'infinité de sphères passant par les quatre points donnés, qui dans ce cas particulier seront situés sur une circonférence de cercle.

Si les plans ne se coupent pas suivant une droite unique, le problème n'a pas de solution possible, et, dans ce cas, les quatre points donnés ne sont pas situés sur une circonférence de cercle.

Problème 2. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par trois points et tangente à une droite.*

Désignons les trois points par $m_1$, $m_2$, $m_3$ et la droite par D.

Le lieu géométrique pour deux points sera un plan P, et pour un point et la droite ce *lieu* sera un cylindre parabolique.

Nous construirons donc deux plans P et P′ perpendiculaires sur le milieu des cordes $\overline{m_1m_2}$, $\overline{m_1m_3}$.

Ces deux plans P et P′ se couperont suivant une droite I, laquelle sera le lieu du *centre* de la sphère.

Par le point $m_1$ et la droite D nous mènerons un plan X et dans ce plan nous construirons une parabole $\mathcal{G}$ ayant le point $m_1$ pour *foyer* et la droite D pour *directrice*, et le cylindre B ayant $\mathcal{G}$ pour section droite sera coupé par la droite I en des points qui seront les *centres* des sphères demandées et la distance de chaque centre à l'un des points donné sera le *rayon* demandé.

La droite I peut : 1° ne pas rencontrer le cylindre parabolique B; 2° le percer en deux points; 3° le percer en un seul point.

Le problème peut donc ne pas avoir de solution possible, ou avoir deux solutions ou une seule solution.

Pour construire les *centres* avec facilité, on fera passer par la droite I un plan perpendiculaire au plan X et qui coupera ce plan X suivant une droite H.

1° Si la droite H ne coupe pas la parabole $\mathcal{G}$, c'est que la droite I ne perce pas le cylindre B.

2° Si la droite H est parallèle à l'axe de la parabole $\mathcal{G}$, elle ne coupera cette courbe qu'en un point, et la droite I percera le cylindre B en un seul point.

3° Si la droite H n'est pas parallèle à l'axe de la parabole $\mathcal{G}$, elle coupera cette courbe en deux points et la droite I percera le cylindre B en deux points.

On doit d'ailleurs remarquer que dans ce qui précède on suppose que la droite I n'est pas parallèle aux génératrices droites du cylindre B, cas pour lequel les données du problème seraient évidemment telles que les trois points et la droite seraient situés dans un même plan. Dans ce cas le problème ne serait possible, et aurait dès lors une infinité de solutions, qu'autant que le cercle C passant par les trois points donnés serait tangent à la droite donnée; l'on aurait dans ce cas une infinité de sphères s'entre-coupant suivant le même cercle C.

Problème 3. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par deux points et tangente à deux droites.*

Désignons par $m_1$ et $m_2$ les points donnés, et par $D_1$ et $D_2$ les droites données.

Le centre cherché sera d'abord sur un plan P mené perpendiculairement à la corde $\overline{m_1m_2}$ et en son milieu.

Le centre sera encore sur deux cylindres $B_1$ et $B_2$, le premier ayant pour section droite une parabole $\mathcal{G}_1$ ayant le point $m_1$ pour *foyer* et la droite $D_1$ pour *directrice*,

et le second ayant pour section droite une parabole $\mathfrak{G}_2$ ayant le point $m_2$ pour *foyer* et la droite $D_2$ pour directrice.

Ces deux cylindres $B_1$ et $B_2$ se couperont suivant une courbe à double courbure V, laquelle sera coupée en général par un plan suivant quatre points, puisque la courbe intersection de deux cylindres du second degré est du quatrième degré.

Ainsi, *en général*, le problème peut avoir quatre solutions; comme *cas particuliers*, il peut se présenter les données suivantes.

Premier cas. *La droite* K *qui unit les deux points* $m_1$ *et* $m_2$ *rencontre et coupe la droite* $D_1$.

Dans ce cas on pourra construire deux cercles C et C′ passant par les points $m_1$ et $m_2$ et tangents à la droite $D_1$.

Désignons par $o$ et $o'$ les centres des cercles C et C′, et par Y le plan qui contient les points $m_1$ et $m_2$ et la droite D.

Menons par les centres $o$ et $o'$ des droites L et L′ perpendiculaires au plan Y.

Pour déterminer les centres des sphères, il faudra chercher sur les droites L et L′ les points également distants de la droite $D_2$ et de l'un des deux points $m_1$ et $m_2$.

On construira donc la parabole $\mathfrak{G}$ ayant $m_1$ pour *foyer* et $D_2$ pour *directrice*, et l'on retombera sur le deuxième problème.

Chacune des droites L et L′ pourra couper le cylindre B ayant $\mathfrak{G}$ pour section droite, en deux points.

On pourra donc avoir dans ce cas quatre solutions,

Et ainsi quatre sphères, dont deux se couperont suivant le cercle C et deux suivant le cercle C′.

Deuxième cas. *Les deux droites* $D_1$ *et* $D_2$ *rencontrent et coupent la droite* K *qui unit les deux points* $m_1$ *et* $m_2$.

Dans ce cas on pourra construire quatre cercles passant par les points $m_1$ et $m_2$ et tangents, savoir : deux à la droite $D_1$ et deux à la droite $D_2$.

Désignons par $C_1$ et $C_1'$ les cercles tangents à $D_1$, et par $C_2$ et $C_2'$ les cercles tangents à $D_2$; désignons par Y le plan des cercles $C_1$ et $C_1'$ et par Y′ le plan des cercles $C_2$ et $C_2'$.

On sait que lorsque deux cercles ont une corde commune ils peuvent toujours être situés sur une sphère.

On aura donc dans ce cas quatre solutions, car on aura quatre sphères passant par $C_1$ et $C_2$, ou $C_1$ et $C_2'$, ou $C_1'$ et $C_2$ ou $C_1'$ et $C_2'$.

Dans les deux cas particuliers précédents, il faut supposer que la droite $D_1$ ou les deux droites $D_1$ et $D_2$ coupent la droite K en un point situé extérieurement par rapport aux points $m_1$ et $m_2$; car si cela n'avait pas lieu, le problème proposé serait impossible avec les *données*.

**Problème 4.** *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par un point et tangente à trois droites.*

Désignons le point par $m$, et les droites par $D_1$, $D_2$, $D_3$.

On construira trois paraboles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ ayant le point $m$, pour *foyer* commun, et ayant respectivement pour *directrices*, les droites $D_1$, $D_2$, $D_3$.

Les cylindres B, B′, B″ ayant respectivement pour sections droites les paraboles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ s'entre-couperont en général en huit points.

Il y aura donc en général huit sphères, et le *rayon* sera, pour chacune, égal à la distance du point $m$, à l'un des huit points *centres*.

**Problème 5.** *Construire le centre et le rayon d'une sphère tangente à quatre droites.*

Désignons par $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ les quatre droites données.

Nous construirons les paraboloïdes hyperboliques *lieux* des points de l'espace également distants des droites $D_1$ et $D_2$, $D_1$ et $D_3$, $D_1$ et $D_4$.

Ces trois surfaces $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$ se couperont en général en huit points qui seront les centres de huit sphères.

On abaissera de chaque centre une perpendiculaire sur la droite $D_1$ et l'on aura la longueur du *rayon*.

Comme cas particulier, il peut se faire que les quatre droites se coupent deux à deux et forment dès lors un quadrilatère gauche.

Dans ce cas la solution est simple et facile, car si nous désignons par D et D′, $D_1$ et $D_1'$ les côtés opposés d'un quadrilatère gauche et par $s$, $s'$, $s''$, $s'''$ ses quatre sommets, $s$ étant le point de rencontre des côtés D et $D_1$, $s'$ celui des côtés $D_1$ et D′, $s''$ celui des côtés D′ et $D_1'$ et $s'''$ celui des côtés $D_1'$ et D.

Il suffira de mener 1° un plan P passant par le point $s$ et divisant l'angle intérieur des droites D et $D_1$ en deux parties égales, ce plan étant d'ailleurs perpendiculaire à celui des deux droites D et $D_1$.

2° Un plan P′ passant par le point $s'$ et divisant l'angle intérieur des droites $D_1$ et D′ et perpendiculaire à leur plan.

3° Un plan P″ passant par le point $s''$ et divisant l'angle intérieur des droites D′ et $D_1'$ et perpendiculaire à leur plan.

Les trois plans P, P′, P″ se couperont en un point $o$, qui sera le centre de la sphère *intérieure* touchant les quatre droites données en des points situés sur les portions des quatre droites qui forment les côtés du quadrilatère gauche. Mais si l'on remarque que les côtés d'un quadrilatère étant prolongés, il a, outre les angles *intérieurs* les angles *extérieurs*, et que dès lors on peut diviser ces angles comme les premiers, on devra :

Concevoir les deux plans P et Q passant par le point $s'$, rectangulaires entre eux et qui sont respectivement les lieux des points de l'espace, également distants des droites D et $D_{,}$.

On aura donc en chacun des sommets deux plans à considérer, et ainsi on aura à considérer en $s'$ les plans rectangulaires P' et Q', et en $s''$ les plans rectangulaires P'' et Q''.

Il faudra combiner ces six plans et de la manière suivante :

Les plans P et P' se couperont suivant une droite I.
Q et Q'. . . . . . . . . . . . . . . . . I'.
P et Q'. . . . . . . . . . . . . . . . . I''.
P' et Q. . . . . . . . . . . . . . . . . I'''.

Chacune de ces quatre droites sera coupée en un point par les plans P'' et Q''.

On aura donc en tout huit points qui seront les *centres* de huit sphères tangentes aux quatre droites indéfinies D, D', $D_{,}$, $D'_{,}$, et la sphère dont le centre est le point de rencontre des trois plans P, P', P'', sera celle qui sera tangente au quadrilatère gauche formé par les quatre droites indéfinies.

Par conséquent le problème étant énoncé ainsi :

*Inscrire une sphère dans un quadrilatère gauche.*

N'a, en général, qu'une seule solution.

Et le problème étant énoncé ainsi :

*Construire une sphère tangente à quatre droites, qui se coupent deux à deux et interceptent entre elles un quadrilatère gauche.*

Aura en général huit solutions.

Nous venons de dire que le problème : *Inscrire une sphère dans un quadrilatère gauche*, n'avait, *en général*, qu'une seule solution.

Nous avons dû employer cette locution, puisque, dans certains cas, le problème peut avoir une infinité de solutions, ou aucune solution.

Et, en effet :

1° Concevons un quadrilatère plan, et supposons que ce quadrilatère est un parallélogramme oblique ou rectangulaire *aba'b'*, *fig.* 114. Il est évident que les quatre plans P, P', Q, Q', qui diviseront en deux parties égales chacun des angles intérieurs de ce polygone, se couperont deux à deux suivant quatre droites parallèles entre elles A, A', A'', A''', et dès lors il est évident que, dans ce cas, le problème ne peut avoir de solution, ou, en d'autres termes, que le centre de la sphère est situé à l'infini, au point en lequel les quatre droites parallèles A, A', A'', A''', se coupent.

2° Concevons un losange, *fig.* 115. Les plans P et P' se confondront ainsi que les

plans Q et Q', et dès lors on aura une seule droite d'intersection A, dont chacun des points pourra être considéré comme le centre d'une sphère tangente aux côtés du losange. On aura donc, dans ce cas, une infinité de solutions.

Si le quadrilatère au lieu d'être plan était gauche, des cas analogues pourraient se présenter. Ainsi, si le quadrilatère gauche a ses quatre côtés égaux, on se trouvera dans un cas analogue à celui du losange, et le problème aura une infinité de solutions.

Nous devons aussi faire remarquer que, lorsque nous énonçons le problème ainsi : *Inscrire une sphère dans un quadrilatère gauche*, nous n'entendons pas que les points de contact de la sphère et des côtés du quadrilatère seront placés sur les côtés mêmes du quadrilatère ; car avec une *semblable restriction*, le problème ne serait possible que dans un petit nombre de cas, et, en effet :

Concevons un quadrilatère gauche $aa'bb'$, les côtés opposés étant $ab$, $a'b'$ et $aa'$, $bb'$.

Deux côtés adjacents formeront un plan.

Nous désignerons par A le plan des côtés $ab$ et $aa'$,

Par A' le plan des côtés $a'b$ et $a'b'$,

Par B le plan des côtés $ba$ et $bb'$,

Par B' le plan des côtés $b'a$ et $b'a'$.

Désignons par $P_a$ le plan qui divise en deux parties égales l'angle intérieur en $a$.

Par $P_{a'}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $a'$,

Par $P_b$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $b$,

Par $P_{b'}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $b'$.

Menons par le sommet $a$ une perpendiculaire au plan A, et désignons cette droite par $N_a$.

Nous aurons de même :

Les droites $N_{a'}$, $N_b$, $N_{b'}$, passant respectivement par les sommets $a'$, $b$, $b'$, et perpendiculaires respectivement aux plans A', B, B'.

De plus, ces droites $N_a$, $N_{a'}$, $N_b$, $N_{b'}$, seront respectivement placées dans les plans bi-secteurs $P_a$, $P_{a'}$, $P_b$, $P_{b'}$.

Les plans $P_a$ et $P_b$ se couperont suivant une droite I, laquelle sera coupée par les plans $N_a$ et $N_b$ en des points $a_1$ et $b_1$.

Le plan $P_{a'}$ coupera I en un point $o$, qui sera le centre de la sphère demandée; si le point $o$ est intérieur par rapport aux points $a_1$ et $b_1$, les points de contact de la sphère et des côtés $ab$ et $aa'$ seront situés entre les sommets $a$, $b$ et $a'$. Mais les points de contact de la sphère et des côtés $bb'$ et $a'b'$ seront en dehors du sommet $b'$.

On voit, d'après ce qui précède, qu'ayant construit les quatre droites I, I', I'', I''',

intersection des couples de plans $P_a$ et $P_b$, $P_{a'}$ et $P_{b'}$, $P_a$ et $P_{b'}$, $P_{a'}$ et $P_b$, et les huit points en lesquels ces quatre droites I, I', I'', I''', sont coupées par les quatre droites $N_a$, $N_b$, $N_{a'}$, $N_{b'}$, le point $o$, qui est le point de rencontre des quatre droites I, I', I'', I''', doit se trouver dans l'intérieur du polyèdre ayant pour sommets ces huit points et les sommets du quadrilatère, pour que les points de contact de la sphère et des côtés du quadrilatère gauche, se trouvent situés sur les côtés mêmes de ce quadrilatère, c'est-à-dire entre les sommets de ce quadrilatère, ces sommets étant considérés deux à deux.

PROBLÈME 6. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par trois points et tangente à un plan.*

Désignons ces trois points par $m_1$, $m_2$, $m_3$, et le plan par P.

*Première solution.*

On mènera deux plans N et N' perpendiculaires sur le milieu, le premier de la corde $m_1m_2$, le second de la corde $m_1m_3$.

Ces deux plans se couperont suivant une droite I qui contiendra le centre de la sphère cherchée.

Il faudra ensuite chercher sur la droite I un point $o$ également distant du plan P et de l'un des trois points donnés ; le point $m_1$ par exemple.

Pour résoudre cette dernière question, on mènera par la droite I un plan perpendiculaire au plan P et qui le coupera suivant une droite D, et le problème sera ramené au problème suivant :

*Trouver sur la droite* I *un point* o *également distant du point* $m_1$ *et de la droite* D.

Remarquons que les deux droites I et D se coupent et qu'ainsi on a à résoudre le problème qui nous a occupé précédemment.

En vertu de ce qui a été dit alors, on voit que le problème aura ou 1° deux solutions, ou 2° une seule solution, ou 3° aucune solution.

Lorsque l'on voudra exécuter l'*épure*, on prendra pour simplifier les constructions, le plan P pour plan horizontal de projection et pour plan vertical de projection un plan passant par deux des trois points donnés.

*Deuxième solution.*

On peut aussi supposer que les trois points donnés sont situés sur le plan horizontal de projection, et que le plan P est perpendiculaire au plan vertical de projection.



Avec cette position particulière des données (et à laquelle on peut toujours arriver par des changements de plans de projection), la droite I sera verticale et se projettera sur le plan horizontal en un point qui sera le centre du cercle circonscrit au triangle $m_1m_2m_3$.

Désignons par $p$ le point en lequel la sphère cherchée doit toucher le plan P et par $H^p$ la trace horizontale du plan P.

Prolongeons les trois côtés du triangle $m_1m_2m_3$ jusqu'à la trace $H^p$; cette trace sera coupée : 1° par $m_1m_2$ prolongé en un point $q$; 2° par $m_1m_3$ prolongée en un point $q'$, et 3° par $m_2m_3$ prolongée en un point $q''$.

Le plan $pm_1m_2$ coupera la sphère cherchée suivant un cercle C ayant $m_1m_2q$ pour sécante et $pq$ pour tangente en $p$. On aura donc :

$$\overline{qm_1} \cdot \overline{qm_2} = \overline{qp}^2$$

Le plan $pm_1m_3$ coupera la sphère cherchée suivant un cercle C′ ayant $m_1m_3q'$ pour sécante et $pq'$ pour tangente en $p$, on aura donc :

$$\overline{q'm_1} \cdot \overline{q'm_3} = \overline{q'p}^2.$$

Le plan $pm_2m_3$ coupera la sphère cherchée suivant un cercle C″ ayant $m_2m_3q''$ pour sécante et $pq''$ pour tangente en $p$, on aura donc :

$$\overline{q''m_2} \cdot \overline{q''m_3} = \overline{q''p}^2$$

Si dans le plan P nous traçons trois cercles, savoir (*fig.* 216) :

le cercle B du point $q$ comme centre et avec $qp$ pour rayon,

le cercle B′ du point $q'$ comme centre et avec $q'p$ pour rayon,

le cercle B″ du point $q''$ comme centre et avec $q''p$ pour rayon,

ces trois cercles B, B′, B″ se couperont, en général, en deux points $p$ et $p'$, mais ces deux points $p$ et $p'$ pourront se réunir en un seul $r$, qui serait alors situé sur la droite $H^p$ et dans ce cas, le plan P serait perpendiculaire au plan horizontal et tangent en $r$ au cercle circonscrit K aux trois points donnés, et les trois cercles B, B′, B″ seront tangents en $r$.

Mais si la trace $H^p$, coupe le cercle K, alors quelle que soit la direction du plan P dans l'espace, le problème sera impossible et les trois cercles B, B′, B″ ne se couperont plus.

Ainsi : 1° il y aura deux solutions si $H^p$ ne rencontre pas le cercle K et quelle que soit la direction du plan P.

2° Il n'y aura qu'une seule solution si H' touche le cercle K, et, dans ce cas, le plan P devra être perpendiculaire au plan du cercle K.

3° Il n'y aura pas de solution possible si H' coupe le cercle K.

D'après ce qui précède, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*Étant donnés sur un plan trois points* $m_1$, $m_2$ *et* $m_3$ *et une droite* H' *telle qu'elle ne coupe pas le cercle* K, *circonscrit au triangle* $m_1m_2m_3$; *prolongeant les trois côtés du triangle jusqu'à leur rencontre en* q, q', q'' *avec la droite* H', *si de chacun de ces trois points* q, q', q'' *on mène des tangentes* qi, q'i', q''i'' *au cercle* K *et si de chacun des points* q, q', q'', *comme centres et respectivement avec les rayons* qi, q'i', q''i'', *on décrit les trois cercles* V, V', V'', *ces trois cercles s'entrecouperont en deux points* y *et* y' *situés sur la droite* L *menée par le centre* o *du cercle* K *et perpendiculairement à la droite* H'; *et les deux points* y *et* y' *seront également distants du point* s *en lequel les droites* L *et* H' *se coupent.*

On peut faire varier l'angle $\alpha$ que le plan donné P fait avec le plan des trois points donnés $m_1, m_2, m_3$, dès lors il n'est pas sans intérêt de savoir quel sera le *lieu géométrique* des divers points de contact $p$ des divers plans P et des diverses sphères passant toutes par le cercle K qui est circonscrit au triangle $m_1m_2m_3$.

Pour déterminer *ce lieu*, menons par le centre $o$ du cercle K, un plan Z perpendiculaire aux divers plans P ayant pour trace commune la droite H'.

Prenons ce plan Z pour plan vertical de projection, le plan du triangle étant le plan horizontal de projection; ce plan Z coupera H' en un point $s$; le cercle K en deux points $m$ et $m'$; et les divers plans P, P', P'' (faisant avec le plan du triangle les angles $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$), suivant des droites V', V'', V''',..... qui feront avec la ligne de terre précisément des angles égaux à $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$.....

Ce même plan Z coupera les diverses sphères qui s'entrecoupent suivant le cercle K, suivant des grands cercles, C, C', C'',..... tels que C et C' et C'',..... seront respectivement tangents (*fig.* 117) aux traces V', V'', V''', et aux points $p, p', p''$.

Et ces points $p, p', p''$,..... seront précisément les points de contact des sphères et des plans.

Ainsi le *lieu* des divers points de contact des sphères et des plans, sera une *ligne* plane et située dans le plan Z.

Toutes les tangentes $sp$, $sp'$, $sp''$,..... seront égales entre elles, puisque l'on a :

$$\overline{sp}^2 = \overline{sm} \cdot \overline{sm'}$$

et

$$\overline{sp'}^2 = \overline{sm} \cdot \overline{sm'}$$

et

$$\overline{sp''}^2 = \overline{sm} \cdot \overline{sm'}$$

et ainsi de suite.

Ainsi le *lieu* des points de contact est un cercle ayant pour centre le point $s$.

Lorsque l'on supposera que l'angle $\alpha$ est droit, le plan P sera vertical et dès lors, les centres des sphères se trouvant sur la droite A élevée perpendiculairement au plan du cercle K et par le centre $o$ de ce cercle, il faudra que l'on cherche sur la droite A un point $a$ tel que sa distance au point $m$ ou $m'$ soit égale à la perpendiculaire $sd$ menée par le point $s$ à la ligne de terre, et l'on aura alors en $d$ le point culminant du cercle D *lieu* des points de contact des diverses sphères et des divers plans satisfaisant les uns et les autres aux conditions établies ci-dessus.

De ce qui précède, on peut déduire divers théorèmes relatifs à l'hyperboloïde à une nappe.

Et en effet :

Concevons un hyperboloïde à une nappe $\Sigma$, tel que les plans des sections circulaires soient perpendiculaires à une des génératrices droites G du premier système de cette surface gauche, ce qui peut exister; ces plans seront alors perpendiculaires à une génératrice droite $G_1$ du second système, laquelle sera parallèle à G.

Prenons pour plan de projection un plan Z, perpendiculaire à G et $G_1$; ce plan Z coupera G en un point $m$ et $G_1$ en un point $m'$, et une suite de plans Z′, Z″, Z‴,..... parallèles à Z couperont la surface $\Sigma$ suivant des cercles C′, C″, C‴,..... qui se projetteront sur le plan Z suivant des cercles ayant pour corde commune la droite $mm'$.

Si nous menons dans le plan des droites G et $G_1$, une droite H′ parallèle à G ou $G_1$, elle coupera le plan Z suivant un point $s$. Et dès lors si l'on mène aux divers cercles C, C′, C″, C‴,..... des tangentes s'appuyant sur la droite H′, on formera un conoïde $\Delta$ tangent à la surface gauche $\Sigma$, et la courbe de contact $\xi$ se projettera sur le plan Z suivant un cercle D. De sorte que la courbe de contact $\xi$ sera située sur un cylindre $\psi$, ayant la droite H′ pour axe et le cercle D pour section droite.

On peut *généraliser* ce qui précède de la manière suivante :

On peut couper l'hyperboloïde à une nappe $\Sigma$ par une suite de plans parallèles Z, Z′, Z″, Z‴, suivant des ellipses, toutes ces ellipses seront semblables.

Concevons deux génératrices droites de systèmes différents G et $G_1$ parallèles entre elles; menons dans l'espace une droite H parallèle à G ou $G_1$ et située dans le plan $\gamma$, qui, passant par G et $G_1$, sera un plan asymptote de la surface $\Sigma$.

Cela posé :

Coupons tout le système par un plan $Z_1$ perpendiculaire aux droites G, $G_1$ et H. Ce plan $Z_1$ coupera ces droites, et respectivement en les points $m$, $m'$ et $s$, et remarquons que les trois points $m$, $m'$ et $s$ seront en ligne droite.

Les diverses ellipses parallèles se projetteront sur le plan $Z_1$ suivant des ellipses semblables et semblablement placées, et ayant pour corde commune la droite $mm'$.

Et si du point $s$ on mène des tangentes à toutes ces projections elliptiques, les points de contact seront sur une ellipse D ayant le point $s$ pour centre, et qui sera semblable et semblablement placée par rapport aux ellipses-projections.

Ainsi on peut énoncer le théorème général suivant :

*Étant donné un hyperboloïde à une nappe $\Sigma$, si l'on prend sur cette surface une génératrice droite G, et si l'on construit le plan T qui, passant par G, sera asymptote à la surface $\Sigma$; si dans ce plan T on trace une droite H parallèle à G, la courbe $\xi$ de contact de la surface $\Sigma$ et d'un conoïde $\Delta$ engendré par une droite se mouvant parallèlement à un plan arbitraire X, en s'appuyant sur la droite H et sur la surface $\Sigma$, sera située sur un cylindre $\psi$, tel que, ses génératrices étant parallèles à la droite G ou H, 1° sa section droite sera une ellipse semblable et semblablement placée par rapport à la projection, sur le plan de section droite, de l'ellipse section de la surface hyperboloïde $\Sigma$ par tout plan parallèle au plan X, et 2° son axe sera la droite H.*

Et nous devons faire remarquer que nous établissons, comme condition, que le plan X (quelle que soit sa direction dans l'espace) coupe toujours la surface hyperboloïde $\Sigma$, suivant une ellipse ou un cercle.

Si l'ellipse de section par le plan parallèle à X se projette sur le plan de section droite suivant un cercle, le cylindre $\psi$ sera alors de révolution et il aura la droite H pour axe de rotation.

Problème 7. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par deux points et tangente à deux plans.*

Désignons les deux points par $m_1$ et $m_2$ et les deux plans par P et Q.

Les deux plans P et Q se couperont suivant une droite L; par cette droite L, nous pourrons mener deux plans R et R' perpendiculaires et bi-secteurs des angles $\alpha$ et $\alpha'$ que font entre eux les plans P et Q.

Sur le milieu de la corde $m_1m_2$, et perpendiculairement à cette corde, nous mènerons un plan S.

Les plans S et R, S et R' se couperont suivant deux droites X et X' sur lesquelles seront situés les centres des sphères cherchées.

On devra donc chercher sur X un point $o$ tel que ses distances à l'un des points $m_1$ et $m_2$ et à l'un des plans P et Q soient égales. Nous sommes donc encore conduit à employer le premier mode de solution du problème 6 précédent.

Il pourra donc y avoir deux points $o$ sur X et sur X', ou un seul, ou aucun. Dès lors, le problème peut avoir :

1° Quatre solutions, ou 2° trois solutions, ou 3° deux solutions, ou 4° une solution, ou 5° aucune solution.

Lorsque l'on voudra construire l'*épure*, pour simplifier les constructions, on pourra prendre : 1° le plan P pour plan horizontal de projection et le plan vertical de projection perpendiculaire au plan Q et passant par un des deux points donnés ; ou 2° le plan P pour plan horizontal de projection et le plan vertical de projection passant par les deux points donnés. Alors le plan Q sera oblique par rapport aux deux plans de projection.

Problème 8. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par un point et tangente à trois plans.*

Désignons le point par *m* et les plans par P, Q et R.

Les plans P, Q et R se couperont deux à deux suivant trois droites I, I', I'' qui se croiseront en un point *p*, et ces trois droites seront :

| | | |
|---|---|---|
| I | intersection des plans | P et Q |
| I' | . . . . . . . . . . . . . | P et R |
| I'' | . . . . . . . . . . . . . | Q et R |

Cela posé :

Par la droite I, nous ferons passer deux plans X et X' rectangulaires entre eux et bi-secteurs par rapport aux plans P et Q ; par la droite I', nous ferons passer deux plans Y et Y' rectangulaires entre eux, et bi-secteurs par rapport aux plans P et R.

Par la droite I'', nous ferons passer deux plans Z et Z' rectangulaires entre eux, et bi-secteurs par rapport aux plans Q et R.

Les trois plans P, Q, R forment un angle solide ; les plans X, Y, Z qui divisent en deux parties égales les angles dièdres intérieurs de cet angle trièdre se coupent suivant une même droite J, laquelle contiendra le centre *o* de la sphère cherchée.

Il faudra donc chercher sur la droite J un point *o* également distant du point *m* et de l'un des trois plans donnés P, Q, R.

On se trouve ainsi conduit à employer le premier mode de solution du problème 6.

Le plan Z coupera les plans Y' et X' suivant une droite J'.

Le plan X coupera les plans Y' et Z' suivant une droite J''.

Le plan Y coupera les plans Y' et Z' suivant une droite J'''.

Pour chacune de ces droites, il pourrait exister deux centres ou un centre ou aucun centre.

Le problème paraît donc, à la première vue, avoir *en général*, huit solutions ; voyons si la chose est possible.

Les quatre droites J, J′, J″, J‴, se coupent en un seul et même point qui n'est autre que le point *p*.

Les trois plans donnés P, Q, R divisent l'espace en huit régions trièdres.

1° Le point donné *m* ne peut être que dans une de ces régions, s'il n'est pas situé sur l'un des trois plans.

2° Si le point *m* est situé sur un des trois plans donnés, il appartiendra à deux régions adjacentes par le plan sur lequel le point est placé.

3° Si le point *m* est situé sur l'une des trois droites I, I′, I″ qui se croisent au point *p*, ce point *m* appartiendra à quatre régions contiguës par l'arête sur laquelle le point *m* est situé.

Cela posé :

1° Lorsque le point *m* sera dans l'intérieur d'un angle trièdre, on ne pourra considérer que la droite intersection des plans bi-secteurs des angles dièdres intérieurs par rapport à cet angle trièdre.

On ne pourra donc avoir que deux solutions et toujours deux dans ce cas.

2° Lorsque le point *m* sera sur un des trois plans donnés, pour que le problème soit possible, il faudra que la perpendiculaire menée par le point *m* à ce plan aille rencontrer l'une des deux droites J et J′, intersection des plans bi-secteurs des angles dièdres intérieurs par rapport à chacune des régions dièdres adjacentes.

Dans ce cas, il n'y aura *en général* aucune solution ; toutefois, avec certaines données, il pourra en exister une ; et pour qu'il y en ait deux, il faudra que le plan bi-secteur qui contient les deux droites J et J′, non-seulement passe par le point *m*, mais soit encore perpendiculaire au plan sur lequel ce point *m* est situé.

3° Lorsque le point *m* est situé sur une des trois arêtes I, I′, I″, il ne peut évidemment exister aucune solution.

On voit donc que les trois problèmes 6, 7 et 8 se résolvent de la même manière, puisque pour leur solution on est conduit, *en définitive*, à celle d'un problème unique et le même pour les trois cas, savoir : *trouver sur une droite un point également distant d'un point donné et d'un plan donné.*

Problème 9. *Construire le centre et le rayon d'une sphère tangente à quatre plans.*

Désignons les quatre plans par $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, $\Sigma_4$.

Ces quatre plans se couperont deux à deux suivant six droites, et trois à trois suivant quatre points.

Ces quatre points seront les sommets d'un tétraèdre dont les six droites seront les arêtes.

Désignons par $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$ les quatre sommets ; $s_1$ étant opposé à la face $\Sigma_1$, $s_2$ à la face $\Sigma_2$, et ainsi de suite.

Les arêtes $(s_1s_2)$ et $(s_3s_4)$ — $(s_1s_3)$ et $(s_2s_4)$ — $(s_2s_3)$ et $(s_1s_4)$ seront dites arêtes opposées, et les arêtes opposées ne peuvent être évidemment situées dans un même plan.

Pour faciliter les raisonnements désignons les trois couples d'arêtes opposées par $I$ et $I'$, $I_1$ et $I_1'$, $I_2$ et $I_2'$.

Les deux faces qui se coupent suivant l'arête $I$ forment deux angles qui sont suppléments l'un de l'autre. Désignons par $P$ et $Q$ les plans bi-secteurs de ces angles, le plan $P$ divisant l'angle intérieur du tétraèdre et le plan $Q$ l'angle extérieur de ce même tétraèdre.

Nous désignerons de même :

par $P'$ et $Q'$ les plans bi-secteurs passant par l'arête $I'$
par $P_1$ et $Q_1$ les plans bi-secteurs qui passent par $I_1$
par $P_1'$ et $Q_1'$ ceux qui passent par $I_1'$
par $P_2$ et $Q_2$ ceux qui passent par $I_2$
et par $P_2'$ et $Q_2'$ ceux qui passent par $I_2'$

Cela posé :

Les plans bi-secteurs intérieurs $P$ et $P'$ se couperont suivant une droite $J$ et les plans bi-secteurs extérieurs $P$ et $Q'$ suivant une droite $J'$.

La droite $J$ coupera l'arête $I$ au point $m$ et l'arête $I'$ au point $m'$.

La droite $J'$ coupera l'arête $I$ au point $x$ et l'arête $I'$ au point $x'$.

Quelle que soit la forme du tétraèdre les points $m$ et $m'$ existeront toujours, mais les points $x$ et $x'$ peuvent être situés tous deux à l'infini.

Et en effet : si les plans $R$ et $Q$ sont parallèles, la droite $J'$ sera située à l'infini.

Si les plans $R$ et $Q'$ sont parallèles, la droite $J$ leur sera perpendiculaire, puisque les plans bi-secteurs $P$ et $Q$, $P'$ et $Q'$ sont perpendiculaires entre eux, et dès lors la droite $mm'$ sera la plus courte distance existant entre les arêtes $I$ et $I'$.

Ce que nous venons de dire pour le couple d'arêtes $I$ et $I'$ peut avoir lieu en même temps pour le second couple $I_1$ et $I_1'$, et ainsi avoir lieu pour deux couples ; et la même chose peut aussi avoir lieu pour les trois couples.

Si les droites $J'$, $J_1'$, $J_2'$ sont respectivement dirigées suivant les plus courtes distances existant entre $I$ et $I'$, $I_1$ et $I_1'$, $I_2$ et $I_2'$, alors le tétraèdre est évidemment *régulier*.

Cela posé :

Construisons les centres des sphères tangentes aux plans des quatre faces du tétraèdre.

Les six plans bi-secteurs des angles intérieurs $P$, $P'$, $P_1$, $P_1'$, $P_2$, $P_2'$ se coupe-



ront en un seul et même point o qui sera le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Les trois plans qui divisent en parties égales les trois angles extérieurs par rapport à une face $\Sigma_1$ se couperont en un point $p_1$ qui sera extérieur à cette face, et quelle que soit la forme du tétraèdre ce point $p_1$ évidemment existera toujours; on aura donc quatre sphères extérieures tangentes aux quatre faces $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, $\Sigma_4$ et dont les centres seront désignés par $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$.

Remarquons que le point de contact de la sphère (ayant $p_1$ pour centre) avec la face $\Sigma_1$ sera situé dans l'intérieur de cette face triangulaire $\Sigma_1$ du tétraèdre et qu'il en sera de même pour les quatre sphères extérieures.

Considérons maintenant l'angle prismatique formé sur une des arêtes du tétraèdre, l'arête I par exemple.

Le centre de la sphère tangente aux quatre plans aura son centre sur la droite J, intersection des deux plans bi-secteurs et intérieurs P passant par l'arête I et P′ passant par l'arête opposée I′.

Le centre sera ensuite donné par la rencontre de la droite J avec l'un des quatre plans bi-secteurs extérieurs passant par l'une des quatre autres arêtes $I_1$, $I_1'$, $I_2$, $I_2'$.

Or, peut-il arriver que l'arête J soit parallèle à l'un de ces plans, et par suite à tous les quatre? *Auquel cas le centre de la sphère se trouverait situé à l'infini.*

Remarquons que ce qui peut arriver pour la droite J, peut arriver en même temps pour la droite J′ et aussi pour la droite J″ et ainsi les trois sphères tangentes aux faces des angles prismatiques, peuvent exister toutes trois; mais peut-il n'en exister que deux, peut-il n'en exister qu'une, peut-il n'en exister aucune?

D'après ce qui précède on voit que ce problème aura toujours cinq solutions données par la sphère inscrite et les quatre sphères extérieures tangentes aux faces du tétraèdre. Mais pourra-t-on avoir six, ou sept, ou huit solutions suivant qu'une, ou deux, ou trois des sphères tangentes aux faces des angles prismatiques auront leurs centres situés à l'infini? *C'est ce qu'il s'agit d'examiner.*

Nous allons donc démontrer que les centres de ces trois sphères peuvent, suivant la *forme* du tétraèdre, 1° être situés tous les trois à distance finie, ou 2° que l'un d'eux peut être situé à l'infini, ou 3° que deux d'entre eux, ou 4° que tous les trois, peuvent être transportés à l'infini.

Lorsque l'on considère l'angle prismatique existant sur l'arête I, l'on considère aussi l'angle prismatique existant sur l'arête opposée I′; et l'on a vu que le centre de la sphère était situé sur la droite J s'appuyant sur les arêtes opposées I et I′, et au point en lequel cette droite J perçait l'un des quatre plans (bi-secteurs des angles extérieurs du tétraèdre) menés par les quatre arêtes $ss_1$, $ss_1'$,

$s_1s_4$, $s_2s_3$, désignant par $s_1$ et $s_2$ les sommets par lesquels passe la droite I, et par $s_3$ et $s_4$ ceux par lesquels passe l'arête opposée I'.

Les quatre plans bi-secteurs dont nous venons de parler se coupent donc en un seul et même point, que nous désignerons par $z$, lequel sera situé sur la droite J et sera le centre de l'une des trois sphères qui peuvent exister ou non.

Pour chaque couple d'arêtes opposées I, I', et $I_1$, $I'_1$, et $I_2$, $I'_2$, on pourra faire les mêmes constructions, on aura donc trois centres $z$, $z'$, $z''$.

Dès lors, on voit que les six plans bi-secteurs des angles extérieurs du tétraèdre se coupent quatre à quatre en les trois points $z$, $z'$, $z''$.

Ainsi ces six plans déterminent, par leur intersection deux à deux, un tronc de pyramide quadrangulaire, qui sera un noyau commun à trois pyramides quadrangulaires ayant respectivement pour sommet les points $z$, $z'$, $z''$.

Une de ces pyramides deviendra un prisme si son sommet est transporté à l'infini ; deux de ces pyramides pourront être des prismes ; enfin les trois pyramides pourront être des prismes.

Cela posé :

Concevons un tronc quadrangulaire quelconque, $t_1\ s_1\ t_2\ s_2\ t_3\ s_3\ t_4\ s_4$ (*fig.* 118) noyau de trois pyramides quadrangulaires ayant pour sommet respectif les points $z$, $z'$, $z''$. Les sommets $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ formeront un tétraèdre.

Imaginons que les six faces du tronc quadrangulaire sont précisément les six plans bi-secteurs des angles extérieurs de ce tétraèdre.

La droite J passera par le point $z$ et s'appuiera sur les deux arêtes opposées I et I' ou $s_1\ s_2$ et $s_3\ s_4$ du tétraèdre.

La droite $J_1$ passera par le point $z'$ et s'appuiera sur les deux arêtes opposées $I_1$ et $I_1'$, ou $s_1\ s_3$ et $s_2\ s_4$ du tétraèdre.

La droite $J_2$ passera par le point $z''$ et s'appuiera sur les deux arêtes opposées $I_2$ et $I_2'$ ou $s_1s_4$ et $s_2s_3$ du tétraèdre.

Ces trois droites J, $J_1$, $J_2$ passeront par le centre $o$ de la sphère inscrite au tétraèdre ; ainsi qu'il a été dit ci-dessus.

Les faces opposées du tronc de pyramide quadrangulaire formé par les six plans bi-secteurs des angles extérieurs, n'étant point parallèles, les droites J, $J_1$ et $J_2$ ne seront point dirigées suivant les plus courtes distances existant entre les couples d'arêtes opposées du tétraèdre.

Cela dit :

Supposons que le point $z$ soit transporté à l'infini, alors les arêtes $s_1t_1$, $s_2t_2$, $s_3t_3$, $s_4t_4$ seront parallèles.

Menons par la droite qui unit les points $z'$ et $z''$ un plan perpendiculaire à ces

arêtes parallèles, l'on aura pour section un quadrilatère, dont les côtés opposés prolongés iront concourir aux points $z'$ et $z''$.

Le tronc prismatique que l'on obtiendra dans ce cas, n'aura pas de faces opposées parallèles.

Supposons que les deux points $z$ et $z'$ soient tous les deux transportés à l'infini; alors nous pourrons mener par le point $z''$ deux droites, l'une R parallèle aux quatre arêtes : $s_1t_1$, $s_2t_2$, $s_3t_3$, $s_4t_4$ qui sont parallèles entre elles puisque le point $z$ est supposé situé à l'infini, l'autre R, parallèle aux quatre arêtes : $s_1t_2$, $s_2t_1$, $s_3t_4$, $s_4t_3$, qui sont parallèles entre elles puisque le point $z'$ est supposé situé à l'infini.

Les deux faces $s_1t_1s_2t_2$, $s_3t_3s_4t_4$, seront donc des parallélogrammes, et les deux faces $s_1t_1s_4t_4$, $s_2t_2s_3t_3$ seront des trapèzes.

Par conséquent, le tronc compris entre les six plans bi-secteurs des angles extérieurs du tétraèdre sera un prisme tronqué (*fig.* 119), ayant pour section droite un trapèze.

Dans ce cas les faces $s_1t_1s_3t_3$ et $t_2s_2t_4s_4$ étant parallèles, la droite $J_2$ qui passe par le point $z''$ et qui s'appuie sur les arêtes opposées du tétraèdre $s_2s_4$ et $s_1s_3$ sera dirigée suivant la plus courte distance existant entre ces deux arêtes.

Supposons que les trois points $z$, $z'$, $z''$ soient en même temps transportés à l'infini, alors le *tronc* deviendra un *prisme*. Et comme les six faces de ce prisme seront deux à deux parallèles, il s'ensuivra que les trois droites J, $J_1$ et $J_2$ seront dirigées suivant les plus courtes distances existant entre les arêtes opposées I et I', $I_1$ et $I_1'$, $I_2$ et $I_2'$ du tétraèdre, qui évidemment sera dans ce cas un tétraèdre *régulier*.

Le *prisme* ne sera donc autre qu'un *cube* (*fig.* 120), puisque le tétraèdre est régulier.

De ce qui précède nous pouvons conclure le théorème suivant :

*Étant donné un tétraèdre et ayant construit le centre* o *de la sphère inscrite; une seule des trois plus courtes distances existant entre les trois couples d'arêtes opposées peut passer par ce centre* o; *mais s'il en passe deux, toutes les trois y passeront.*

On doit voir, en vertu de tout ce qui précède, que les sommets $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ du tronc de pyramide triangulaire, sont précisément les centres des sphères tangentes aux faces prolongées du tétraèdre et dont le contact est situé pour chacune d'elles dans l'intérieur de la face triangulaire du tétraèdre qui lui correspond.

En sorte que les huit centres (*fig.* 118) des sphères tangentes à quatre plans seront : 1° le point *o* pour la sphère inscrite au tétraèdre, 2° les quatre points $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$, pour les quatre sphères extérieures tangentes aux faces du tétraèdre, et

3° les trois points $z$, $z'$, $z''$ pour les trois sphères construites pour les angles prismatiques.

On aura donc en lignes droites les trois points :

$$o.s_4.t_1, \; o.s_2t_3, \; ot_4s_3, \; os_2t_1.$$

Et les droites $oz$, $oz'$, $oz''$, s'appuieront, savoir :
$oz$ sur les arêtes opposées $s_1s_3$ et $s_2s_4$ du tétraèdre.
$oz'$ sur les arêtes opposées $s_1s_2$ et $s_3s_4$ du tétraèdre.
$oz''$ sur les arêtes opposées $s_1s_4$ et $s_2s_3$ du tétraèdre.

Lorsque les trois dernières sphères auront leurs centres transportés à l'infini, alors le *cube* pourra être décomposé en deux tétraèdres :

$$s_1s_2s_3s_4 \quad \text{et} \quad t_1t_2t_3t_4.$$

Pour le premier tetraèdre les centres des quatre sphères extérieures tangentes aux faces seront les points $t_1t_2t_3t_4$, et pour le deuxième tétraèdre ces centres seront les points $s_1s_2s_3s_4$.

On peut donc dire que ces deux tétraèdres sont *réciproques* l'un par rapport à l'autre; de plus, le centre des sphères inscrites à l'un ou à l'autre sera le même point $o$ centre du *cube*, et ces deux sphères auront évidemment même rayon; ainsi les deux tétraèdres ont dans ce cas même sphère inscrite.

En résumé le problème peut n'avoir que cinq solutions, il peut en avoir 6 ou 7 ou 8.

Le minimum du nombre des solutions est cinq.

Le maximum du nombre des solutions est huit.

Problème 10. *Construire le centre et le rayon de la sphère tangente à trois droites et à un plan.*

Désignons les trois droites par $D_1$, $D_2$, $D_3$, et le plan par P.

Dans le cas le plus général les trois droites données perceront le plan donné chacune en un point.

Désignons par $d_1$, $d_2$, $d_3$, le point en lequel le plan P est respectivement percé par les droites $D_1$, $D_2$, $D_3$.

Nous construirons les trois cônes du second degré $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, qui ayant respectivement pour sommet les points $d_1$, $d_2$, $d_3$, sont le *lieu* des points de l'espace également distants du plan P et de chacune des droites $D_1$, $D_2$, $D_3$. Les cônes $\Delta_1$ et $\Delta_2$ se couperont suivant une courbe à double courbure du quatrième degré,

laquelle sera coupée par le cône $\Delta_3$ en général en huit points. Ainsi le problème aura en général huit solutions.

Comme cas particuliers on peut supposer que les trois droites données sont parallèles au plan P. Et pour que le problème soit possible, il faut évidemment que les trois droites soient situées d'un même côté du plan P.

Dans ce cas les cônes $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, deviendront des cylindres paraboliques.

Si deux droites seules $D_1$ et $D_2$ sont parallèles au plan P et situées du même côté par rapport à ce plan, alors les deux cônes $\Delta_1$, $\Delta_2$ seront seuls des cylindres paraboliques.

Si une seule droite $D_1$ est parallèle au plan P, alors le cône $\Delta_1$ sera le seul qui deviendra un cylindre parabolique.

Et, dans tous ces cas, on pourra avoir en général huit solutions.

Si les droites $D_1$ et $D_2$, tout en étant parallèles au plan P, sont aussi parallèles entre elles, alors les deux cylindres $\Delta_1$ et $\Delta_2$ se couperont suivant deux génératrices droites K et K', parallèles à $D_1$ et $D_2$, parce que les sections droites de ces cylindres seront deux paraboles $6_1$ et $6_2$, dont les axes infinis seront parallèles, et que les paramètres de ces courbes ne seront point égaux si $D_1$ et $D_2$ sont inégalement distants du plan P. Dans ce cas, l'on n'aura que quatre solutions, puisque chaque droite K et K' percera le cône $\Delta_3$ en deux points.

Si les droites $D_1$ et $D_2$ sont également distantes du plan P, les deux paraboles $6_1$ et $6_2$ seront égales et ne se couperont qu'en un point, alors les cylindres $\Delta_1$ et $\Delta_2$ ne se couperont que suivant une génératrice droite K, laquelle percera le cône $\Delta_3$ en deux points; le problème n'aura donc, dans ce cas, que deux solutions.

Si les trois droites $D_1$, $D_2$, $D_3$, sont parallèles entre elles et au plan P, il faudra que les trois cylindres $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, se coupent suivant une seule et même génératrice droite K pour que la solution du problème soit possible, et, dans ce cas, on aura une infinité de sphères de même rayon, et dont les centres seront situés sur la droite K.

Problème 11. *Construire le centre et le rayon d'une sphère tangente à deux droites et à deux plans.*

Désignons les deux droites par $D_1$ et $D_2$, et les deux plans par $P_1$ et $P_2$.

Désignons par $d_1$ et $b_1$ les points en lesquels la droite $D_1$ perce les plans donnés, et par $d_2$ et $b_2$ ceux en lesquels la droite $D_2$ perce ces mêmes plans, les points $d_1$ et $d_2$ étant sur le plan $P_1$ et les points $b_1$ et $b_2$ étant sur le plan $P_2$.

Désignons par Q et Q' les plans bi-secteurs des angles compris par les plans $P_1$ et $P_2$.

Désignons par $\Delta_1$ le cône du second degré ayant son sommet en $d_1$, et qui est le *lieu* des points de l'espace également distants de la droite $D_1$ et du plan $P_1$.

Désignons par $B_1$ le cône du second degré ayant son sommet en $b_1$, et qui est le lieu des points de l'espace également distants de la même droite $D_1$ et du second plan $P_2$.

Nous aurons encore les deux cônes $\Delta_2$ et $B_2$, lorsque l'on considérera la droite $D_2$.

Le plan Q coupera respectivement les cônes $\Delta_1$, $B_1$, $\Delta_2$, $B_2$, suivant des sections coniques $\gamma_1$, $\beta_1$, $\gamma_2$, $\beta_2$.

Les points communs à $\gamma_1$ et $\beta_1$ seront également distants de la droite $D_1$ et du plan $P_1$ comme appartenant à la courbe $\gamma_1$, et ils seront également distants de la droite $D_1$ et du plan $P_2$ comme appartenant à la courbe $\beta_1$.

Ces deux sections coniques, $\gamma_1$ et $\beta_1$, se couperont en général en quatre points.

Le plan Q′ coupera respectivement les cônes $\Delta_1$, $B_1$, $\Delta_2$, $B_2$, suivant des sections coniques $\gamma_1'$, $\beta_1'$, $\gamma_2'$, $\beta_2'$, et les points communs à $\gamma_1'$ et $\beta_1'$, et qui en général seront au nombre de quatre, donneront quatre nouvelles solutions. Ainsi en général le problème peut avoir huit solutions.

Remarquons que les points en lesquels se coupent les deux sections coniques $\gamma_2$ et $\beta_2$, ne peuvent être que quatre des premiers points trouvés et fournis par l'intersection des courbes $\gamma_1$ et $\beta_1$; ainsi les quatre courbes situées sur le plan Q s'entre-coupent en quatre points et aussi les quatre courbes situées sur le plan Q′.

Problème 12. *Construire le centre et le rayon d'une sphère tangente à une droite et à trois plans.*

Désignons la droite par D et les trois plans par $P_1$, $P_2$, $P_3$.

La droite donnée D percera les plans donnés $P_1$, $P_2$, $P_3$, chacun en un point $d'$, $d''$, $d'''$.

Désignons les cônes lieux des points de l'espace également distants de la droite D et de chacun des plans donnés par :

$\Delta_1$ ayant son sommet en $d'$,
$\Delta_2$ . . . . . . . . . . . . . . . . $d''$,
$\Delta_3$ . . . . . . . . . . . . . . . . $d'''$.

Les plans donnés se couperont en un point $s$, par lequel passeront les trois arêtes de l'angle trièdre formé par les trois plans.

Désignons ces arêtes par I, I′, I″, I étant l'intersection des plans $P_1$ et $P_2$, I′ des plans $P_1$ et $P_3$, I″ des plans $P_2$ et $P_3$.

Désignons par Q et $Q_1$ les plans bi-secteurs passant par l'arête I,
par $Q'$ et $Q_1'$ ceux passant par $I'$,
par $Q''$ et $Q_1''$ ceux passant par $I''$.

Les plans $Q$, $Q'$, $Q''$ seront ceux qui divisent les angles intérieurs de l'angle trièdre.

Cela posé :

Les trois plans $Q$, $Q'$, $Q''$, se couperont suivant une droite R, et les droites $J$, $J'$, $J''$, seront les intersections des plans $Q_1$, $Q_1'$, $Q_1''$, combinés deux à deux.

Chacune des quatre droites $R$, $J$, $J'$, $J''$ percera l'un des trois cônes $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ en deux points; on aura donc en général huit solutions.

Et comme l'on peut combiner les quatre droites avec l'un quelconque des trois cônes, il s'en suit que les points, centres des huit sphères, seront ceux en lesquels les trois cônes $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ s'entrecouperont.

Chacun des trois plans $Q$, $Q'$, $Q''$ bi-secteurs des angles intérieurs coupera les trois cônes, et l'on aura :

| | | | |
|---|---|---|---|
| une section conique | $\gamma_1$ | intersection de | $Q$ et $\Delta_1$ |
| | $\gamma_2$ | | $Q$ et $\Delta_2$ |
| | $\gamma_3$ | | $Q$ et $\Delta_3$ |
| une section conique | $\gamma_1'$ | intersection de | $Q'$ et $\Delta_1$ |
| | $\gamma_2'$ | | $Q'$ et $\Delta_2$ |
| | $\gamma_3'$ | | $Q''$ et $\Delta_3$ |
| une section conique | $\gamma_1''$ | intersection de | $Q''$ et $\Delta_1$ |
| | $\gamma_2''$ | | $Q''$ et $\Delta_2$ |
| | $\gamma_3''$ | | $Q''$ et $\Delta_3$ |

Ces neuf sections coniques s'entrecouperont en deux points situés sur la droite R, etc., etc.

PROBLÈME 13. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par deux points et tangente à une droite et à un plan.*

Désignons les deux points par $m$, et $m_1$; la droite par D; et le plan par P.

1° Nous construirons le plan X mené par le milieu de la corde $m_1m$, et perpendiculairement à cette corde.

2° Nous construirons le cône $\Delta$ lieu des points de l'espace également distants de la droite D et du plan P.

3° Nous construirons le cylindre parabolique $B$, lieu des points de l'espace également distants du point $m$, et de la droite D.

Le plan X coupera le cône $\Delta$ suivant une section conique $\gamma$ et le cylindre B, suivant une autre section conique 6.

Les deux courbes $6$ et $\gamma$ se couperont en général en quatre points qui seront les centres des sphères demandées.

Ainsi le problème aura en général quatre solutions.

Problème 14. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par un point et tangente à deux droites et à un plan.*

Désignons le point par $m$, le plan par P et les deux droites par $D_1$ et $D_2$.

Nous construirons :

1° Le cône $\Delta_1$ lieu des points également distants du plan P et de la droite $D_1$.

2° Le cône $\Delta_2$ lieu des points également distants du plan P et de la droite $D_2$.

3° Le paraboloïde de révolution $\Sigma$ ayant le point $m$ pour *foyer* et le plan P pour *plan directeur.*

Ces trois surfaces $\Delta_1$, $\Delta_2$ et $\Sigma$ s'entrecouperont en général en huit points qui seront les centres des sphères demandées.

Problème 15. *Construire le centre et le rayon d'une sphère passant par un point et tangente à une droite et à deux plans.*

Désignons le point par $m$, la droite par D et les deux plans par $P_1$ et $P_2$.

Nous construirons :

1° Les deux plans Q et Q′ bi-secteurs des angles des deux plans $P_1$ et $P_2$.

2° Les cônes $\Delta_1$ et $\Delta_2$ lieu des points de l'espace également distants le premier de la droite D et du plan $P_1$ et le second de la même droite D et du plan $P_2$.

3° Les deux paraboloïdes de révolution $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ ayant le point $m$ pour *foyer* commun et respectivement les plans $P_1$ et $P_2$ pour *plan directeur.*

4° Le cylindre parabolique B lieu des points de l'espace également distants du point $m$ et de la droite D.

Toutes ces surfaces doivent s'entrecouper en des points qui seront les centres des sphères demandées.

Le plan Q coupera le cône $\Delta_1$ suivant une section conique $\gamma_1$ dont tous les points seront également distants de la droite D et des deux plans $P_1$ et $P_2$.

Le même plan Q coupera le paraboloïde $\Sigma_1$ suivant une section conique $\xi_1$ dont tous les points seront également distant du point $m$ et des deux plans $P_1$ et $P_2$.

Par conséquent, les quatre points en lesquels les deux courbes $\gamma_1$ et $\xi_1$ se couperont (en général), seront également distants du point $m$, de la droite D et des deux plans $P_1$ et $P_2$.

On aura donc quatre points sur le plan Q ; on aura aussi quatre points sur le plan Q′ qui seront les centres des sphères cherchées.

Ainsi le problème peut avoir *en général* huit solutions.

## § II.

Étant donnés sur le plan horizontal un point $f$ et une droite B (*fig.* 121), on sait que le lieu des points du plan horizontal également distants de la droite B et du point $f$ est une parabole $\mathcal{C}$ ayant le point $f$ pour foyer et la droite B pour directrice.

Concevons un cylindre $\Sigma$ ayant la parabole $\mathcal{C}$ pour section droite. Si par la droite B on mène une suite de plans P, P',..... chacun de ces plans coupera le cylindre suivant une parabole $\delta$, $\delta'$,..... qui aura pour projection horizontale la parabole $\mathcal{C}$.

Si l'on regarde le point $f$ comme le sommet commun aux divers cônes K, K',.... ayant respectivement pour directrices les paraboles $\delta$, $\delta'$,..... ces divers cônes K, K',..... seront de révolution, et auront pour axe commun de rotation la droite A élevée par le point $f$ perpendiculairement au plan horizontal.

Et en effet :

Prenons la ligne de terre LT perpendiculaire à la droite B; $H^{P'}$ (qui ne sera autre que la droite B) et $V^{P'}$ seront les traces du plan P' coupant le cylindre $\Sigma$ suivant une parabole $\delta'$ dont $\mathcal{C}$ sera la projection horizontale.

Considérons un point $m'$ de la courbe $\delta'$, ses projections seront $m'^v$ et $m'^h$; la distance du point $m'$ à la droite B aura pour projections $\overline{m'^vq'^v}$, $\overline{m'^hq'}$ (la droite $\overline{m'^hq'}$ étant perpendiculaire à la droite B) et la distance du point $m'$ à la droite B sera égale à sa projection verticale $\overline{m'^vq'^v}$ puisque cette distance est mesurée sur une droite parallèle au plan vertical.

La distance du point $m'$ au point $f$, aura pour projections $\overline{m'^vf^v}$ et $\overline{m'^hf}$.

Et comme on a : $\overline{m'^hq'} = \overline{m'^hf}$ puisque le point $m'^h$ est sur la parabole $\mathcal{C}$ et que $f$ est le foyer de cette parabole $\mathcal{C}$ et que B est la directrice de cette même parabole, il est évident que les distances $\overline{q'm'}$ et $\overline{m'f}$ sont égales.

Ainsi, tous les points de la parabole $\delta'$ sont également distants du point $f$ et de la droite B.

Ainsi le cylindre $\Sigma$ est le lieu des points de l'espace également distants du point $f$ et de la droite B.

Ainsi toutes les paraboles $\delta$, $\delta'$,..... ont hors de leur plan, un foyer commun qui est le point $f$ et une directrice commune qui est la droite B, trace horizontale commune à tous les plans P, P',..... de ces diverses paraboles $\delta$, $\delta'$.....

Cela posé :

Menons par le point $f$ une droite G' parallèle au plan vertical de projection et

faisant avec le plan horizontal un angle $\alpha'$ égal à l'angle que le plan P' fait avec le même plan horizontal.

Les projections de cette droite G' seront $G'^h$ parallèle à la ligne de terre et $G'^v$ faisant avec la ligne de terre un angle $\alpha'$ égal à l'angle que la trace verticale $V^{p'}$ du plan P' fait avec cette même ligne de terre.

Si l'on fait tourner la droite G' autour de la verticale A passant par le point $f$, cette droite G' engendrera un cône de révolution K ayant le point $f$ pour sommet et la droite A pour axe de rotation.

Ce cône K sera coupé par le plan P' suivant une parabole $\gamma'$, car ce plan P' sera parallèle à la génératrice G' du cône K, qui se trouve située dans le plan méridien de ce cône K mené parallèlement au plan vertical.

Or, pour un point $x$ de la courbe $\gamma'$, la distance de ce point $x$ à la droite B sera égale à la distance de ce même point $x$ au point $f$, puisque ces distances sont comptées sur des droites qui font avec le plan horizontal un même angle et égal à $\alpha'$.

La courbe $\gamma'$ n'est donc autre que la courbe $\delta'$. Donc, etc.

## § III.

Proposons-nous de chercher le lieu géométrique H des points de l'espace dont les distances à deux autres lieux géométriques S et S' sont dans un rapport constant, et supposons, pour simplifier le problème et pour le faire rentrer dans les conditions que nous avons établies précédemment en cherchant le centre et le rayon d'une sphère satisfaisant à quatre conditions, que le *lieu* S ou S' est un *point*, ou une *droite*, ou un *plan*.

I. *Lieu des points de l'espace dont les distances à deux droites fixes sont dans un rapport constant.*

Désignons par M et N les deux droites données.

Prenons la droite M pour axe des $z$, et supposons que le plan des $zx$ soit parallèle à la droite N, et, de plus, que l'axe des $y$ soit dirigé suivant la plus courte distance existant entre les droites M et N.

Désignons par $a$ la tangente trigonométrique de l'angle que les droites M et N font entre elles, et par $b$ la longueur de leur plus courte distance, et par $n$ le rapport des distances d'un point de l'espace à ces droites M et N.

Les équations de la droite M seront : $x = 0$, $y = 0$.

Les équations de la droite N seront : $y = b$, $x = az$.

Et l'équation du lieu H demandée sera (*):

$$x^2+y^2=n^2\left[(b-y)^2+\frac{(x-az)^2}{a^2+1}\right]$$

La surface H est donc un hyperboloïde à une nappe, et non de révolution.

Si l'on suppose que $a=\frac{1}{0}$, on trouve l'équation :

$$x^2+y^2=n^2(b-y)^2+n^2z^2$$

Ainsi le lieu des points de l'espace dont les distances à deux droites fixes rectangulaires entre elles et non situées dans un même plan sont entre elles dans le rapport constant $n$, est encore un hyperboloïde à une nappe, et non de révolution.

Si l'on suppose que $a=0$, on trouve l'équation :

$$x^2(n^2-1)=y^2-n^2(b-y)^2$$

Ainsi le lieu des points de l'espace dont les distances à deux droites fixes et parallèles sont entre elles dans le rapport constant $n$, est une surface cylindrique du second degré dont les génératrices sont parallèles aux droites fixes.

Si l'on suppose que $b=0$, on trouve l'équation :

$$x^2+y^2=n^2y^2+\frac{n^2}{a^2+1}(x-az)^2$$

Ainsi le lieu des points de l'espace dont les distances, à deux droites fixes qui se coupent, sont entre elles dans le rapport constant $n$, est une surface conique du second degré ayant pour sommet le point en lequel se coupent les droites fixes.

Je n'ai pu encore parvenir à déterminer la nature géométrique du *lieu* H et dans les cas précédents, au moyen des considérations de la géométrie descriptive; j'ai donc dû recourir à l'*analyse* de Descartes.

Mais pour tous les cas où l'on suppose que $n=1$, j'ai pu parvenir au résultat par des considérations géométriques assez simples, ainsi que cela a été exposé et développé au commencement de ce chapitre, § I$^{er}$.

---

(*) *Voir* la Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes situés ou non dans un même plan, page 108 et suivantes.

II. *Lieu des points de l'espace dont les distances à un point fixe et à un plan invariable sont dans un rapport constant.*

Désignons le point par $o$ et le plan par P.

Plaçons l'origine des coordonnées au point donné, et prenons le plan des $zy$ parallèle au plan donné.

Les coordonnées du point $o$ seront $x=0$, $y=0$, $z=0$.

L'équation du plan P sera $x=a$.

Cela posé :

Prenons un point $m$ dans l'espace, et représentons ses coordonnées par $x'$, $y'$, $z'$,

La distance D du point $m$ au point $o$, sera exprimée par $D=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$.

La distance $D_1$ du point $m$ au plan P sera égale à $(a-x')$, et comme on doit avoir $\frac{D}{D_1}=n$, on aura :

$$\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{(a-x')^2}=n^2$$

ou

$$x'^2(1-n^2)+y'^2+z'^2+2n^2ax-n^2a^2=0 \qquad (1)$$

qui sera l'équation du lieu demandé (en remplaçant $x'$, $y'$, $z'$ par $x$, $y$, $z$).

Cette équation (1) représente une surface de révolution, dont l'axe de rotation est l'axe des $x$.

En y faisant $z$ ou $y$ égal à zéro, on aura l'équation de la courbe méridienne, qui sera, en faisant $z=0$ :

$$x^2(1-n^2)+y^2+2n^2ax-n^2a^2=0 \qquad (2)$$

1° Cette équation (2) représentera une *ellipse*, si l'on a : $n^2>1$, et alors la surface sera un *ellipsoïde* de révolution ayant son axe de rotation dirigé suivant la plus courte distance du point $o$ au plan P;

2° Cette équation (2) représentera une *hyperbole*, si l'on a : $n^2>1$, et l'axe transverse de cette courbe sera dirigé suivant l'axe des $x$; car en transportant l'origine au centre de la courbe on trouve pour l'équation de cette hyperbole :

$$x^2(1-n^2)+y^2+n^2a^2\frac{(n^4+3n^2-1)}{(1-n^2)^2}=0$$

Et il est évident qu'en vertu de la condition : $n^2>1$, quel que soit $n$, le dernier terme sera positif. Donc etc.

La surface sera donc dans ce cas un *hyperboloïde* à deux nappes et de révolu-

tion ayant son axe de rotation, dirigé suivant la plus courte distance du point $o$ au plan P.

3° Cette équation (2) représente une *parabole* si l'on a : $n=1$, et cette courbe a l'axe des $x$ pour axe infini.

La surface sera donc dans ce cas un *paraboloïde* de révolution ayant son axe de rotation dirigé suivant la plus courte distance du point $o$ au plan P.

III. *Lieu des points de l'espace dont les distances à un point fixe et à une droite invariable sont dans un rapport constant.*

Désignons le point par $o$ et la droite par B.

Plaçons l'origine des coordonnées au point donné et prenons l'axe des $z$ parallèle à la droite B et de plus faisons passer le plan des $zx$ par cette droite B.

Les coordonnées du point $o$ seront $x=0$, $y=0$, $z=0$, et les équations de la droite B seront $y=o$ et $x=a$.

Cela posé :

Prenons un point $m$ dans l'espace et représentons ses coordonnées par $x'$, $y'$, $z'$.

La distance D du point $m$ au point $o$ sera exprimée par $D=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$.

La distance $D_1$ du point $m$ à la droite B sera exprimée par $D_1=\sqrt{y'^2+(a-x')^2}$.

Et comme on doit avoir $\frac{D}{D_1}=n^2$, on aura :

$$\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{y'^2+(a-x')^2}=n^2$$

ou

$$x'^2(1-n^2)+y'^2(1-n^2)+z'^2+n^2a.xz-n^2a^2=0 \qquad (3)$$

qui sera l'équation du *lieu* demandé (en remplaçant $x'$, $y'$, $z'$ par $x$, $y$, $z$).

Cette équation (3) représente une surface de révolution dont l'axe de rotation est parallèle à l'axe des $z$ et situé dans le plan des $zx$.

En faisant $y=0$, on aura l'équation de la courbe méridienne qui sera :

$$x^2(1-n^2)+z^2+n^2a.xz-n^2a^2=0$$

1° Cette équation représentera une *ellipse*, si l'on a : $n^2<1$, et la surface sera un *ellipsoïde* de révolution.

2° Cette équation représentera une *hyperbole* dont l'axe transverse sera dirigé parallèlement à l'axe des $z$, si l'on a : $n^2<1$ ; et la surface sera un *hyperboloïde* à deux nappes et de révolution.

3° Si l'on suppose que l'on a : $n^2=1$, alors l'équation du *lieu* demandée, se réduit à :

$$z^2+a.xz-a^2=0$$

qui est l'équation d'un cylindre dont les génératrices droites sont parallèles à l'axe des $y$ et dont la section droite donnée par le plan des $zx$ est une parabole ayant le point $o$ pour *foyer*, la droite B pour *directrice* et l'axe des $x$ pour *axe infini*.

IV. *Lieu des points de l'espace dont les distances à une droite fixe et à un plan invariable sont dans un rapport constant.*

Désignons la droite par B et le plan par P.

Prenons la droite B pour axe des $z$ et le plan des $zx$ perpendiculaire au plan P.

Les équations de la droite B seront $x=0$, $y=0$; l'équation du plan P sera $x=pz+q$.

Cela posé :

Prenons un point $m$ dans l'espace, et représentons ses coordonnées par $x'$, $y'$, $z'$.

La distance D du point $m$ à la droite B sera exprimée par $D=\sqrt{x'^2+y'^2}$.

La distance $D_1$ du point $m$ au plan P sera exprimée par $D_1=\frac{q+pz'-x'}{\sqrt{p^2+1}}$.

Et comme on doit avoir $\frac{D}{D_1}=n$, on aura :

$$\frac{(x'^2+y'^2)(p^2+1)}{(q+pz'-x')^2}=n^2$$

ou

$$(p^2-n^2+1)\,x^2+(p^2+1)y^2+2n^2p\,.\,zx-n^2p^2\,.\,z^2-2n^2pq\,.\,z+2n^2q\,.\,x-n^2q^2=0 \quad (4)$$

qui sera l'équation du lieu demandé (en remplaçant $x'$, $y'$, $z'$ par $x$, $y$, $z$).

Transportons l'origine des coordonnées au point en lequel la droite B perce le plan P; ce point a pour coordonnées

$$x=0 \quad \text{et} \quad z=-\frac{p}{q}$$

L'équation (4) deviendra :

$$(p^2-n^2+1)x^2+(p^2+1)y^2+2n^2p\,.\,xz-n^2p^2z^2=0 \quad (5)$$

Cette équation étant homogène, représente un *cône* ayant pour sommet l'origine des coordonnées.

Ainsi le *lieu* cherché est un *cône* du second degré ayant son sommet au point en lequel la droite B perce le plan P.

Si l'on suppose que $n=1$ ; l'équation (5) deviendra :

$$p^2x^2+(p^2+1)\,y^2+2p\,.\,xz-p^2z^2=0 \quad (6)$$

Si la droite B est parallèle au plan P, alors on a $p=0$ ; l'équation (4) deviendra dans ce cas particulier :

$$(1-n^2)x^2+y^2+2n^2q.x-n^2q^2=0 \qquad (7)$$

qui est l'équation d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $z$.

Et il pourra se présenter les trois cas suivants :

1° Si l'on a : $n^2<1$, la section droite de ce cylindre par le plan $xy$ sera une *hyperbole* ;

2° Si l'on a : $n^2>1$, cette section droite sera une *ellipse* ;

3° Si l'on a : $n^2=1$, cette section droite sera une *parabole*.

## § IV.

Étant données deux droites M et N dans l'espace, nous savons que le lieu des points de l'espace dont les distances à ces deux droites sont dans le rapport $n$, est une surface hyperboloïde à une nappe, et non de révolution H, dont l'équation est :

$$x^2+y^2=n^2(b-y)^2+\frac{n^2}{a^2+1}(x-az)^2$$

En se rappelant que l'on prend la droite M pour axe des $z$ et pour l'origine des coordonnées le point en lequel la droite M est coupée par la plus courte distance existant entre les droites données M et N. De plus, $b$ représente la longueur de cette plus courte distance, et $a$ représente la tangente trigonométrique de l'angle que font entre elles les deux droites données M et N.

Cela posé :

1° Si l'on fait tourner la surface H autour de l'axe M, on aura une surface de révolution $\Sigma$ qui sera l'enveloppe de l'espace parcouru par la surface H, considérée comme enveloppée ;

2° Si l'on fait tourner la surface H autour de l'axe N, on aura une surface de révolution $\Sigma_1$ qui sera l'enveloppe de l'espace parcouru par la surface H, considérée comme enveloppée ;

On demande si les trois surfaces $\Sigma$, $\Sigma_1$, et H, seront tangentes entre elles suivant une même *ligne ?*

Pour que cela ait lieu, il faut que l'on puisse mener une suite de droites

s'appuyant sur M et N, et coupant en même temps sous l'angle droit les surfaces $\Sigma$, $\Sigma$, et H.

Cherchons donc le lieu $\gamma$ des points en lequel se trouve coupée la surface H par une suite de normales s'appuyant sur la droite M; cherchons ensuite le lieu $\gamma'$ des points en lequel se trouve coupée la même surface H par une suite de normales s'appuyant sur la droite N.

Si les courbes $\gamma$ et $\gamma'$ se confondent, la question sera résolue affirmativement; dans le cas contraire la réponse sera négative.

Cherchons l'équation de la surface gauche $\psi$ formée par la série des normales à la surface H, et s'appuyant sur la droite M ou l'axe des $z$.

Représentant les coordonnées d'un point $m$ de la surface H par $x'$, $y'$, $z'$, les équations de la normale D à cette surface, et passant par le point $m$, seront :

$$y-y'=\frac{-dz'}{dy'}(z-z') \quad \text{et} \quad x-x'=\frac{-dz'}{dx'}(z-z')$$

Si je déduis de ces deux équations, celle qui appartient à la projection de la normale sur le plan des $xy$, j'aurai :

$$x=\frac{\frac{dz'}{dx'}}{\frac{dz'}{dy'}}\cdot y+\frac{x'\frac{dz'}{dy'}-y'\frac{dz'}{dx'}}{\frac{dz'}{dy'}}$$

Or, si toutes les normales doivent passer par l'axe des $z$, il faut que l'équation de la projection d'une normale quelconque sur le plan des $xy$, soit toujours de la forme $x=my$.

On devra donc avoir l'équation de condition :

$$x'\frac{dz'}{dy'}-y'\frac{dz'}{dx'}=0 \qquad (1)$$

Ainsi représentant l'équation de la surface H par $z=\varphi(x,y)$, l'on devra éliminer $x'$, $y'$, $z'$, entre les quatre équations :

$$y-y'=-\frac{dz'}{dy'}(z-z') \qquad x-x'=-\frac{dz'}{dx'}(z-z') \qquad x'\frac{dz'}{dy'}-y'\frac{dz'}{dx'}=0$$

et

$$z'=\varphi(x',y')$$

Et l'on aura pour équation finale en $x$, $y$, $z$, l'équation de la surface gauche $\psi$,

formée par toutes les normales à la surface H, et passant par la droite M ou l'axe des $z$.

Or, pour que la proposition énoncée soit vraie, il faudra que la surface $\psi$ passe par la droite N, dont les équations sont :

$$y = b \quad \text{et} \quad x = az$$

Pour que la surface $\psi$ passe par la droite N, il faudra que la normale D s'appuie sur cette droite N.

Ou bien il faudra, pour que l'énoncé soit vrai, que la surface $\psi'$, lieu des normales à la surface H, et s'appuyant sur la droite N, se confonde avec la surface $\psi$.

Si la normale D s'appuie sur la droite N, on devra avoir :

$$az - x' = -\frac{dz'}{dx'}(z - z') \quad \text{et} \quad b - y' = -\frac{dz'}{dy'}(z - z')$$

Et en éliminant $z$ entre ces deux équations on aura :

$$x'\frac{dz'}{dy'} - y'\frac{dz'}{dx'} = a\left(y' - b + z'\frac{dz'}{dy'}\right) - b\frac{dz'}{dx'}$$

équation de condition qui devra être satisfaite en même temps que l'équation de condition (1).

On devra donc avoir :

$$a\left(y' - b + z'\frac{dz'}{dy'}\right) - b\frac{dz'}{dx'} = 0 \qquad (2)$$

Or, cette équation (2) de condition ne peut être satisfaite que dans certains cas particuliers.

1° Lorsque $a = 0$, c'est-à-dire *lorsque les axes M et N sont parallèles.*

Dans ce cas les axes M et N sont dans le plan des $yz$, et l'équation de la surface H devient :

$$x^2 + y^2 = n^2(b - y)^2 + n^2x^2$$

Dans ce cas, la surface H est un cylindre dont les génératrices droites sont parallèles aux deux axes M et N ou à l'axe des $z$.

Lorsque $a = 0$, l'équation (2) se réduit à :

$$b\frac{dz'}{dx'} = 0$$

équation toujours satisfaite dans ce cas, vu la nature de la surface H.

Ainsi, dans le cas des axes M et N parallèles, les trois surfaces $\Sigma$, $\Sigma_1$ et H, sont tangentes l'une à l'autre suivant une ligne qui est évidemment une ligne droite B située dans le plan des axes M et N, et parallèle à ces axes.

2° Lorsque $b=0$, c'est-à-dire *lorsque les axes* M *et* N *se coupent*, les deux axes sont dans le plan des $xz$, et l'équation de la surface H devient :

$$x^2+y^2=n^2y^2+\frac{n^2}{a^2+1}(x-az)^2 \qquad (3)$$

Dans ce cas, la surface H est un cône dont le sommet est à l'origine des coordonnées, qui est le point en lequel les droites M et N se coupent.

Tirons de l'équation (3) le $\frac{dz}{dx}$ et le $\frac{dz}{dy}$, nous aurons :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{n^2(x-az)-x(a^2+1)}{an^2(x-az)}$$

et

$$\frac{dz}{dy}=\frac{(a^2+1)(n^2-1)y}{an^2(x-az)}$$

Dans le cas particulier qui nous occupe toutes les normales D, pour s'appuyer sur les droites N et M, doivent être dans le plan $zx$, on a donc $y=0$, et par suite $\frac{dz}{dy}=0$.

Or, l'équation (2), en vertu de ce que $b=0$, se réduit à :

$$a\left(y'+x'\frac{dz'}{dy'}\right)=0$$

Et cette équation (2) se trouve satisfaite.

Examinons les cas suivants :

PREMIER CAS.

Lorsque la surface H est un hyperboloïde à une nappe, lieu des points de l'espace dont les distances aux axes M et N sont dans le rapport $n$,

L'équation de condition (2) est :

$$a(y'-b)-\frac{(a^2+1)[y'+n^2(b-y')]z'}{n^2(x'-az')}-\frac{b}{an^2}\cdot\frac{n^2(x'-az')-(a^2+1)x'}{x'-az'}=0 \qquad (4)$$

car l'équation de la surface H est dans ce cas, comme on doit se le rappeler :

$$x'^2+y'^2=n^2(b-y')^2+\frac{n^2}{a^2+1}(x'-az')^2 \qquad (5)$$

et l'on tire de cette équation :

$$\frac{dz'}{dx'}=\frac{n^2(x'-az')-(a^2+1)x'}{an^2(x'-az')} \quad \text{et} \quad \frac{dz'}{dy'}=-\frac{(a^2+1)[y'+n^2(b-y')]}{an^2(x'-az')}$$

Or, les équations (4) et (5) ne peuvent être satisfaites en même temps que par l'hypothèse $x'=0$ et $z'=0$, et $y'=\frac{nb}{1+n}$.

Ce qui nous apprend qu'il n'y a qu'une seule normale à l'hyperboloïde H, qui s'appuie à la fois sur les deux droites M et N, et que cette normale n'est autre que la plus courte distance existant entre les droites M et N.

### DEUXIÈME CAS.

Si l'on suppose que $a=\frac{1}{0}$, auquel cas les deux droites M et N sont rectangulaires entre elles, l'équation de condition (4) devient :

$$\frac{x'\{y'+n^2(b-y')\}}{n^2z'}-\frac{y'.x'}{n^2z'}=0 \qquad (6)$$

Et l'équation (5) de la surface H devient :

$$x'^2+y'^2=n^2(b-y)^2+n^2z'^2 \qquad (7)$$

Cette équation (7) est toujours celle d'un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

Or, les équations (6) et (7) ne peuvent encore être satisfaites en même temps que par l'hypothèse $x'=0$ et $z'=0$, et $y'=\frac{nb}{1+n}$.

Ce qui nous apprend qu'il n'y a encore dans ce cas qu'une seule normale à l'hyperboloïde H, qui s'appuie à la fois sur les droites M et N, et que cette normale n'est autre que la plus courte distance existant entre les droites M et N.

TROISIÈME CAS.

Si l'on suppose que $n = 1$ et que $a$ est arbitraire ; alors la surface H devient un paraboloïde hyperbolique dont l'équation est, comme on sait :

$$x'^2 + y'^2 = (b - y')^2 + \frac{(x' - az')^2}{a^2 + 1} \qquad (8)$$

et l'équation de condition sera dans ce cas :

$$a(y' - b) - \frac{(a^2 + 1)bz'}{x' - az'} + \frac{b(z' + ax')}{x' - az'} = 0 \qquad (9)$$

Or, ces équations (8) et (9) ne peuvent encore être satisfaites que par l'hypothèse $x' = 0$ et $z' = 0$, et $y' = \frac{b}{2}$.

Ce qui nous apprend que la plus courte distance existant entre les droites M et N est encore la seule normale à la surface H qui s'appuie à la fois sur les deux droites M et N.

QUATRIÈME CAS.

Si l'on suppose que $n = 1$ et que $a$ est infini ; alors la surface H est un paraboloïde hyperbolique dont l'équation est :

$$x'^2 = b^2 - 2by' + z'^2 \qquad (10)$$

et l'équation de condition devient :

$$\frac{x'b}{n^2 z'} - \frac{y'.x'}{n^2 z'} = 0 \qquad (11)$$

Or ces équations (10) et (11) ne peuvent être satisfaites que par l'hypothèse $x' = 0$ et $z' = 0$, et $y' = \frac{b}{2}$.

Ce qui nous apprend que la plus courte distance existant entre les deux droites M et N est encore la seule normale à la surface H qui s'appuie à la fois sur les droites M et N.

Résolvons maintenant le problème dans toute sa généralité, et ainsi :

Prenons une surface H dont l'équation est :

$$z=\varphi(x,y) \qquad (12)$$

et deux axes l'un M étant l'axe des $z$ et l'autre N ayant pour équations : $y=b$ et $x=az$.

L'équation de condition

$$\frac{dz}{dy}x-\frac{dz}{dx}y=0 \qquad (13)$$

qui exprime que les normales à la surface H s'appuient sur l'axe des $z$, est précisément l'équation aux différences partielles d'une surface de révolution E ayant l'axe des $z$ pour axe de rotation.

De même l'équation :

$$x\frac{dz}{dy}-y\frac{dz}{dx}=a\left(y-b+z\frac{dz}{dy}\right)-b\frac{dz}{dx} \qquad (14)$$

est l'équation aux différences partielles d'une surface de révolution E' ayant précisément l'axe N pour axe de rotation.

Les deux surfaces E et E' sont les enveloppes de la surface H, lorsque l'on suppose que cette surface H tourne d'abord autour de l'axe M ou axe des $z$, et ensuite autour de l'axe N.

Or, pour que les trois surfaces H, E et E' soient en contact, il faut que les trois équations (12), (13) et (14) aient lieu en même temps.

Or, évidemment, l'équation de condition à laquelle on arrivera en éliminant les variables $x$, $y$, $z$, entre ces trois équations ne pourra être satisfaite que dans des cas très-particuliers.

Donnons quelques exemples :

1° Supposons que la surface H est un cylindre dont les génératrices droites sont parallèles à la droite M ou axe des $z$.

Son équation sera :

$$y=\varphi(x) \qquad (15)$$

On aura :

$$\frac{dz}{dx}=0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy}=0$$

L'équation (13) se trouve dès lors satisfaite et l'équation (14) se réduit à : $y-b=0$.

Toutes les normales à la surface H seront parallèles au plan des $xy$.

Si l'on désigne par $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées d'un point $m$ situé sur la surface H, les équations de la normale passant par ce point, seront :

$$z = z' \quad \text{et} \quad y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x')$$

Cette normale devra s'appuyer sur la droite N et sur la droite M ou axe des $z$.

Les sept équations

$$x = 0,\ y = 0,\ y = b,\ x = az \quad \text{et} \quad y - y' = -\frac{1}{\varphi'(x')}(x - x') \quad \text{et} \quad z = z' \quad \text{et} \quad y' = \varphi(x')$$

devront donc avoir lieu en même temps.

Et il est évident que la coexistence de ces sept équations, si elle a lieu, ne pourra exister que pour un certain nombre de points $m$.

Comme exemple de ce qui vient d'être dit, nous pouvons prendre le cas particulier suivant :

2° Supposons que le cylindre H, a pour équation.

$$y = px^2 + qx + s \tag{16}$$

Les sept équations de condition seront :

$$\overset{(1')}{x = 0},\ \overset{(2')}{y = 0},\ \overset{(3')}{y = b},\ \overset{(4')}{x = az},\ \overset{(5')}{z = z'},\ \overset{(6')}{y - y' = \frac{-(x - x')}{2px' + q}},\ \overset{(7')}{y' = px'^2 + qx' + s}$$

En combinant les équations (3'), (4'), (5'), (6') on aura l'équation de condition :

$$b - y' = \frac{x' - az'}{2yx' + q} \tag{17}$$

équation qui exprime que la normale s'appuie sur la droite N.

En combinant les équations (1'), (2'), (5'), (6') on aura l'équation de condition :

$$y' = \frac{-x'}{2px' + q} \tag{18}$$

équation qui exprime que la normale s'appuie sur la droite M.

Ces deux équations de condition devront coexister avec l'équation

$$y' = px'^2 + qx' + s \tag{19}$$

qui exprime que le point $m$ est sur la surface H, et ces équations (17), (18), (19), remplaceront les sept premières équations ci-dessus.

On a donc trois équations pour déterminer les trois coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ du point $m$. Le problème ne pourra donc avoir qu'un nombre limité de solutions.

Nous pouvons prendre comme exemple le cas particulier suivant :

3° Supposons que la surface H est une surface de révolution ayant la droite M ou axe des $z$ pour axe de rotation.

Alors les deux surfaces H et E se confondent.

Dès lors les équations : $z = \varphi(x, y)$ de la surface H et : $x \frac{dz}{dy} - y \frac{dz}{dx} = 0$ de la surface E sont identiques.

Le système des trois équations (12), (13) et (14) se réduit donc aux seules équations (12) et (14) de la surface H et de la surface E.

Par conséquent, dans ce cas particulier la courbe $\xi$, lieu des points de la surface H pour lesquels ses normales s'appuient à la fois sur les deux droites M et N, existera toujours.

4° Supposons que la surface H est un cylindre de révolution, ayant la droite M ou axe des $z$ pour axe de rotation, l'équation (15) sera :

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (20)$$

et l'équation (16) sera :

$$b - y = \frac{y}{x}(az - x) \qquad (21)$$

La courbe $\xi$ aura donc pour équation, les équations (20) et (21), l'équation (21) se réduit à :

$$bx - yz = 0$$

qui est l'équation d'un paraboloïde ayant l'origine des coordonnées pour sommet.

Et l'on aura pour l'équation de la projection de la courbe $\xi$.

sur le plan des $xy$ . . . . . $x^2 + y^2 = R^2$

sur le plan des $yz$ . . . . . $b^2(R^2 - y^2) = a^2y^2z^2$

sur le plan des $xz$ . . . . . $b^2x^2 = a^2z^2(R^2 - x^2)$.

Ainsi l'on peut conclure de ce qui précède :

1° Qu'étant donnés deux axes M et N et une surface H, arbitraire, il n'y aura, *en général*, qu'un certain nombre de normales isolées, menées à cette surface H, qui s'appuieront à la fois sur les deux axes M et N.

2° Qu'étant donnés deux axes M et N et une surface H de révolution et ayant pour axe de rotation l'un des axes M ou N, il y aura toujours une surface gauche

normale à cette surface H et dont les génératrices droites s'appuieront à la fois sur les axes M et N.

On doit faire remarquer que le dernier résultat est évident ; car la surface gauche normale s'obtiendra facilement en prenant sur la droite N une suite de points $p$, $p'$, $p''$,..... et en faisant passer par chacun de ces points et la droite M un plan P, P', P'',..... chacun de ces plans coupera la surface H suivant une courbe méridienne C, C', C'',..... et il faudra dans chaque plan P mener du point $p$ une normale à la courbe C (*).

## § V.

On sait que dans les engrenages cylindriques et coniques, on est conduit à considérer deux cylindres de révolution tangents l'un à l'autre et suivant une droite ; et deux cônes aussi de révolution et tangents l'un à l'autre suivant une droite ; cette droite de contact étant dans l'un et l'autre cas telle que les distances de chacun de ses points aux deux axes de l'engrenage ; lesquels sont les axes des surfaces de révolution considérées, sont dans un rapport constant et représenté par $n$.

On sait que ces deux cylindres et ces deux cônes prennent le nom, les premiers de *cylindres primitifs* de l'engrenage à axes parallèles, et les seconds de *cônes primitifs* de l'engrenage à axes qui se coupent.

M. *Ferry*, dans *son Essai sur les Machines*, publié à Metz en 1806, pensa que lorsque les axes de l'engrenage ne sont pas situés dans un même plan, il devait aussi exister des *surfaces primitives*, il chercha donc la nature de la surface H, lieu des points de l'espace dont les distances à deux tels axes sont dans un rapport constant.

Et il démontra le premier que ce *lieu* est un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

(*) On voit donc que si l'on fait mouvoir une surface H : 1° autour de l'axe M, elle engendrera une surface de révolution Σ et les surfaces H et Σ seront en contact par une courbe γ ; et 2° autour d'un autre axe N, elle engendrera une seconde surface de révolution Σ' et les surfaces H et Σ' seront en contact par une courbe γ'.

Les courbes γ et γ' n'auront, *en général*, qu'un certain nombre de points communs; elles pourront ne point se couper ; elles pourront se confondre ; mais, dans ce dernier cas, la surface H sera de révolution, et aura pour axe de rotation l'une des deux droites M ou N.

L'auteur de l'*Essai sur les machines*, publié à Metz en 1806 pour l'usage des élèves de l'École d'application, a donc été induit en erreur lorsqu'il a dit que les trois surfaces H, Σ et Σ' étaient toujours en contact par une seule et même courbe.

Mais il commit une erreur en pensant que les surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$, engendrées, comme enveloppes, par le mouvement de rotation de la surface H tournant respectivement autour des axes donnés, étaient tangentes l'une à l'autre et suivant une courbe $\xi$ située sur la surface H. De sorte, que le problème des *surfaces primitives* dans le cas des axes non situés dans un même plan, restait encore à résoudre.

Là, s'étaient bornés les essais tentés sur la construction des engrenages aptes à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes non situés dans un même plan, lorsque je commençais mes recherches en 1817.

Ayant démontré ainsi que je l'ai fait dans le § IV précédent, que les deux surfaces de révolution K et K' enveloppes d'une surface Q arbitraire et tournant respectivement autour de deux axes ne sont pas, *en général*, en contact par une courbe $\gamma$ située sur la surface Q et que cela n'a lieu qu'autant que la surface Q est de révolution autour de l'un des axes donnés, je cherchai si l'on ne pouvait pas tracer sur la surface H (*lieu* des points de l'espace dont les distances aux deux axes non situés dans un même plan sont dans le rapport constant $n$) une ligne $\xi$, telle qu'en la faisant tourner respectivement autour des axes donnés, elles engendrât deux surfaces de révolution $\Delta$ et $\Delta'$ tangentes l'une à l'autre suivant cette courbe $\xi$, et coupant dès lors l'une et l'autre la surface H suivant cette même courbe $\xi$.

La solution de cette question est le sujet de ce § X.

Concevons deux axes M et N non situés dans un même plan.

Prenons l'axe M pour axe des $z$, ses équations seront :

$$x=0, \quad y=0$$

les équations de l'axe N seront :

$$y=b, \quad x=az$$

La plus courte distance existant entre M et N étant égale à $b$, et $a$ étant la tangente trigonométrique de l'angle $\alpha$ que font entre eux les axes M et N.

Nous savons que la surface H, lieu des points de l'espace dont les distances aux axes M et N sont dans le rapport $n$, a pour équation :

$$x^2+y^2=n^2\left\{(b-y)^2+\frac{(x-az)^2}{a^2+1}\right\} \qquad (1)$$

Concevons une surface de révolution $\Delta$ ayant pour axe de rotation l'axe M ou axe des $z$.

Le cercle générateur $\delta$ de la surface $\Delta$ aura pour équation :

$$z = \alpha \tag{2}$$

et

$$x^2 + y^2 = 6 \tag{3}$$

$6$ est une fonction de $\alpha$, dont il s'agit de déterminer la forme.

Or, il est évident :

1° Que les deux variables $\alpha$ et $6$ sont les coordonnées de la courbe méridienne C appartenant à la surface $\Delta$ et cette courbe étant considérée dans son plan.

2° Que la normale menée à la courbe C et au point $\alpha$ et $6$ rencontre l'axe des $z$ au centre $o$ de celle des sphères S dont la surface $\Delta$ est l'enveloppe et que les surfaces S et $\Delta$ se touchent suivant le cercle générateur $\delta$.

3° Que le plan P mené par le centre $o$ et le second axe N, coupe le cercle $\delta$ en un point $m$ qui sera le point de contact d'une sphère $S_1$, ayant son centre en $o$, sur N, avec la sphère S ; la sphère $S_1$ étant l'enveloppée d'une surface $\Delta_1$ de révolution autour de l'axe N ; les deux surfaces $\Delta$ et $\Delta_1$ devant être en contact par une ligne $\xi$, lieu des divers points $m$ et cette courbe $\xi$ devant être telle, que tous les points soient distants des axes M et N dans un rapport constant et égal à $n$.

L'équation de la normale à $\Delta$ pour le point dont les coordonnées sont $\alpha$ et $6$ sera :

$$y - 6 = -\frac{d\alpha}{d6}(z - \alpha)$$

Pour $y=0$, on a $z = \alpha + 6\frac{d6}{d\alpha}$ ; nous poserons pour abréger :

$$\gamma = \alpha + 6\frac{d6}{d\alpha}$$

On aura donc pour les coordonnées du centre de la sphère S :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad z = \gamma$$

L'équation du plan P sera :

$$z - \gamma = \frac{x}{a} - \frac{\gamma . y}{b} \tag{4}$$

Les quatre équations (1), (2), (3) et (4), doivent avoir lieu en même temps pour tous les points de la ligne de contact $\xi$ et ainsi quel que soit $\alpha$.

Si donc on élimine $x$, $y$, $z$ entre ces quatre équations, il restera une équation finale en $\alpha$, $6$ et $\frac{d6}{d\alpha}$ qui servira à déterminer la forme de la fonction $6$.

Cette équation finale sera l'équation différentielle de la courbe méridienne de la surface de la révolution $\Delta$.

L'équation (4) prend la forme :

$$\frac{a\gamma}{b}(y-b)=x-a\alpha$$

Par là, et en vertu de l'équation (3), l'équation (1) deviendra :

$$6^2=n^2\left\{(b-y)^2+\frac{\frac{a^2\gamma^2}{b^2}(y-b)^2}{a^2+1}\right\}$$

d'où

$$(b-y)^2=\frac{b^2(a^2+1).6^2}{n^2\{(a^2+1)b^2+a^2\gamma^2\}} \qquad (l)$$

d'où enfin :

$$y^2-2by=\frac{b^2 6^2(a^2+1)-n^2b^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}}{n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}} \qquad (i)$$

L'équation (4), eu égard à l'équation (2), donne :

$$\alpha-\gamma=\frac{x}{a}-\frac{\gamma y}{b}$$

d'où

$$x=\frac{a}{b}\{\gamma y+(\alpha-\gamma)b\}$$

d'où

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}\overline{\{\gamma y+(\alpha-\gamma)b\}}^2$$

Mettant cette valeur de $x^2$ dans l'équation (3), on aura :

$$y^2+\frac{a^2}{b^2}\overline{[\gamma y+(\alpha-\gamma)b]}^2=6^2$$

Développant le carré, on a :

$$y^2+\frac{a^2}{b^2}[\gamma^2y^2+2b\gamma(\alpha-\gamma)y+(\alpha-\gamma)^2b^2]=6^2$$

d'où

$$y^2+\frac{2a^2b.\gamma(\alpha-\gamma)}{b^2+a^2\gamma^2}y=\left(\frac{6^2-a^2(\alpha-\gamma)^2}{b^2+a^2\gamma^2}\right)b^2 \qquad (i')$$

Retranchant l'une de l'autre les équations (i) et (i'), on aura :

$$b-y=b-\left[\frac{b^2\cdot\dfrac{6^2-a^2(\alpha-\gamma)^2}{b^2+a^2\gamma^2}-\dfrac{b^2(a^2+1)6^2-n^2b^2\{(a^2+1)b^2+a^2\gamma^2\}}{n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}}}{\dfrac{2.a^2b.\gamma(\alpha-\gamma)}{b^2+a^2\gamma^2}+2b}\right]$$

Mettant cette valeur de $(b-y)$ dans l'équation $(l)$, on aura l'équation finale qui sera :

$$\frac{b^2(a^2+1)6^2}{n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}}=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} \qquad (h)$$

Ayant posé :

$$\mathrm{P}=2a^2b^2\gamma(\alpha-\gamma)n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}+2b^2(b^2+a^2\gamma^2)n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}-$$
$$-b^2n^2\{6^2-a^2(\alpha-\gamma)^2\}\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}+\{b^2+a^2\gamma^2\}\{b^26^2(a^2+1)-n^2b^2[b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2]\}$$

et

$$\mathrm{Q}=[2a^2b\gamma(\alpha-\gamma)n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}+2b^2(b^2+a^2\gamma^2)n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}]^2$$

le dénominateur Q peut s'écrire ainsi :

$$2bn^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}\{a^2\gamma(\alpha-\gamma)+b^2+a^2\gamma^2\}$$

Le second facteur se réduit à :

$$a^2\gamma\alpha+b^2$$

Ainsi le dénominateur Q sera :

$$\mathrm{Q}=2bn^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}\{a^2\alpha\gamma+b^2\}$$

Le numérateur P peut s'écrire ainsi :

$$b^2n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}[2a^2\gamma(\alpha-\gamma)+2(b^2+a^2\gamma^2)-6^2-a^2(\alpha-\gamma)^2-(b^2+a^2\gamma^2)]+(b^2+a^2\gamma^2)b^26^2(a^2+1)$$

et réduisant, on a :

$$\mathrm{P}=b^2n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}\{b^2-6^2-a^2\alpha^2\}+b^26^2(a^2+1)(b^2+a^2\gamma^2).$$

Mettant dans l'équation (4) les valeurs simplifiées de P et Q, chassant les dénominateurs et remarquant que dans le premier membre le facteur

$$n^2\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\}$$

multipliera haut et bas, et doit être supprimé, on arrivera à l'équation finale :

$$4n^2\beta^2(a^2+1)\left\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\right\}\overline{\left\{a^2\gamma\alpha+b^2\right\}}^2= \qquad (5)$$

$$=\overline{\left[n^2\left\{b^2(a^2+1)+a^2\gamma^2\right\}\left\{\beta^2-b^2-a^2\alpha^2\right\}-\beta^2(a^2+1)(b^2+a^2\gamma^2)\right]}^2$$

Cette équation (5) est du premier ordre, mais du quatrième degré, et ne peut être intégrée que dans quelques cas particuliers, en faisant certaines hypothèses et en donnant dès lors à $b$, à $a$ et à $n$ certaines valeurs particulières.

Ainsi, on peut intégrer dans les cas particuliers ci-après :

1° $n$ arbitraire, et $a=\frac{1}{0}$.
Les axes M et N sont alors rectangulaires entre eux et non situés dans un même plan ;

2° $n$ arbitraire et $a=0$.
Les axes M et N sont alors parallèles ;

3° $n$ arbitraire et $b=0$.
Les axes M et N se coupent ;

4° $n=1$ et $a$ arbitraire.
Les axes M et N font entre eux un angle aigu et ne sont pas situés dans un même plan ;

5° $n=1$ et $a=\frac{1}{0}$.
Les axes M et N sont rectangulaires entre eux et ne sont pas situés dans un même plan ;

6° $n=1$ et $a=0$.
Les axes M et N sont parallèles ;

7° $n=1$ et $b=0$.
Les axes M et N se coupent.

On peut donc intégrer l'équation (5) dans sept cas particuliers ; et dans le huitième cas, qui est le cas général et pour lequel $n$, $a$ et $b$ sont arbitraires, cette équation (5) ne peut être intégrée.

Premier cas. $n$ arbitraire et $a=\frac{1}{0}$.

Divisons tous les termes de l'équation (5) par $a^2$, et annulons les termes qui conserveront $a$ en dénominateur ; on aura :

$$\gamma=\frac{nb.\alpha}{\sqrt{\beta^2-n^2\alpha^2}} \qquad (6)$$

et l'on se rappelle que l'on a posé $\gamma=\alpha+\beta\frac{d\alpha}{dz}$.

Pour intégrer l'équation (6), cherchons à séparer les variables; posons donc :

$$\alpha^2 + \beta^2 = v$$

Différentiant cette expression, on a :

$$2\alpha d\alpha + 2\beta d\beta = dv$$

L'équation (6) deviendra donc :

$$\frac{2nb \cdot \alpha}{\sqrt{v - (n^2+1)\alpha^2}} = \frac{dv}{d\alpha} \qquad (7)$$

Posons :

$$(1+n^2)\,\alpha^2 = v'$$

Différentiant cette expression, on a :

$$2(1+n^2)\,\alpha d\alpha = dv'$$

L'équation (7) deviendra donc :

$$dv = \frac{nb \cdot dv'}{(n^2+1)\sqrt{v - v'}} \qquad (8)$$

Posons :

$$\frac{dv'}{dv} = q \qquad (9)$$

L'équation (8) deviendra :

$$q = \frac{(n^2+1)\sqrt{v - v'}}{nb} \qquad (10)$$

Élevant l'équation (10) au carré, on aura :

$$q^2 = \frac{(n^2+1)^2\,(v - v')}{n^2 b^2} \qquad (11)$$

Différentiant l'équation (10), il vient :

$$2qdq = \frac{(n^2+1)^2}{n^2 b^2}\,(dv - dv') \qquad (12)$$

L'équation (12) devient, en vertu de l'équation (9) :

$$2qdq = \frac{(n^2+1)^2}{n^2 b^2}\,(1 - q)\,dv$$

ou

$$dv = \frac{2n^2 b^2}{(n^2+1)^2}\left(\frac{qdq}{1-q}\right) \qquad (13)$$

Dans cette équation différentielle (13), les variables $q$ et $v$ sont séparées, et son intégrale est:

$$v = \frac{2n^2b^2}{(n^2+1)^2}\left\{\log\left(\frac{C}{q-1}\right) - q\right\} \qquad (14)$$

C étant la constante arbitraire.

Remplaçant dans l'équation (14) $q$ par sa valeur en $v$ et $v'$, on aura:

$$\frac{(n^2+1)^2 v}{2n^2b^2} + \frac{(n^2+1)\sqrt{v-v'}}{nb} = \log \frac{nb.C}{(n^2+1)\sqrt{v-v'} - nb} \qquad (15)$$

Déterminons la constante arbitraire.

L'équation (15) peut s'écrire ainsi:

$$C = \frac{(n^2+1)\sqrt{v-v'} - nb}{nb} . \log\left\{\frac{(n^2+1)^2 v}{2n^2b^2} + \frac{(n^2+1)\sqrt{v-v'}}{nb}\right\} \qquad (16)$$

Pour que l'on ait $C = 0$, il faut que le coefficient du logarithme soit nul; on a donc:

$$(n^2+1)\sqrt{v-v'} - nb = 0 \qquad (17)$$

Remplaçant dans l'équation (17) $v$ et $v'$ par leurs valeurs en $\alpha$ et $\beta$, on a:

$$(n^2+1)\sqrt{\beta^2 - n^2\alpha^2} = nb$$

ou enfin

$$\beta^2 - n^2\alpha^2 = \frac{n^2b^2}{(n^2+1)^2} \qquad (18)$$

L'équation (18) sera celle de la courbe méridienne de la surface de révolution $\Delta$.

Cette courbe méridienne est une hyperbole dont l'axe imaginaire est dirigé parallèlement à l'axe des $z$; la surface $\Delta$ sera donc un hyperboloïde à une nappe et de révolution.

Remplaçons dans l'équation (18) $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs en $x$, $y$ et $z$ tirées des équations (2) et (3) on aura:

$$x^2 + y^2 - n^2z^2 = \frac{n^2b^2}{(n^2+1)^2} \qquad (19)$$

Cette équation (19) sera celle de la surface hyperboloïde $\Delta$.

Faisons $x=0$ et $z=0$ dans l'équation (19) on aura :

$$y=\pm\frac{nb}{n^2+1}$$

si dans l'équation (1) on fait $x=o$ et $z=0$ on aura :

$$y=\pm\frac{nb}{n+1}$$

Ainsi la surface $\Delta$ ne coupe pas la plus courte distance $b$ existant entre les axes M et N aux mêmes points que la surface H.

La valeur de $y$ fournie par l'équation (19) est plus grande que celle fournie par l'équation (1).

Et en effet : dans tous les calculs précédents nous supposons $n<1$ ; on a donc : $n^2+1<n+1$.

Le plan des $xy$ coupera la surface $\Delta$ suivant un cercle $\delta$, dont l'équation sera :

$$x^2+y^2=\frac{n^2b^2}{(n^2+1)^2}$$

Ce même plan coupera la surface H suivant une ellipse E dont l'équation est :

$$x^2+(1-n^2)y^2+2bn^2y-n^2b^2=0$$

L'ellipse E a son centre sur l'axe des $y$ et situé du côté des $y$ négatifs.

Les deux courbes $\delta$, et E se couperont en deux points dont les coordonnées seront :

$$y=\frac{n^2b}{n^2+1} \quad \text{et} \quad x=\pm\frac{nb}{n^2+1}\sqrt{1-n^2}$$

Ces points d'intersection existeront toujours puisque les valeurs de $x$ seront toujours réelles en vertu de la condition $n<1$.

On peut intégrer l'équation finale (5) dans les six autres cas particuliers, ainsi que nous l'avons dit ; mais je préfère donner la solution du problème pour ces *six cas,* en me servant de la *géométrie descriptive*, d'ailleurs c'est par les méthodes que nous fournit cette science, que je suis parvenu pour la première fois aux divers résultats (*).

---

(*) Ce fut en 1818, lorsque j'étais attaché comme lieutenant d'artillerie à l'École d'application de Metz, que je parvins à résoudre le problème dans les six cas particuliers, par des considérations *géométriques* ; je communiquai mes résultats à M. Persy, mon ami et mon ancien professeur à cette

Deuxième cas. $n$ arbitraire et $a = 0$.

Dans ce cas les axes M et N sont parallèles et l'on sait que le *lieu* H, des points de l'espace dont les distances à ces axes sont dans un rapport constant $n$ est un cylindre dont les génératrices sont parallèles aux axes M et N, et le plan Z de ces axes coupe ce cylindre suivant deux droites l'une J et l'autre J', toutes deux parallèles à M et à N.

Dès lors, il est évident que si l'on fait mouvoir une droite G perpendiculaire à J ou à J' et s'appuyant sur l'axe M, cette droite G ne sortira pas du plan Z et s'appuiera dès lors aussi sur l'axe N.

La surface $\Delta$ sera donc un cylindre de révolution B ou B' engendré par le mouvement de rotation de J ou de J' autour de l'axe M; la surface $\Delta_1$ sera donc un cylindre de révolution $B_1$ ou $B_1'$ engendré par le mouvement de rotation de J ou de J' autour de l'axe N.

Et il est évident que les deux cylindres engendrés par J comme les deux cylindres engendrés par J', seront les deux premiers extérieurs l'un à l'autre et tangents suivant la droite J, et seront les deux seconds intérieurs l'un à l'autre et tangents suivant la droite J'. Dans ce cas, les cylindres $\Delta$, $\Delta_1$ et le cylindre H sont tangents les uns aux autres suivant la droite J ou J' laquelle représente la *ligne* $\xi$.

Le problème a donc dans ce cas deux solutions.

Troisième cas. $n$ arbitraire et $b = 0$.

Les axes M et N se coupent en un point $o$, et dans ce cas on sait que la surface H est un cône du second degré ayant pour sommet le point $o$, le plan Z des axes M et N coupe le cône suivant deux droites, l'une J divisant l'angle $\alpha$ des axes en deux angles tels que leurs sinus sont dans le rapport $n$ et l'autre J' divisant l'angle supplémentaire de $\alpha$ en deux angles dont les sinus sont aussi dans le rapport $n$.

Dès lors, il est évident que si l'on fait mouvoir une droite G perpendiculairement à J ou à J' et s'appuyant sur l'axe M, cette droite G ne sortira pas du plan Z et s'appuiera dès lors aussi sur l'axe N.

En sorte que les surfaces de révolution $\Delta$ et $\Delta_1$ seront deux cônes B et $B_1$ engendrés par la droite J tournant respectivement autour des axes M et N, ou deux cônes B' et $B_1'$ engendrées par la droite J' tournant respectivement autour des mêmes axes.

---

École, en lui disant que je n'avais pu résoudre le cas général par la géométrie, et que le cas particulier, dans lequel $n$ est arbitraire et $a$ infini, échappait encore à toutes mes recherches.

M. Persy chercha la solution par l'*analyse*, et me remit quelques jours après l'équation finale (5) et l'intégrale (18).

Les deux cônes B et $B_1$ seront extérieurs l'un à l'autre, si les deux cônes B' et $B_1'$ sont intérieurs l'un à l'autre, *et réciproquement.*

Et dans ce cas la surface conique H, et les deux surfaces de révolution $\Delta$ et $\Delta_1$ seront en contact par la même droite J ou J'.

Le problème a deux solutions.

Quatrième cas. $n=1$ et $\alpha$ arbitraire.

Puisque $n=1$, la surface H est le lieu des points de l'espace également distants des deux axes donnés M et N comprenant entre eux un angle $\alpha$ et n'étant point situés dans un même plan.

Nous avons démontré, dans le § I de ce chapitre, et en ne nous servant que des méthodes *graphiques* de la *géométrie descriptive*, que la surface H est un paraboloïde hyperbolique dont le sommet est au point $o$ milieu de la plus courte distance D existant entre les droites M et N, et dont l'axe infini est dirigé suivant cette plus courte distance D.

Nous avons aussi démontré, que si l'on mène par le point $o$ deux droites G et K situées dans un plan Y parallèle à la fois aux droites M et N, faisant avec M et N des angles égaux, ces deux droites G et K qui seront rectangulaires entre elles, appartiendront au paraboloïde H.

Or, il est évident, par les propriétés connues du paraboloïde hyperbolique *rectangulaire* (ainsi désigné parce que ses deux plans directeurs comprennent entre eux un angle droit) que si l'on fait mouvoir une droite L sur G et M, de manière à ce qu'elle coupe G sous l'angle droit, cette droite s'appuiera en même temps sur la droite N et engendrera un paraboloïde hyperbolique rectangulaire. En sorte, que si l'on fait mouvoir G autour de l'axe M, on aura un hyperboloïde à une nappe et de révolution B et que si l'on fait mouvoir G autour de l'axe N, on aura un second hyperboloïde à une nappe et de révolution $B_1$; et ces deux surfaces B et $B_1$ seront tangentes l'une à l'autre suivant la droite G, mais couperont la surface H suivant cette droite G (laquelle représente dans ce cas la *ligne* $\xi$) (*).

Si l'on fait tourner respectivement la droite K autour des axes M et N, on aura deux nouveaux hyperboloïdes à une nappe et de révolution B' et $B_1'$, tangents l'un à l'autre suivant la droite K et coupant la surface H suivant cette droite K.

Si les deux hyperboloïdes B et $B_1$ sont extérieurs l'un à l'autre, les deux hyperboloïdes B' et $B_1'$ sont intérieurs l'un à l'autre, *et réciproquement.*

(*) Ce fut ce qui se passe, dans ce cas, entre les surfaces H, B et $B_1$ qui me fit soupçonner que l'auteur de l'*Essai sur les machines* avait été induit en erreur, et ce qui m'engagea à résoudre la question qui fait le sujet du § IV de ce chapitre.

Le problème a donc deux solutions.

Cinquième cas. $n=1$ et $a=\frac{1}{0}$.

Les axes M et N ne sont pas situés dans un même plan et comprennent entre eux un angle droit.

Le *lieu* H des points de l'espace, dont les distances à ces deux axes sont égales entre elles, est encore un *paraboloïde hyperbolique*.

Dans ce cas les droites G et K qui font des angles égaux avec les axes M et N, et qui par suite sont rectangulaires entre eux (comme il a été dit ci-dessus, *quatrième cas*), feront chacune une angle égal à un demi-droit avec chacune des droites M et N, puisque ces droites M et N font entre elles un angle droit.

Dès lors, les deux hyperboloïdes engendrées par le mouvement de rotation de G et de K autour de M, se confondront en un seul *hyperboloïde* $\Delta$, et de même les deux hyperboloïdes engendrés par le mouvement de rotation de G et de K autour de N se confondront en un seul *hyperboloïde* $\Delta_1$; et ces deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution $\Delta$ et $\Delta_1$ seront tangents l'un à l'autre par tous les points des droites G et K; et de plus ces deux hyperboloïdes seront extérieurs l'un à l'autre.

Le problème n'a donc dans ce cas qu'une seule solution.

Sixième cas. $n=1$ et $a=0$.

Les axes M et N sont parallèles.

Le *lieu* H des points de l'espace également distants des axes M et N ne sera autre qu'un plan P perpendiculaire au plan Z des axes M et N et parallèle à ces axes.

Les plans P et Z se coupent suivant une droite I qui, en tournant respectivement autour des axes M et N, engendrera deux cylindres de révolution B et $B_1$ qui seront tangents l'un à l'autre suivant cette droite I.

Les deux cylindres B et $B_1$ seront extérieurs l'un à l'autre.

Le problème n'aura donc dans ce cas qu'une seule solution.

Septième cas. $n=1$ et $b=0$.

Les axes M et N se coupent en un point $o$.

Le *lieu* H des points de l'espace également distants des axes M et N, sera formé par deux plans P et Q perpendiculaires au plan Z des axes donnés et qui diviseront l'angle $\alpha$ des axes et son supplément en deux parties égales. Les deux plans P et Q seront perpendiculaires entre eux; le plan P coupera le plan Z suivant une droite J, et le plan Q coupera le même plan Z suivant une droite J'; les deux droites J et J' seront rectangulaires entre elles.

En faisant tourner J autour de M et de N on engendrera deux cônes B et $B_1$ de révolution, extérieurs l'un à l'autre et tangents l'un à l'autre suivant la droite J.

En faisant tourner J' autour de M et N on engendrera deux autres cônes B' et $B_1'$ de révolution, encore extérieurs l'un à l'autre et tangents l'un à l'autre suivant la droite J'; le problème a donc deux solutions.

Il suffit de jeter les yeux sur la *fig.* 122 pour s'assurer que les cônes B et $B_1$, B' et $B_1'$ sont en effet extérieurs l'un à l'autre et que le problème a deux solutions.

Si les deux droites M et N étaient perpendiculaires entre elles et si dès lors on avait en même temps, $n=1$, $a=\frac{1}{0}$ et $b=0$,

Les cônes B et $B_1$ se réduiraient à un seul cône ayant pour angle au sommet un angle droit.

De même les cônes $B_1$ et $B_1'$ se réduiraient à un seul cône ayant pour angle au sommet un angle droit.

Et dans ce cas le problème n'aura qu'une seule solution.

Dans ce qui précède nous avons déterminé pour tous les cas; excepté pour le premier cas $\left(\text{celui où l'on a } n \text{ arbitraire et } a=\frac{1}{0}\right)$, la nature géométrique des deux surfaces $\Delta$ et $\Delta_1$ et de la *ligne* $\xi$ par laquelle ces surfaces se mettaient en contact.

Il nous reste donc à compléter la solution du problème dans le *premier cas*.

On se rappelle que l'intégrale (18) de l'équation finale (5) nous a donné l'équation d'une hyperbole qui, en tournant autour de l'axe M ou axe des $z$, engendrait la surface $\Delta$, laquelle était dans ce cas un hyperboloïde à une nappe et de révolution.

Cherchons maintenant la nature géométrique de la surface $\Delta_1$ et de la *ligne* $\xi$ par laquelle les deux surfaces $\Delta$ et $\Delta_1$ se mettent en contact.

Et d'abord cherchons la courbe de contact $\xi$.

Nous savons que cette ligne $\xi$ doit se trouver sur la surface H qui a pour équation, l'équation (1), dans laquelle on aura supposé $a=\frac{1}{0}$; elle doit aussi se trouver sur la surface $\Delta$ qui a pour équation, l'équation (18).

La droite $\xi$ sera donc l'intersection des deux surfaces H et $\Delta$.

Reprenons donc les équations de H et $\Delta$.

$$(\text{H})\quad x^2+y^2-n^2z^2=n^2(b-y)^2 \quad \text{et} \quad (\Delta)\quad x^2+y^2-n^2z^2=\frac{n^2b^2}{(n^2+1)^2}.$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre; on a :

$$b-y=\pm\frac{b}{n^2+1}$$



d'où

$$y_1 = \frac{n^2 b}{n^2+1} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{b(n^2+2)}{n^2+1}$$

Ainsi la courbe de contact $\xi$ est composée de deux courbes planes $\xi_1$ et $\xi_2$, l'une située dans le plan $Y_1$ dont l'équation est : $y_1 = \frac{n^2 b}{n^2+1}$ et l'autre dans le plan $Y_2$ dont l'équation est : $y_2 = \frac{b(n^2+2)}{n^2+1}$ ; les plans $Y_1$ et $Y_2$ étant perpendiculaires à la plus courte distance existant entre les axes M et N.

Cherchons maintenant l'équation de la projection des courbes $\xi_1$ et $\xi_2$ sur le plan des $zx$.

Pour cela, subtituons successivement dans l'équation ($\Delta$) de la surface $\Delta$ à la place de $y$ les valeurs de $y_1$ et de $y_2$ :

Par la substitution de la valeur de $y_1$, on aura :

$$x^2 - n^2 z^2 = \frac{n^2 b^2}{(n^2+1)^2}(1-n^2)$$

Et comme on a posé pour condition $n<1$, le facteur $(1-n^2)$ sera positif, on aura donc pour la *ligne* $\xi_1$ une hyperbole, dont l'axe imaginaire sera parallèle à l'axe des $z$.

L'axe imaginaire A de cette courbe $\xi_1$ sera égal à :

$$\frac{2b\sqrt{1-n^2}}{n^2+1}$$

Et l'axe réel B de cette courbe $\xi_1$ sera égal à :

$$\frac{2nb}{n^2+1}\sqrt{1-n^2}$$

Par la substitution de la valeur de $y_2$, on aura :

$$x^2 - n^2 z^2 = -\frac{b^2(n^4+3n^2+4)}{(n^2+1)^2}$$

On aura donc pour la ligne $\xi_2$ une hyperbole dont l'axe imaginaire sera dirigé parallèlement à l'axe des $x$.

L'axe imaginaire B' de cette courbe $\xi_2$ sera égal à :

$$\frac{2b}{n^2+1}\sqrt{n^4+3n^2+4}.$$

Et l'axe réel A' de cette courbe $\xi_2$ sera égal à :

$$\frac{2b}{n(n^2+1)}\sqrt{n^4+3n^2+4}$$

Le produit des axes imaginaires sera égal au produit des axes réels des deux courbes $\xi_1$ et $\xi_2$, car on a :

$$AB' = A'B = \frac{4b^2}{(n^2+1)^2}\sqrt{(n^4+3n^2+4)(1-n^2)}$$

Et l'on a donc

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

Ce que l'on pouvait prévoir, car une surface du second degré est toujours coupée par deux plans parallèles suivant des courbes dont les axes sont proportionnels entre eux.

Deux surfaces du second degré ne peuvent se toucher que suivant une seule courbe du second degré ; la surface $\Delta_1$ ne pourra donc être engendrée que par l'une des hyperboles $\xi_1$ ou $\xi_2$. Cherchons laquelle de ces courbes engendre la surface $\Delta_1$, et pour cela faisons tourner la courbe $\xi_1$ autour de l'axe N, elle engendrera une surface de révolution $\Delta_1$ qui aura pour équation

$$(\Delta_1) \quad \frac{x^2}{n^2} - z^2 - (b-y)^2 = -\frac{b^2n^2}{(n^2+1)^2}$$

Faisons tourner la courbe $\xi_2$ autour du même axe N, elle engendrera une surface de révolution $\Delta_1'$ qui aura pour équation :

$$(\Delta_1') \quad z^2 - \frac{x^2}{n^2} + (b-y)^2 = \frac{b^2}{n^2}\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^2$$

Maintenant il faudrait chercher laquelle des deux surfaces $\Delta_1$ ou $\Delta_1'$ est tangente à la surface $\Delta$.

Mais on peut s'en dispenser en songeant que, ayant trouvé l'équation (18) qui était celle de la courbe méridienne de la surface $\Delta$ de révolution autour de l'axe M ou axe des $z$, il suffira de remplacer dans cette équation (18) $y$ par $(b-y)$, $x$ par $z$ et $\frac{1}{n}$ par $n$, pour avoir l'équation de la courbe méridienne de la surface $\Delta_1$ de révolution autour de l'axe N dont les équations sont $y=b$ et $z=0$.

Or, l'équation (18) étant : $6^2 - n^2\alpha^2 = \frac{n^2b^2}{(n^2+1)^2}$ (qui évidemment peut s'écrire sous

la forme $y^2 - n^2z^2 = \frac{n^2b^2}{(n^2+1)^2}$) si l'on fait les transformations indiquées, on aura :

$$(b-y)^2 - \frac{x^2}{n^2} = \frac{n^2b^2}{(n^2+1)^2}$$

Or si l'on coupe la surface $\Delta_1$ dont l'équation est $(\Delta_1)$ par le plan des $xy$, on trouve précisément la même courbe méridienne.

Ainsi le problème n'a qu'une seule solution, donnée par les deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution ayant pour équations, les équations $(\Delta)$ et $(\Delta_1)$ et ces surfaces se mettront en contact suivant l'hyperbole $\xi_1$, dont l'axe imaginaire est parallèle à l'axe des $z$ et dont le plan Y, est parallèle aux deux axes M et N.

Et il est aussi évident que les trois surfaces H, $\Delta$ et $\Delta_1$ ne sont point tangentes entre elles suivant la courbe $\xi$ de contact de $\Delta$ et $\Delta_1$ puisque $\Delta$ et par suite $\Delta_1$ coupe H suivant cette courbe $\xi_1$.

### *D'une équation différentielle plus simple que l'équation* (18) *donnée par* M. Persy.

Lorsque M. *Persy* chercha la solution du problème, *trouver sur la surface* H *lieu des points de l'espace dont les distances à deux axes* M *et* N *sont dans un rapport constant représenté par* n, *une courbe* $\xi$, *telle qu'elle engendre par son mouvement de rotation autour de l'axe* M *et ensuite autour de l'axe* N *deux surfaces de révolution* $\Delta$ *et* $\Delta_1$ *qui soient en contact suivant tous les points de cette ligne* $\xi$ : il parvint à l'équation différentielle de la courbe méridienne de la surface $\Delta$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, équation différentielle qui est du premier ordre et du quatrième degré.

Depuis, je me suis demandé si, par des considérations géométriques autres que celles employées par M. *Persy* pour mettre le problème en équation, on ne pourrait pas arriver à une équation finale plus simple.

Voici la marche que j'ai suivie.

Prenons sur la surface H un point $m$ ; par ce point on peut toujours faire passer une droite G s'appuyant à la fois sur les deux axes M et N.

Menons un plan T tangent à la surface H et en ce point $m$.

Menons par le point $m$ un plan Q perpendiculaire à la droite G ; les deux plans T et Q se couperont suivant une droite L qui passera par le point $m$, et sera perpendiculaire à G.

Supposons que la courbe $\xi$ tracée sur la surface H existe, elle passera par le point $m$ et aura en ce point $m$ pour tangente la droite L.

La courbe $\xi$ se projettera sur le plan des $xy$ suivant une courbe $\xi^h$, et la droite

L se projettera sur le même plan $xy$ suivant une droite $L^{A}$, et le point $m$ se projettera aussi sur le plan $xy$ en un point $m^{A}$.

Il est évident que la courbe $\xi^{A}$ et la droite $L^{A}$ seront tangentes l'une à l'autre au point $m^{A}$.

Dès lors, si je puis avoir l'équation $y = \alpha x + 6$ de la droite $L^{A}$, il suffira de poser

$$\frac{dy}{dx} = \alpha$$

pour avoir l'équation différentielle de la courbe $\xi^{A}$, et la courbe $\xi$ sera l'intersection du cylindre ayant pour section droite la courbe $\xi^{A}$ et de la surface H.

Effectuons les calculs en suivant la marche que nous venons d'indiquer.

Les équations de l'axe M sont :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0$$

Les équations de l'axe N sont :

$$x = az \quad \text{et} \quad y = b$$

L'équation du *lieu* H est :

$$x^2 + y^2 = n^2 \left[ (b-y)^2 + \frac{(x-az)^2}{a^2+1} \right]$$

Désignons par $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées du point $m$.

Les équations de la droite G, seront :

$$x = \frac{x'}{y'} y \qquad x - x' = \frac{ax'(b-y')}{bx'-ay'z'} (z-z')$$

L'équation du plan Q sera :

$$(x-x') + \frac{y'}{x'}(y-y') + \frac{ax'(b-y')}{bx'-ay'z'}(z-z') = 0$$

L'équation du plan T sera :

$$(x-x')\left[\frac{(n^2-a^2-1)x' - an^2z'}{a^2+1}\right] + (y-y')[(n^2-1)y' - n^2b] + (z-z')\left[\frac{n^2a}{a^2+1}(az'-x')\right] = 0$$

L'équation de $L^{A}$ sera :

$$y - y' = (x-x') \frac{\{ax'(b-y')\}\{n^2a(az'-x')\} - \{(n^2-a^2-1)x' - an^2z'\}\{bx'-ay'z'\}}{ay'(b-y')n^2a(az'-x') - \{(n^2-1)y' - n^2b\}(a^2+1)\{bx'-ay'z'\}}.$$



L'équation différentielle de $\xi^h$ sera donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n^2a^2x^2y - a^2n^2.yz^2 + a(n^2 - n^2a^2 - a^2 - 1)xyz - b(n^2 - a^2 - 1 + n^2a^2)x^2 + ab(n^2a^2 + n^2)xz}{a(n^2 - a^2 - 1)y^2z + n^2a^2y^2x - n^2bayz - b(2n^2a^2 + n^2 - a^2 - 1)xy + n^2b^2(a^2+1)x}$$

dans laquelle il faudra remplacer $z$ par la valeur tirée de l'équation de la surface H, cette valeur est :

$$z = \frac{1}{a}\left[x \pm \sqrt{(a^2+1)\{x^2 + y^2 - n^2(b-y)^2\}}\right]$$

Et l'on arrive ainsi à une équation différentielle plus simple, il est vrai, mais que l'on ne sait pas encore intégrer.

Par ce qui précède, on doit reconnaître que l'idée de baser la Théorie géométrique des engrenages sur les *surfaces primitives*, désignant ainsi deux surfaces de révolution $\Delta$ et $\Delta_1$, ayant respectivement pour axe de rotation les droites M et N et étant tangentes l'une à l'autre suivant une *ligne* $\xi$, telle que les distances de chacun de ses points aux axes M et N sont dans un rapport constant et inverse de celui des vitesses des axes M et N; on doit reconnaître, dis-je, que cette idée ne peut être admise, car on doit se rappeler que dans le cas où les axes M et N sont rectangulaires, les surfaces $\Delta$ et $\Delta_1$ sont deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution et extérieurs l'un à l'autre, en sorte que l'on serait conduit à penser, puisque le problème de géométrie n'a qu'une seule solution dans ce cas, qu'il n'est pas possible d'exécuter un engrenage intérieur, l'engrenage extérieur étant le seul auquel on est conduit par la solution du problème rélatif aux *surfaces primitives*.

Je crois avoir donné, dans l'ouvrage que j'ai publié en 1842 sous le titre : *Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes situés ou non situés dans un même plan*, les véritables considérations géométriques du problème important des engrenages, en ne considérant point les *surfaces primitives*, mais bien et seulement deux *cercles primitifs*, quelle que soit la position des axes l'un par rapport à l'autre.

J'ai aussi, dans ce même ouvrage, fait voir que le problème des surfaces primitives ne pouvait être de quelque intérêt que sous le point de vue géométrique, car il était complétement inutile pour la théorie des engrenages.

---

# CHAPITRE VII.

## THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INFINIMENT PETITS.

### § Ier.

*De la manière dont on doit considérer les infiniment petits en géométrie descriptive.*

La *géométrie descriptive* s'occupe des problèmes de *relation de position* et l'*analyse* s'occupe des problèmes de *relation métrique*.

La *geométrie descriptive*, au moyen d'*épures* construites à la règle et au compas, permet de construire des corps limités par des formes déterminées ; au moyen du raisonnement géométrique, et en s'appuyant sur la méthode des projections, la géométrie descriptive parvient à reconnaître certaines propriétés de l'espace figuré, et ainsi les propriétés de *relation de position*.

La *géométrie descriptive*, exprimant, au moyen des *épures*, les résultats auxquels elle parvient, en se servant de la *langue graphique*, ne peut exprimer que des choses finies, des choses mesurables au moyen d'une *échelle*.

Les choses infiniment petites ne peuvent être exprimées graphiquement. Il n'en est pas de même en *analyse*, où la langue algébrique, au moyen d'un *algorithme* particulier, a permis d'exprimer des quantités infiniment petites, et d'établir certains *théorèmes* pour les *infiniment petits*, aussi facilement qu'on avait établi des théorèmes sur les quantités finies.

L'*analyse*, en vertu de la puissance de la langue qu'elle emploie, a pu considérer des *infiniment petits* de divers ordres, puisqu'elle a pu les comparer entre eux et en vertu même de la langue *algébrique* qu'elle emploie.

En géométrie descriptive, nous ne pouvons pas comparer des grandeurs, nous ne pouvons donc considérer les infiniment petits que sous un point de vue plus borné que celui sous lequel l'*analyse* peut les envisager.

Nous ne pouvons pas non plus *écrire* en géométrie descriptive les infiniment petits, la *langue graphique* est trop imparfaite, vu nos sens et par suite nos instruments pour que cela soit possible.

En géométrie descriptive, nous ne pourrons donc arriver jusqu'aux infiniment petits que par la pensée, nous ne pourrons les rendre sensibles que par

le raisonnement, et nous ne pourrons les introduire dans nos considérations géométriques qu'en les soumettant à la méthode des projections qui sert de base à la géométrie descriptive.

Maintenant, nous allons nous occuper des *courbes* et des *surfaces*.

Nous pouvons toujours considérer une *courbe* comme étant parcourue par un *point mobile*.

Nous pouvons toujours considérer une *surface* comme étant parcourue par une *courbe mobile*, constante de forme ou de forme variable.

DES COURBES.

1. Un point $m$ décrivant dans l'espace une courbe $\xi$ en vertu d'une certaine *loi* de mouvement K passe successivement en des positions distinctes $m'$, $m''$, $m'''$,.... nous dirons, le point $m$ s'étant déplacé en vertu de la loi K pour prendre la position $m'$ sur la courbe $\xi$, les points $m$ et $m'$ sont infiniment voisins si nous ne pouvons supposer qu'un troisième point $n$ puisse être placé entre les points $m$ et $m'$, de telle manière que ce troisième point $n$ soit plus près du point $m$, et en vertu de la loi K, que ne l'est le point $m'$.

Si donc par des raisonnements exacts, nous trouvions que les points $m$ et $m'$, que nous avions supposés tout d'abord infiniment voisins, sont tels, cependant, qu'un point $n$ intermédiaire se trouve en effet, et en vertu de la loi K, plus près de $m$ que $m'$ n'est du point $m$ (d'après l'hypothèse primordiale), nous dirons que ce sont les points $m$ et $n$ qui sont infiniment voisins et non les points $m$ et $m'$; ou, en d'autres termes, nous dirons que le point $n$ est réellement le point successif de $m$ sur la courbe $\xi$ en vertu de la loi K, et non le point $m'$ comme on l'avait présupposé.

Et si, par des raisonnements géométriques fondés sur la loi K, nous trouvons une suite de points $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,..... situés sur la courbe $\xi$ et tels que $m'$ soit infiniment voisin de $m$, que $m''$ soit infiniment voisin de $m'$, que $m'''$ soit infiniment voisin de $m''$ et ainsi de suite, nous dirons que les points $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,.... sont des points successifs et infiniment voisins de la courbe $\xi$.

La petite droite $mm'$ qui unit deux points successifs et infiniment voisins $m$ et $m'$ sera dite *infiniment petit rectiligne* ou *élément rectiligne* de la courbe $\xi$ et le polygone $(mm'm''m''',...)$ ayant pour sommets les points successifs et infiniment voisins $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,... de la courbe $\xi$ et pour côtés les éléments rectilignes successifs, $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$, $\overline{m''m'''}$,..... de cette même courbe $\xi$, sera dit *polygone infinitésimal*, et l'on pourra toujours remplacer la courbe $\xi$ par son polygone infinitésimal.

On peut supposer qu'une même courbe $\xi$ soit décrite dans l'espace par un point mobile en vertu de diverses *lois* K, K', K''....; pour chaque *loi* l'on aura un polygone infinitésimal différent.

Lors donc que l'on aura à résoudre un problème et que l'on sera conduit à considérer des infiniment petits rectilignes, il faudra pendant tout le cours de la démonstration ne s'appuyer que sur la même *loi*.

II. Lorsque l'on a une courbe $\xi$, quel que soit le mode qui l'ait produite, on peut toujours supposer que cette courbe $\xi$ soit parcourue par un point mobile et d'un mouvement uniforme. Dès lors, le mobile parcourt des arcs égaux de la courbe $\xi$ et en temps égaux.

Le polygone infinitésimal, dans ce cas, aura tous ses côtés égaux.

Toutes les propriétés générales relatives aux courbes, pourront donc être établies en partant du polygone infinitésimal à côtés égaux, puisque ces propriétés seront indépendantes du mode (quel qu'il soit) qui a produit la courbe.

III. Une courbe $\xi$ peut être le résultat de constructions graphiques, chaque point de cette courbe étant déterminé par la même *construction* $K_1$.

La même courbe $\xi$ peut être déterminée par diverses constructions $K_{1}$, $K_1'$, $K_1''$, lorsque l'on aura donc un problème à résoudre et que l'on sera conduit à employer les infiniment petits rectilignes ou en d'autres termes le polygone infinitésimal, il faudra pendant tout le cours de la démonstration ne s'appuyer que sur la même *construction*.

### *De la sécante et de la tangente à une courbe.*

IV. Étant donnée une courbe $\xi$ à simple ou double courbure, prenons un point *m* sur cette courbe.

Par ce point *m* (*fig.* 123) menons des droites S, S',..... qui couperont la courbe $\xi$ respectivement aux points *p*, *p'*,.... ces droites S, S',..... seront dites *sécantes* de la courbe $\xi$, parce que les arcs *mp*, *mp'*,..... sont *finis*.

L'on conçoit que l'on peut faire mouvoir le point *p* sur la courbe $\xi$ pour le rapprocher du point *m*, et qu'après avoir pris les positions *p'*, *p''*,..... enfin il prendra la position *m'* qui sera telle que le point *m'* sera le point successif et infiniment voisin de *m*, en sorte que $\overline{mm'}$ sera l'élément rectiligne de la courbe $\xi$, et sera, dès lors, le côté du polygone infinitésimal à côtés égaux qui peut remplacer la courbe $\xi$.

Cet élément rectiligne $\overline{mm'}$ étant prolongé donnera une droite indéfinie T qui sera une sécante toute particulière de la courbe $\xi$, car pour cette sécante les deux points d'intersection ne sont plus à distance finie (mesurable) l'un de l'autre, mais à une distance infiniment petite.

Cette sécante a pris le nom de *tangente*.

La *tangente* à une courbe est donc une droite qui a rigoureusement et géométriquement parlant deux points communs avec la courbe.

L'élément rectiligne $\overline{mm'}$ est dit point de contact, et c'est pour abréger que l'on dit construire la tangente en un point d'une courbe, car il faut bien le remarquer, le point d'une courbe étant le sommet du polygone infinitésimal, on a toujours deux éléments rectilignes qui se coupent en ce point, et par conséquent par un point d'une courbe passent rigoureusement deux tangentes successives.

Aussi peut-on considérer une courbe comme étant l'enveloppe de ses tangentes.

De la définition que nous venons de donner pour la tangente, résulte comme conséquence rigoureuse que l'on ne peut pas faire passer entre la tangente (définie ainsi que nous l'avons fait) et la courbe, une seconde droite qui approche plus près de la courbe que la tangente n'en approche en effet :

Nous ne pouvons pas rapprocher le point $p$ plus près du point $m$ que nous ne l'avons fait en le plaçant en $m'$, puisque nous supposons que ce point $m'$ est le point successif et infiniment voisin du point $m$ ; si donc nous voulons mener par le point $m$ une droite qui, comme *sécante* à la courbe, soit successive et infiniment voisine de la droite T, il faudra qu'elle passe par le point $p''$ supposé être le point successif et infiniment voisin du point $m'$. De sorte que la corde $mp''$ sera la plus petite corde que l'on puisse inscrire dans la courbe $\xi$ en faisant passer cette corde par le point $m$ ; cette corde sera le grand côté d'un triangle isocèle dont les autres côtés, égaux entre eux, seront les éléments rectilignes successifs $\overline{mm'}$ et $\overline{m'p''}$ de la courbe $\xi$.

Or, entre la sécante donnée par la corde $mp''$ prolongée et la courbe $\xi$, on pourra faire passer la droite T qui est donnée par l'élément rectiligne $\overline{mm'}$ prolongé, et évidemment on ne pourra faire passer que la droite T ; donc, etc.

*Du plan normal et du plan tangent à une courbe.*

V. Quelque petit que soit l'élément rectiligne $\overline{mm'}$ d'une courbe, nous pouvons toujours concevoir le milieu de cet élément. Le plan N mené perpendiculairement à cet élément sera dit plan normal, et comme les points $m$ et $m'$ sont successifs et infiniment voisins, que ce plan N soit mené perpendiculairement à l'élément rectiligne en l'une de ses extrémités $m$ ou $m'$, ou au milieu de cet élément, la différence est insensible.

Cependant, pour la rigueur géométrique, nous sommes forcé d'établir une loi, qui dérive d'ailleurs tout naturellement de ce que nous avons supposé que

toute courbe pouvait être considérée comme parcourue par un point mobile. Dès lors, lorsque l'on se donne un point $m$ sur une courbe $\xi$ et que l'on propose de construire la tangente en ce point à cette courbe, il faut indiquer dans quel sens on doit marcher sur la courbe. Si l'on marche dans le sens indiqué par la flèche $y$, la tangente sera le prolongement de l'élément rectiligne $\overline{mm'}$, si l'on marche dans le sens de la flèche $y'$, la tangente sera le prolongement de l'élément rectiligne $\overline{m_1m}$.

Le sens de direction étant donné, le *plan normal* sera le plan mené perpendiculairement à l'élément rectiligne, par le premier point de cet élément.

Nous donnerons le nom de *plan tangent* à tout plan $\Theta$ passant par la tangente.

On n'a donc qu'un plan normal en un point d'une courbe, et une infinité de plans tangents en un point d'une courbe.

### *Du plan osculateur à une courbe.*

VI. Par une droite, on peut mener une infinité de plans. Par la tangente T en un point $m$ d'une courbe $\xi$, on peut mener une infinité de plans tangents $\Theta$, $\Theta'$, $\Theta''$,..... à cette courbe. Par trois points, on ne peut faire passer qu'un seul plan. Par conséquent, par trois points successifs $m$, $m'$, $m''$, d'une courbe, ou, en d'autre termes, par deux éléments rectilignes successifs $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$ d'une courbe, on ne peut faire passer qu'un plan qui prendra le nom de *plan osculateur*.

Nous dirons donc qu'une courbe $\xi$ n'a qu'un seul plan osculateur en chacun de ses points.

Cela posé:

Concevons une courbe $\xi$ (*fig.* 124) et ses points successifs et infiniment voisins $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, $m^4$, $m^5$,....

Chaque élément rectiligne prolongé $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$, $\overline{m''m'''}$,..... donnera une tangente à la courbe $\xi$.

On aura donc les tangentes successives et infiniment voisines T, T', T'', T''', $T^4$.

Les deux tangentes successives T et T' se coupent en un point $m'$ de la courbe $\xi$.

Les deux tangentes successives T' et T'' se coupent en un point $m''$ de la courbe $\xi$, et ainsi de suite.

Le point $m''$ est le successif et infiniment voisin de $m'$.

La première tangente T coupe la seconde tangente T', mais ne coupe pas la troisième tangente T'' (car nous supposons la courbe $\xi$ à double courbure).

Le premier plan osculateur $\Theta$ passe par T et T',
Le second plan osculateur $\Theta_1$ passe par T' et T'',
Le troisième plan osculateur $\Theta_2$ passe par T'' et T''', et ainsi de suite.

Entre les plans $\Theta$ et $\Theta_1$, on ne peut pas placer un troisième plan qui approche plus près du plan $\Theta$ que n'en approche le plan $\Theta_1$, puisque l'on ne peut pas placer entre les deux tangentes T et T' une troisième droite qui approche plus près de T que n'en approche T', car l'on ne peut pas placer entre les points $m$ et $m'$, $m'$ et $m''$ un troisième point qui, situé sur la courbe $\xi$, approche plus près de $m$ que n'en approche $m'$, et approche plus près de $m'$ que n'en approche $m''$; puisque par hypothèse primordiale nous avons supposé que les points $m$, $m'$, $m''$,.... étaient les points successifs et infiniment voisins de la courbe $\xi$.

Les plans osculateurs $\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\Theta_3$,..... sont donc les plans osculateurs successifs et infiniment voisins de la courbe $\xi$.

Cela posé :

Menons une suite de plans normaux :

N au point $m$ à la tangente T,
$N_1$ au point $m'$ à la tangente T',
$N_2$ au point $m''$ à la tangente T'',
$N_3$ au point $m'''$ à la tangente T''', et ainsi de suite.

Les plans N et $N_1$ se couperont suivant une droite G,
Les plans $N_1$ et $N_2$ se couperont suivant une droite G',
Les plans $N_2$ et $N_3$ se couperont suivant une droite G'', et ainsi de suite.

Or, comme les tangentes T, T', T'',..... sont successives et infiniment voisines, les plans N, $N_1$, $N_2$,...... seront successifs et infiniment voisins, et par suite les droites G, G', G'',..... seront successives et infiniment voisines.

Or, G coupe G' en un point $o$, G' coupe G'' en un point $o'$, et ainsi de suite.

Les points $o$, $o'$,.... seront donc des points successifs et infiniment voisins, et construits dans l'espace en vertu d'un certain *mode;* ces points seront donc les points successifs et infiniment voisins d'une courbe $\delta$ ayant pour tangentes successives les droites G, G', G'',....

*Du rayon de courbure d'une courbe.*

VII. Par trois points situés à distance finie les uns des autres et aussi par trois points infiniment près les uns des autres, on peut faire passer un cercle (*fig.* 125).

C'est le rayon du cercle C qui passe par les trois points $m$, $m'$, $m''$ successifs et

infiniment voisins de la courbe $\xi$ que l'on appelle rayon de courbure de la courbe $\xi$ pour le point $m$.

Le cercle C est situé dans le plan osculateur $\Theta$.

Le rayon du cercle C' situé dans le plan osculateur $\Theta_1$ (ce cercle C' passant par les trois points successifs et infiniment voisins $m'$, $m''$, $m'''$) sera le rayon de courbure de la courbe $\xi$ pour le point $m'$.

Le cercle C aura pour centre le point $q$ en lequel la droite G perce le plan $\Theta$; le cercle C' aura pour centre le point $q'$ en lequel la droite G' perce le plan $\Theta_1$, et ainsi de suite.

Les rayons de courbure $qm$, $q'm'$,..... étant prolongés donneront des droites L, L', L'',..... qui seront respectivement normales à la courbe $\xi$ aux points $m$, $m'$, $m''$,.... et qui seront situées respectivement dans les plans osculateurs $\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$,... ces droites seront donc successives et infiniment voisines.

Les divers points $q$, $q'$, $q''$,..... formeront une courbe $\chi$ qui sera coupée par les droites L, L', L'',..... puisqu'une de ces droites L', par exemple, ne passera pas par les deux points successifs $q$ et $q'$ de la courbe $\chi$, attendu que les deux plans $\Theta$ et $\Theta_1$ se coupent suivant la droite T'.

On donne plus particulièrement le nom de *normale* au rayon de courbure prolongé.

Mais toute droite tracée dans le *plan normal* et passant par le point en lequel la courbe est coupée par ce plan peut prendre le nom de *normale*.

Ainsi, on dit qu'une courbe a en chacun de ses points une seule tangente, et un seul plan normal, une infinité de plans tangents et une infinité de normales, un seul plan osculateur et un seul rayon de courbure.

D'après ce qui précède, on voit :

1° Que les rayons de courbure successifs et infiniment voisins d'une courbe ne sont point situés deux à deux et successivement dans un même plan, ou comme on le dit : *ne se coupent pas*.

2° Que les tangentes successives et infiniment voisines d'une courbe sont situées deux à deux et successivement dans un même plan (qui est le plan osculateur) ou, comme on le dit : *se coupent*.

Nous verrons plus loin que ces deux manières d'être d'une suite de droites situées dans l'espace, et l'on ne peut évidemment concevoir que ces deux manières d'être, donnent naissance à deux grandes familles de surfaces *réglées* : les surfaces *gauches* et les surfaces *développables*.

Le cercle C a en commun avec la courbe $\xi$, les trois points successifs $m$, $m'$, $m''$; on donne à l'arc circulaire qui part du point $m$ pour aboutir au point $m''$, le nom d'arc élémentaire de la courbe $\xi$ ou *d'élément curviligne* de la courbe $\xi$.

On peut donc considérer la courbe $\xi$ comme n'étant plus composée d'*éléments rectilignes*, mais d'*éléments curvilignes circulaires*, et dès lors on peut prendre pour la courbe $\xi$, non plus un polygone infinitésimal à côtés rectilignes, mais un polygone infinitésimal à côtés curvilignes circulaires, ces côtés curvilignes n'étant point placés les uns à la suite des autres, bout à bout, mais celui qui suit ayant avec celui qui le précède un élément rectiligne commun.

C'est ainsi que la courbe $\xi$ peut être considérée comme l'enveloppe de ses divers cercles osculateurs C, C', C'',..... tout comme précédemment nous avions regardé cette courbe $\xi$ comme l'enveloppe de ses tangentes T, T', T'', T'''.

En géométrie descriptive nous ne considérons dans les courbes que deux espèces d'*éléments*, les éléments *rectilignes* et les éléments *curvilignes*. La considération de ces *infiniment petits* suffit pour nous permettre de résoudre tous les problèmes dont on doit s'occuper dans les diverses *applications* de la géométrie descriptive.

Car toutes les constructions y ont pour point de départ ou des déplacements successifs en ligne droite, ces déplacements changeant successivement de *direction*, ou des déplacements successifs en ligne circulaire, l'axe de *rotation* changeant successivement de position.

## DES SURFACES.

VIII. une courbure $\varphi$ décrivant dans l'espace une surface $\Sigma$ en vertu d'une certaine loi K de mouvement, passe successivement en diverses positions $\varphi'$, $\varphi''$, $\varphi'''$,..... nous dirons, la courbe $\varphi$ s'étant déplacée en vertu de la loi K pour prendre la position $\varphi'$ sur la surface $\Sigma$, les courbes $\varphi$ et $\varphi'$ sont infiniment voisines, si nous ne pouvons supposer qu'une troisième courbe $\lambda$ puisse être placée entre les courbes $\varphi$ et $\varphi'$, de telle manière que cette troisième courbe $\lambda$ soit plus près de la courbe $\varphi$ que ne l'est la courbe $\varphi'$.

Si donc, par des raisonnements exacts, nous trouvions que les courbes $\varphi$ et $\varphi'$ que nous avions supposées tout d'abord infiniment voisines, sont telles cependant, qu'une courbe intermédiaire se trouve être en effet, en vertu de la loi K, plus près de $\varphi$ que $\varphi'$ n'est de $\omega$, nous dirons que ce sont les courbes $\varphi$ et $\lambda$ qui sont infiniment voisines et non les courbes $\varphi$ et $\varphi'$.

En d'autres termes, nous dirons que la courbe $\lambda$ est réellement la courbe successive de $\varphi$ sur la surface $\Sigma$ en vertu de la loi K, et non la courbe $\varphi'$ comme on l'avait présupposé.

Et si, par des raisonnements géométriques fondés sur la loi K, nous trouvons une suite de courbes $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$,..., telles que $\varphi'$ est infiniment voisine de $\varphi$, que $\varphi''$ est infiniment voisine de $\varphi'$ et ainsi de suite, nous dirons que les courbes $\varphi$, $\varphi'$,

$\varphi''$,..... sont des courbes génératrices de la surface $\Sigma$ et sont successives et infiniment voisines sur cette surface $\Sigma$.

La petite surface comprise sur la surface $\Sigma$ entre deux courbes successives $\varphi$ et $\varphi'$ sera dite *zone élémentaire* de la surface $\Sigma$.

Et comme l'on peut concevoir qu'une même surface $\Sigma$ est engendrée de diverses-manières par des courbes mobiles, si l'on suppose que cette surface $\Sigma$ est engendrée d'abord par une courbe $\varphi$ soumise à une loi K, et ensuite par une autre courbe $\pi$ soumise à une autre loi D, on aura d'abord une suite de zones élémentaires comprises respectivement entre les courbes génératrices successives du premier mode $\varphi$ et $\varphi'$, $\varphi'$ et $\varphi''$, $\varphi''$ et $\varphi'''$, etc., et ensuite une suite d'autres zones élémentaires comprises respectivement entre les autres génératrices successives du second mode $\pi$ et $\pi'$, $\pi'$ et $\pi''$, $\pi''$ et $\pi'''$, etc.; la zone $(\varphi, \varphi')$ interceptera sur la zone $(\pi, \pi')$ une *facette élémentaire* de la surface, qui prendra le nom d'*élément superficiel* de la surface $\Sigma$.

Mais l'on pourra toujours supposer que la surface $\Sigma$ est engendrée par une suite de courbes $\varphi$, $\varphi'$, ou $\pi$, $\pi'$, ou $\varepsilon$, $\varepsilon'$, ou $\lambda$, $\lambda'$,..... etc., successives et infiniment voisines, et telles que les courbes $\varphi$, $\pi$, $\varepsilon$, $\lambda$,.... se croisent au point $m$ et sont soumises : les premières $\varphi$ à une loi K, les secondes $\pi$ à une loi D, les troisièmes $\varepsilon$ à une loi B, etc. Les courbes $\varphi'$, $\pi'$, $\varepsilon'$,..... qui seront respectivement les courbes successives et infiniment voisines des courbes $\varphi$, $\pi$, $\varepsilon$,..... s'entre-couperont deux à deux et formeront un polygone dont chaque côté sera infiniment petit et dont deux sommets quelconques seront distants l'un de l'autre d'une quantité infiniment petite ; c'est l'espace renfermé par ce polygone qui doit surtout prendre le nom de *facette élémentaire*.

La courbe génératrice d'une surface peut, quelle que soit la loi de son mouvement, ou 1° rester constante, non-seulement de forme, mais encore de grandeur, ou 2° varier de forme à chaque déplacement, la variation de forme étant aussi assujettie à une loi particulière.

Nous devons donc distinguer les surfaces à génératrice constante, des surfaces à génératrice variable. Toutefois, une surface ayant été, par un certain mode, engendrée par une courbe constante, on pourra toujours, par un autre mode, l'engendrer au moyen d'une courbe variable; tandis que pour une surface engendrée par une courbe variable, il ne pourra pas toujours exister un certain mode de génération par une courbe constante.

*Du plan tangent à une surface.*

IX. Étant donnée une surface $\Sigma$, quel que soit le mode de génération qui l'ait produite, nous pourrons toujours tracer sur cette surface une courbe $\varphi$, et mener en un point $m$ de cette courbe la tangente T à cette courbe.

La tangente T contiendra donc deux points successifs $m$ et $m'$ de $\varphi$.

Par la droite T, nous pourrons faire passer une infinité de plans P, P', P'', P''',..... coupant respectivement la surface $\Sigma$ suivant des courbes $\pi$, $\pi'$, $\pi''$, $\pi'''$,..... nous pouvons dès lors supposer que la surface $\Sigma$ est engendrée par la courbe $\pi$, variant de forme et passant successivement par les positions $\pi'$, $\pi''$, $\pi'''$, etc., nous pouvons supposer que ces courbes $\pi$, $\pi'$, $\pi''$,..... sont des courbes successives et infiniment voisines; et comme chacun de leurs plans passe par la droite T, chacune de ces courbes passera par les points successifs et infiniment voisins $m$ et $m'$; et dès lors nous pouvons affirmer que les courbes $\pi$, $\pi'$, $\pi''$,..... ont avec la courbe $\varphi$ une tangente commune qui n'est autre que T, ou, en d'autres termes, et pour abréger le discours, que les courbes $\pi$, $\pi'$, $\pi''$, sont tangentes entre elles et à la courbe $\varphi$ au point $m$.

Cela posé :

Nous pouvons toujours tracer sur la surface $\Sigma$ une suite de courbes arbitraires $\xi$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$,..... se croisant toutes au point $m$.

La courbe $\xi$ coupera les courbes $\pi$, $\pi'$, $\pi''$,..... respectivement aux points $a$, $a'$, $a''$,..... la courbe $\xi_1$ les coupera aux points $a_1$, $a_1'$, $a_1''$,.... la courbe $\xi_2$ les coupera aux points $a_2$, $a_2'$, $a_2'$,.... et ainsi de suite.

Or, si nous supposons que le plan P passe par des positions successives et infiniment voisines P', P'', P''',..... quelle que soit la loi qui régit le mouvement de ce plan P, les courbes $\pi$, $\pi'$, $\pi''$, $\pi'''$, seront, en vertu de cette loi, quelle qu'elle soit, des courbes successives et infiniment voisines, par conséquent les points $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$,..... $a'$, $a_1'$, $a_2'$, $a_3'$,..... $a''$, $a_1''$, $a_2''$, $a_3''$,.... etc. seront des points successifs et infiniment voisins sur les courbes respectives $\xi$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$,.....

Dès lors si le point $a$ de $\xi$ est le successif et infiniment voisin du point $m$, aussitôt les points $a'$ de $\xi_1$, $a''$ de $\xi_2$, $a'''$ de $\xi_3$,..... seront les successifs et infiniment voisins du même point $m$.

Et cela étant, il s'ensuit que les éléments rectilignes $\overline{ma}$ de $\xi$, $\overline{ma'}$ de $\xi_1$, $\overline{ma''}$ de $\xi_2$,...., etc., seront tous situés dans un même plan $\Theta$ passant par la droite T, et par suite l'on peut énoncer ce théorème :

*Si l'on trace sur une surface $\Sigma$ une suite de courbes arbitraires $\xi$, $\xi_1$, $\xi_2$,....., se croisant*

*en un point* m, *les tangentes* $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,..... *menées respectivement à ces courbes et au point* m, *sont situées dans un même plan* $\Theta$.

Ce plan $\Theta$ a reçu le nom de *plan tangent* de la surface; et dès lors pour résoudre le problème : *Construire le plan tangent en un point* m *d'une surface* $\Sigma$, il suffira : 1° de tracer sur cette surface $\Sigma$ deux courbes $\xi$ et $\xi_1$ se croisant au point $m$; 2° de construire au point $m$ la tangente $\theta$ à la courbe $\xi$ et la tangente $\theta_1$ à la courbe $\xi_1$ et le plan $\Theta$ déterminé par les tangentes $\theta$ et $\theta_1$ sera le plan demandé.

Maintenant examinons quelle relation de position existe entre le plan tangent $\Theta$ et la surface $\Sigma$ tout autour du point de contact $m$ :

1° Le plan tangent peut laisser la surface au-dessus ou au-dessous de lui tout autour du point de contact;

2° La surface peut être en partie en dessus et en partie en dessous de son plan tangent.

Dans le premier cas, le plan tangent n'a en commun avec la surface que le point de contact, ou s'il a d'autres points communs avec la surface ils sont tous situés à distance finie du point de contact.

Dans le deuxième cas, le plan tangent coupe et touche la surface; il la touche au point de contact, et la coupe suivant une courbe dont les branches se croisent au point de contact.

Nous allons démontrer que entre le plan tangent $\Theta$ et la surface $\Sigma$, quelle que soit cette surface, il ne peut exister que l'une ou l'autre de ces deux relations de position.

Menons par le point $m$ contact de la surface $\Sigma$ et de son plan tangent $\Theta$ une droite I perpendiculaire à ce plan.

Cette droite prendra le nom de *normale* à la surface, et comme il n'y a (*en général*) pour chaque point d'une surface qu'un seul plan tangent, il ne pourra y avoir pour chaque point de cette surface qu'une seule normale.

Par la droite I nous pourrons faire passer une suite de plans N, N', N'', N''',..... qui prendront le nom de *plans normaux* de la surface et qui couperont cette surface $\Sigma$ suivant des courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$,..... qui auront respectivement pour tangentes les droites $t$, $t'$, $t''$, $t'''$,..... suivant lesquelles le plan tangent $\Theta$ est respectivement coupé par les divers plans normaux.

La surface $\Sigma$ pourra être considérée comme étant engendrée par la courbe $\delta$ tournant autour de la normale I et passant successivement en changeant de forme, en les positions $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$.

Admettons que la courbe $\delta$ a la forme représentée (*fig.* 126), et qu'ainsi avant et après le point $m$ de contact avec sa tangente $t$ elle se trouve au-dessous de cette tangente $t$, pouvant d'ailleurs couper cette droite $t$ en un point $p$ ou plusieurs

points $p$ situés à distance finie par rapport au point de contact $m$ ; nous pourrons faire les hypothèses suivantes :

1° Supposer que les diverses courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$, quoique de formes différentes, les variations de forme étant soumises d'ailleurs à une certaine loi, sont chacune placées au-dessous de leur tangente. Dans ce cas, le plan $\Theta$ laissera la surface $\Sigma$ au-dessous de lui tout autour de son point de contact $m$, et s'il coupe la surface, ce ne sera que suivant une courbe ou plusieurs courbes *lieux* des divers points $p$, et par conséquent le plan $\Theta$ ne coupera la surface $\Sigma$ que suivant une ou plusieurs courbes, dont tous les points seront situés à distance finie du point de contact $m$.

2° Supposer que pendant que le plan normal N tourne autour de la normale I, en prenant les diverses positions N′, N″, N‴,..... pour enfin venir se superposer sur la première position N, ayant ainsi accompli autour de I une demi-révolution, ou décrit deux angles droits, la courbe $\delta$, en changeant successivement de forme, passe enfin par une position $\delta_1$ faisant un angle $\alpha$ avec la position $\delta$, et telle que cette courbe $\delta_1$ ait un rayon de courbure infini, et qu'ainsi les courbes successives $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,..... voient croître leurs rayons de courbure au point $m$, pour arriver à $\delta_1$ qui aura un rayon de courbure infini ; puis enfin qu'ayant dépassé la position $\delta_1$, on retourne à la position $\delta$ par des courbes $\delta_1'$, $\delta_1''$, $\delta_1'''$,..... dont les rayons de courbure au point $m$ iront en décroissant.

Toutes ces courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$,.....$\delta_1$.....$\delta_1'$, $\delta_1''$, $\delta_1'''$,....., $\delta$, étant toutes situées au-dessous de leurs tangentes ou au-dessous du plan tangent $\Theta$, la surface $\Sigma$ sera encore située au-dessous de son plan tangent $\Theta$ tout autour du point de contact $m$.

3° Supposer que le plan normal N puisse prendre deux positions l'une $N_1$ et l'autre $N_2$, telles que les courbes $\delta_1$ et $\delta_2$ suivant lesquelles ils coupent la surface $\Sigma$, ont au point $m$ un rayon de courbure infini.

Et désignant par $\alpha$ et $6$ les deux angles supplémentaires que le plan $N_1$ fait avec le plan $N_2$, supposons que toutes les courbes $\delta$ situées dans des plans normaux compris dans l'angle $\alpha$ sont situées *au-dessous* du plan $\Theta$, et que toutes les courbes $\delta$ situées dans des plans normaux compris dans l'angle $6$ sont situées *au-dessus* de ce plan $\Theta$ (*fig.* 127).

Dès lors, la courbe génératrice passerait par des positions pour lesquelles le rayon de courbure irait en diminuant depuis la position $\delta_1$ pour atteindre un maximum et recroître, jusqu'à l'infini, en passant par $\delta_2$ et pendant cette évolution, toutes les courbes $\delta$ seraient *au-dessous* du plan $\Theta$ ; puis ensuite la courbe génératrice partant de $\delta_2$ passerait par une position nouvelle en laquelle le rayon de courbure serait un minimum et retournerait en la position $\delta_1$ le rayon de courbure

croissant jusqu'à l'infini, et pendant cette seconde évolution qui compléterait la demi-révolution autour de la normale I, toutes les courbes génératrices $\delta$ seraient *au-dessus* du plan $\Theta$.

Le plan tangent $\Theta$ coupera dans ce cas la surface $\Sigma$ suivant une courbe dont deux branches se croiseront au point de contact $m$.

En y réfléchissant attentivement, on est bientôt convaincu que les trois *hypothèses géométriques* précédentes sont les seules que l'on puisse faire, en admettant que la surface $\Sigma$ est telle que par le point $m$ il ne passe qu'une seule *nappe* de cette surface.

La manière d'être d'une surface par rapport à son plan tangent paraît, *à la première vue*, devoir nous permettre de diviser les surfaces en deux grandes classes :

1° Les surfaces pour lesquelles les centres de courbure de toutes les sections normales en un même point $m$ sont tous situés d'un même côté par rapport au plan tangent en ce point $m$;

2° Les surfaces pour lesquelles les centres de courbure de toutes les sections normales en un même point $m$ sont en partie à droite et en partie à gauche du plan tangent en ce point $m$.

Mais comme une même surface peut nous offrir pour certains points la première manière d'être, et pour certains autres points la seconde manière d'être par rapport à son plan tangent, cette classification des surfaces doit être regardée, en définitive, comme illusoire.

De ce qui précède, on peut établir :

1° Que lorsque deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ont un point commun $m$, et en ce point un même plan tangent $\Theta$, ces deux surfaces seront dites tangentes l'une à l'autre au point $m$;

2° Que lorsque deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ ont une *ligne* $\xi$ commune, si elles ont même plan tangent en chacun des points de cette ligne $\xi$, ces deux surfaces sont dites tangentes l'une à l'autre suivant la courbe $\xi$; si les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ n'ont pas même plan tangent en chacun des points de la courbe $\xi$, ces surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ se couperont suivant la courbe $\xi$; si le plan tangent n'est commun aux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ que pour certains points de la *ligne* $\xi$, le contact des deux surfaces n'aura lieu qu'en ces points et en tous les autres points de la *ligne* $\xi$, les deux surfaces se couperont.

*Des divers modes de génération des surfaces.*

X. Il y a deux modes de génération pour les surfaces :

1° Une surface peut être engendrée par le mouvement d'une *ligne* qui prend le nom de *génératrice* ;

2° Une surface peut être l'*enveloppe* de l'espace parcouru par une autre surface, laquelle prend le nom d'*enveloppée*.

Lorsqu'on donne une surface, c'est toujours par l'un ou l'autre de ces deux modes de génération ; et on dit en géométrie descriptive que l'on a écrit *graphiquement* la surface, lorsque l'on a tracé les projections des lignes qui servent à définir complétement la surface donnée, et l'on reconnaît que la surface est réellement et complétement écrite lorsque l'on peut, en ne s'appuyant que sur les projections des lignes qui sont dites *suffire à déterminer la surface*, résoudre le problème suivant :

Étant donnée la projection $m^h$ ou $n^v$, construire la projection $m^v$ ou $n^h$ du point $m$ ou $n$, ce point devant être rigoureusement situé sur la surface donnée.

Lorsqu'une surface est écrite *graphiquement* par le premier mode de génération, on peut toujours par la pensée la supposer engendrée par le second mode, *et vice versâ*.

C'est toujours du mode écrit *graphiquement* qu'on se sert pour construire l'*épure* des recherches géométriques à tenter sur la surface.

Mais l'on peut se servir indistinctement de l'un ou de l'autre mode de génération, lorsque l'on emploie *le raisonnement géométrique* pour arriver à la découverte d'une propriété géométrique de la surface donnée.

Ainsi, les deux modes de génération, quoique très-différents l'un de l'autre, coexistent pour une même surface, et quelle que soit cette surface.

*Des diverses espèces de surfaces.*

1er MODE DE GÉNÉRATION.

XI. La courbe *génératrice* peut être une ligne droite ; la surface est dite alors *surface réglée*.

Si l'on suppose qu'une droite G se meut en vertu d'une certaine loi, elle prendra dans l'espace les positions successives et infiniment voisines G, G′, G″, G‴.

Il peut arriver deux cas :

Ou 1° que G coupe G′, que G′ coupe G″, que G″ coupe G‴, et ainsi de suite.

La surface est alors dite surface *développable*.

Ou 2° que G ne coupe pas G′, que G′ ne coupe pas G″ et ainsi de suite.

La surface est alors dite surface *gauche*.

Et l'on conçoit qu'il ne peut exister que ces deux manières d'être, les unes par rapport aux autres, entre des génératrices droites successives.

Ainsi les surfaces *réglées* se divisent en deux classes, les surfaces *développables* et les surfaces *gauches*.

XII. La courbe génératrice, étant une *ligne* quelconque, peut se mouvoir autour d'un axe sans changer de forme et la distance de chacun de ses points à l'axe ne variant pas.

Ce genre de surface prend le nom de *surfaces de révolution*.

La courbe génératrice prend le nom de *courbe méridienne* lorsqu'elle est située dans un plan passant par l'axe, et le plan de la courbe méridienne prend le nom de *plan méridien*.

XIII. La surface peut être engendrée par une courbe constante de forme (dite *courbe génératrice*) et se mouvant parallèlement à elle-même, un de ses points parcourant une courbe qui prend le nom de *directrice*.

XIV. La surface peut être engendrée par une courbe (dite *courbe génératrice*) se mouvant parallèlement à elle-même, un des ses points parcourant une courbe directrice, et cette courbe génératrice changeant de forme suivant une loi donnée, laquelle dépend de la loi du mouvement qui est exprimée par la courbe *directrice*.

XV. Une surface peut être engendrée par une courbe constante de forme, dont un des points parcourt une courbe directrice; la position de la courbe *génératrice* par rapport à la courbe *directrice*, variant à chaque instant suivant une loi donnée laquelle dépend de la loi du mouvement qui est exprimée par la courbe *directrice*.

XVI. Une surface peut être engendrée par une courbe variant de forme suivant une loi K, et dont un des points parcourt une courbe directrice; la position de la courbe *génératrice* par rapport à la courbe *directrice*, variant à chaque instant suivant une loi $K_1$; et les deux lois K et $K_1$ dépendant, d'ailleurs, de la loi du mouvement, qui est exprimée par la courbe *directrice*.

2° MODE DE GÉNÉRATION.

XVII. Une surface $\Delta$, variable ou non de forme, se mouvant dans l'espace suivant une certaine loi L, prend dans l'espace les positions successives et infiniment voisines $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$, $\Delta^4$.



Les surfaces $\Delta$ et $\Delta'$ se coupent suivant une courbe $\delta$
— $\Delta'$ et $\Delta''$ . . . . . . . . . . . . . . . . $\delta'$
— $\Delta''$ et $\Delta'''$ . . . . . . . . . . . . . . . . $\delta''$
— $\Delta'''$ et $\Delta^4$ . . . . . . . . . . . . . . . . $\delta'''$
et ainsi de suite.

Les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,..... seront nécessairement des courbes successives et infiniment voisines, car on ne peut admettre que l'on puisse placer entre $\delta'$ et $\delta''$ une courbe $\delta_1$ qui approche plus près de $\delta'$ que $\delta''$ n'en approche, cette courbe $\delta_1$ satisfaisant à la loi qui régit les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,...., puisque par hypothèse les surfaces $\Delta'$, $\Delta''$ et $\Delta'''$ sont successives et infiniment voisines, et qu'on ne peut pas admettre, contrairement à l'hypothèse posée, une surface $\Delta_1$ placée entre $\Delta''$ et $\Delta'''$ et approchant plus près de $\Delta''$ que $\Delta'''$ n'approche de $\Delta''$.

Les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,.... étant successives et infiniment voisines, formeront une surface $\Sigma$ dont elles seront les *génératrices*, et la surface $\Sigma$ sera dite *surface enveloppe* de l'espace parcouru par la surface $\Delta$, laquelle prend le nom d'*enveloppée*.

Les courbes $\delta'$ et $\delta''$ sont situées et sur l'enveloppée particulière $\Delta''$ et sur la surface enveloppe $\Sigma$.

Les deux surfaces $\Delta''$ et $\Sigma$ ont donc en commun la *zone élémentaire* comprise entre les deux courbes successives et infiniment voisines $\delta'$ et $\delta''$.

Or, si nous prenons sur $\delta'$ un point $m$, et que par ce point nous menions une suite de plan Q, Q', Q'',..... chacun de ces plans coupera :

1° La surface $\Sigma$ suivant les courbes respectives $\chi$, $\chi'$, $\chi''$.

2° La surface $\Delta''$ suivant les courbes respectives $\xi$, $\xi'$, $\xi''$.

3° La courbe $\delta''$ aux points respectifs $q$, $q'$, $q''$.

Or, puisque les courbes $\delta'$ et $\delta''$ sont successives et infiniment voisines, les points $q$, $q'$, $q''$,..... seront respectivement sur les courbes $\chi$, $\chi'$, $\chi''$,..... comme sur les courbes $\xi$, $\xi'$, $\xi''$,..... les successifs et infiniment voisins du point $m$.

Les courbes $\chi$ et $\xi$, $\chi'$ et $\xi'$, $\chi''$ et $\xi''$,...., seront donc tangentes l'une à l'autre au point $m$, elles auront, en un mot, même tangente en ce point.

Le plan tangent en $m$ à la surface $\Sigma$ ne sera donc autre que le plan tangent en $m$ à la surface $\Delta''$; les deux surfaces $\Sigma$ et $\Delta''$ seront donc tangentes l'une à l'autre au point $m$.

Ce que nous venons de dire pour le point $m$ de $\delta'$ se dira de tout autre point de cette courbe $\delta'$; ainsi les deux surfaces $\Sigma$ et $\Delta''$ sont tangentes l'une à l'autre tout le long de la courbe $\delta'$.

Ainsi la surface *enveloppe* $\Sigma$ est tangente à chacune des *enveloppées* $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$,....., et respectivement suivant les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,.....

Cela posé :

Les courbes $\delta$ et $\delta'$ se couperont en un point $a$,
— $\delta'$ et $\delta''$ . . . . . . . . . . . . . . . . $a'$,
— $\delta''$ et $\delta'''$ . . . . . . . . . . . . . . . . $a''$,

et ainsi de suite.

Les points $a$, $a'$, $a''$,.... seront dans l'espace des points successifs et infiniment voisins, puisque les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,..... sont successives et infiniment voisines, ils formeront donc une courbe $\varphi$.

Et comme $a'$ et $a''$ sont deux points successifs de la courbe $\delta''$, la courbe $\varphi$ aura en commun avec cette courbe un *élément rectiligne* $\overline{a'a''}$, il en sera de même de la courbe $\varphi$ par rapport aux diverses courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,..... Ainsi, la courbe $\varphi$, qui prend le nom d'*arête de rebroussement* de la surface $\Sigma$, sera *tangente* à toutes les courbes $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,...... qui prennent, dans ce mode de génération de la surface $\Sigma$, le nom de *caractéristiques* de cette surface.

Ce qui précède étant compris, nous allons nous en servir pour établir quelques-unes des propriétés géométriques dont jouissent les surfaces en général, et certaines surfaces en particulier.

### *Des surfaces développables.*

XVIII. La forme la plus simple que puisse affecter l'enveloppée $\Delta$ est celle d'un plan.

Et comme deux plans se coupent suivant une droite, on voit de suite que la surface *enveloppe* de l'espace parcouru par un plan est une surface *réglée*, puisque ses caractéristiques seront des droites, et de plus comme les caractéristiques successives se coupent deux à deux, cette surface enveloppe sera *développable*.

L'enveloppée étant un plan, ce plan contient deux caractéristiques successives de l'enveloppe (qui sont pour les surfaces développables des droites comme on vient de le dire).

Chaque *zone élémentaire* de la surface enveloppe est plane, ce qui permet d'étendre la surface développable sur un plan, *sans déchirure ni duplicature*, comme le dit Monge.

L'enveloppée étant tangente à l'enveloppe tout le long d'une caractéristique, il s'ensuit que si en un point $m$ d'une génératrice droite G d'une surface développable $\Sigma$, nous construisons le plan $\Theta$ tangent à cette surface $\Sigma$, ce plan $\Theta$ sera tangent à la surface $\Sigma$, non-seulement au point $m$, mais en chacun des autres points de la génératrice G. En sorte que si l'on mène un plan sécant arbitraire X, ce plan coupera : 1° la surface $\Sigma$ suivant une courbe C ; 2° le plan $\Theta$ suivant

une droite $\theta$; 3° la génératrice G en un point $g$; et il arrivera que la courbe C et la droite $\theta$ seront tangentes l'une à l'autre au point $g$.

Une surface développable peut être donnée de deux manières différentes : ou 1° en la supposant engendrée par une *ligne* droite, ou 2° en la regardant comme l'enveloppe de l'espace parcouru par un plan (et nous avons vu ci-dessus que ces deux modes de génération sont les seuls que l'on puisse admettre en géométrie descriptive; et qu'ainsi une surface ne peut être, en géométrie descriptive, considérée que comme étant une *enveloppe*, ou que comme étant engendrée par une *ligne*); mais il faut pouvoir *écrire graphiquement* la surface énoncée, il faut donc que la loi du mouvement de la *ligne génératrice*, tout comme la loi du mouvement de la *surface enveloppée*, soit telle qu'on puisse l'écrire *graphiquement*.

C'est pourquoi en géométrie descriptive on se donne une surface développable :

1° Dans le premier mode de génération, par les projections de son *arête de rebroussement*; parce que toutes les *génératrices* droites ou *caractéristiques* de la surface développable sont alors connues, puisque ces génératrices ne sont autres que les tangentes à l'arête de rebroussement;

2° Dans le second mode de génération, le mouvement du plan *enveloppée* est déterminé par *des directrices*; ainsi, ce plan doit rouler sur deux courbes, ou sur deux surfaces ou sur une courbe et une surface.

Alors, les génératrices peuvent être déterminées, puisque chacune d'elles n'est autre que la droite qui unit les points de contact d'une position de l'enveloppée avec les deux directrices.

Dans ce cas, l'arête de rebroussement ne peut être tracée graphiquement que d'une manière approximative, puisque l'on ne peut construire des génératrices successives et infiniment voisines, mais seulement des génératrices situées à distance finie les unes des autres.

Au lieu de se donner deux directrices, on peut ne s'en donner qu'une et remplacer la seconde directrice par une *condition géométrique* qui puisse être facilement exprimée en langue graphique; ainsi, par exemple, le plan considéré comme *enveloppée* peut être assujetti à se mouvoir dans l'espace : 1° en roulant tangentiellement à une courbe, et 2° en faisant avec un plan fixe un angle constant, etc., etc.

### *Des surfaces des canaux.*

**XIX. Après le plan, la surface la plus simple que l'on puisse prendre comme *enveloppée*, c'est la sphère.**

Concevons une sphère S du rayon R, son centre $o$ parcourant une courbe $\xi$.

Si la sphère, pendant son mouvement, reste constante, et si donc son rayon ne varie pas de grandeur, la surface *enveloppe* sera dite *surface-canal*.

La sphère S en passant dans l'espace en les positions successives et infiniment voisines S, S′, S″, S‴,..... son centre $o$ prendra sur la *directrice* $\xi$ les positions successives et infiniment voisines $o$, $o'$, $o''$, $o'''$,.....

Lorsque deux sphères de même rayon ou de rayons inégaux se coupent, l'intersection est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui unit les centres de ces deux sphères.

La propriété énoncée subsiste que les centres soient à distance finie l'un de l'autre, ou à distance infiniment petite.

Par conséquent, deux *enveloppées* successives S et S′ se couperont suivant un cercle C dont le plan sera perpendiculaire à l'élément rectiligne $\overline{oo'}$ de la courbe directrice $\xi$.

Ainsi, toutes les *caractéristiques* d'une *surface-canal* sont des cercles dont les plans sont normaux à la courbe $\xi$ parcourue par le centre de l'*enveloppée* sphérique.

Et comme nous pouvons remplacer la courbe $\xi$ par un polygone infinitésimal, et que nous pouvons, aucune hypothèse préalable ne s'y opposant, prendre le polygone infinitésimal à côtés égaux, nous voyons que toutes les caractéristiques de la surface-canal seront des cercles égaux, des cercles de même rayon.

Mais nous savons que lorsqu'une sphère, de rayon constant R, se meut dans l'espace, son centre parcourant une ligne droite, la surface enveloppe dans ce cas tout particulier est un cylindre de révolution ayant pour section droite un cercle du rayon R.

La sphère S en passant en S′ et son centre $o$ arrivant en $o'$, sur la courbe $\xi$, après avoir parcouru l'élément rectiligne $\overline{oo'}$, décrit donc un élément de cylindre de révolution B, et dès lors ce cylindre B se trouve tangent à la sphère S et à la surface-canal suivant un cercle C du rayon R.

Ainsi, toutes les *caractérisques* de la surface-canal sont des cercles égaux et ayant même rayon que la sphère *enveloppée*.

*Des surfaces développables considérées comme enveloppées d'une surface donnée.*

XX. Étant donnée une surface $\Sigma$, traçons sur cette surface une courbe $\delta$, faisons mouvoir un plan $\Theta$ tangentiellement à la surface $\Sigma$, le point de contact parcourant successivement la courbe $\delta$; l'enveloppe $\Delta$ du plan $\Theta$ sera une surface développable.

Les surfaces $\Delta$ et $\Sigma$ seront tangentes l'une à l'autre, et auront en commun une *zone élémentaire* comprise entre la courbe $\delta$ et une courbe $\delta'$ infiniment voisine de $\delta$.

Cela posé :

*Si $\delta$ et $\delta'$ sont des courbes semblables et semblablement placées, la surface $\Delta$ sera une surface conique.*

Et en effet :

L'on sait que toute surface conique jouit de la propriété d'être coupée par des plans parallèles suivant des courbes semblables et semblablement placées, et que réciproquement par deux courbes semblables et semblablement placées, on peut toujours faire passer une surface conique (*).

Or, cette propriété subsiste évidemment, que les courbes soient à distance finie ou à distance infiniment petite l'une de l'autre ; donc, etc.

Ce qui précède nous permet de démontrer d'une manière simple et rigoureuse la propriété dont jouissent les surfaces du second degré ; savoir : *que la courbe de contact d'un cône et d'une surface du second degré est toujours une courbe plane.*

Et en effet :

On sait qu'une surface du second degré est toujours coupée par deux plans parallèles suivant des sections coniques semblables et semblablement placées ; donc etc.

Dans les applications de la géométrie descriptive et particulièrement dans les problèmes *des ombres*, on est conduit à chercher sur une courbe $\delta$ tracée sur une surface donnée $\Sigma$, le point de contact $m$ d'un plan $\Theta$ tangent à la surface $\Sigma$ et passant par un point fixe de l'espace ou parallèle à une droite donnée de position dans l'espace.

Pour déterminer ce point $m$ on est conduit à remplacer la surface $\Sigma$ par une surface simple $\Delta$ tangente à $\Sigma$ tout le long de la courbe $\delta$.

Cette surface simple $\Delta$ est ordinairement la surface développable engendrée par un plan roulant tangentiellement et sur la surface $\Sigma$ et sur la courbe $\delta$.

Quelle sera la nature de cette surface développable $\Delta$, lorsque la surface $\Sigma$ sera engendrée ou 1° par une courbe $\delta$ se mouvant parallèlement à elle-même, ses paramètres ne changeant pas de valeur, ou 2° par une courbe $\delta$ se mouvant parallèlement à elle-même, ses paramètres variant de manière à ce que cette courbe $\delta$ reste toujours semblable à elle-même, ou 3° par un cercle $\delta$ de rayon, constant ou variable, et se mouvant dans l'espace suivant une loi donnée ?

(*) *Voir* dans mon *Cours de géométrie descriptive* lithographié pour les élèves de l'École centrale des arts et manufactures, le chapitre où j'expose la théorie de *la similitude directe et inverse*.

XXI. Nous allons résoudre ces diverses questions.

1° *La courbe δ restant constante et se mouvant parallèlement à elle-même.*

La loi du mouvement de la courbe δ sera donnée par une courbe ξ (*fig.* 128), qu'un point *b* de δ devra parcourir.

Or, la courbe δ restant parallèle à elle-même, tous ses points *p* décriraient des droites parallèles à une droite D si la courbe ξ était une droite parallèle à cette droite D, et dans ce cas la surface Σ ne serait autre qu'un cylindre ψ.

Le point *b* parcourant sur la courbe ξ l'élément rectiligne $\overline{bb'}$, pendant que δ passe en la position successive et infiniment voisine δ' (cet élément rectiligne *bb'* représentant ici la droite D, en le supposant prolongé), la courbe δ ne décrit qu'une *zone élémentaire* du cylindre ψ, laquelle zone sera commune et à la surface Σ et au cylindre ψ.

Ainsi, dans ce cas, on doit remplacer la surface Σ par un cylindre ayant δ pour directrice et ayant ses génératrices droites parallèles à la tangente θ menée au point *b* à la courbe ξ.

2° *La courbe δ se mouvant parallèlement à elle-même en restant semblable à elle-même.*

La courbe δ étant supposée arrivée en δ' (*fig.* 129), δ et δ' étant des courbes successives et infiniment voisines et semblables et semblablement placées, il s'ensuivra qu'en *b* et *b'* (points qui appartenant respectivement aux courbes δ et δ' sont successifs et infiniment voisins sur la courbe *directrice* ξ) les courbes δ et δ' auront des tangentes parallèles.

Si en un point *p* arbitrairement pris sur la courbe δ, je mène la tangente *t* à cette courbe, il existera sur δ' un point *p'* pour lequel la tangente *t'* à δ' sera parallèle à *t*.

La droite *pp'* prolongée sera la génératrice droite ou *caractéristique* de la surface développable Δ engendrée par le plan Θ roulant tangentiellement sur la surface Σ et la courbe δ.

Or, les deux courbes δ et δ' sont supposées semblables et semblablement placées, cette surface Δ sera donc un cône, et son sommet sera au point *s* en lequel le plan tangent mené à la surface Σ en un point quelconque *p* de δ coupera la tangente θ menée en *b* à la *directrice* ξ.

3° *Un cercle δ constant ou variable de rayon se mouvant dans l'espace suivant une loi donnée.*

La loi du mouvement pourra être exprimée d'une manière très-générale, ainsi qu'il suit :

Concevons (*fig.* 130) deux courbes ξ et ξ, situées sur une surface *réglée* π;

Désignons par G, G', G'',..... les génératrices droites successives de π;

G coupera la courbe $\xi$ en $o$ et la courbe $\xi_1$ en $b$,

G′ coupera la courbe $\xi$ en $o'$ et la courbe $\xi_1$ en $b'$,

et ainsi de suite.

$\overline{oo'}$ sera donc un élément rectiligne de la courbe $\xi$, et $\overline{bb'}$ sera aussi un élément rectiligne de la courbe $\xi_1$.

Concevons une seconde surface réglée $\pi_1$ coupant la première surface $\pi$ suivant la courbe $\xi$..

Désignons par H, H′, H″,..... les génératrices droites successives et infiniment voisines de $\pi_1$, H coupant G en un point $o$, H′ coupant G′ en un point $o'$, et ainsi de suite.

Nous pourrons toujours tracer sur la surface $\pi_1$ une courbe $\xi_1$ telle qu'elle coupe les génératrices H, H′, H″,...... en des points $d$, $d'$,..... tels que l'on ait :

$$\overline{od} = \overline{ob}, \quad \overline{o'd'} = \overline{o'b'}, \ldots\ldots$$

Et comme l'on suppose les deux surfaces $\pi$ et $\pi_1$ comme étant liées l'une à l'autre, $\overline{oo'}$ étant un élément rectiligne de la courbe $\xi$, $\overline{dd'}$ sera un élément rectiligne de la courbe $\xi_1$ tout comme $bb'$ est un élément rectiligne de la courbe $\xi_1$; car $o$ et $o'$ étant par hypothèse des points successifs et infiniment voisins, les droites G et G′, H et H′, qui passent respectivement par ces points $o$ et $o'$ seront des génératrices successives, les premières sur la surface $\pi$, les secondes sur la surface $\pi_1$.

Cela posé :

Du point $o$ comme centre et avec $\overline{ob} = \overline{od}$ comme rayon, décrivons un cercle C.

Du point $o'$ comme centre et avec $\overline{o'b'} = \overline{o'd'}$ comme rayon, décrivons un cercle C′.

Et ainsi de suite.

Les cercles ainsi obtenus C, C′, C″,..... seront des *génératrices* successives et infiniment voisines de la surface $\Sigma$.

Le mode de génération de la surface $\Sigma$ est, comme on le voit, complétement défini et de la manière la plus générale.

Remarquons que les plans de ces cercles C, C′, C″,..... sont des plans successifs et infiniment voisins; ils se couperont donc deux à deux suivant des droites qui seront aussi successives et infiniment voisines, et qui se couperont deux à deux en des points successifs de l'arète de rebroussement $\gamma$ de la surface développable L enveloppe de l'espace parcouru par les plans des cercles C, C′, C″,..... ces plans devant être considérés comme des *enveloppées* successives et infiniment voisines.

Remarquons qu'au lieu de nous donner la seconde surface $\pi_1$ et de tracer la seconde courbe $\xi_1$ pour achever d'exprimer *graphiquement* la loi du mouvement du cercle mobile et générateur de la surface $\Sigma$, nous pouvions nous donner une

courbe $\gamma$ et assujettir le cercle mobile C à se trouver successivement dans chacun des plans osculateurs Y de $\gamma$; le centre $o$ du cercle C étant le point en lequel le plan Y coupe la courbe $\xi$, et son rayon étant égal à la distance existant entre les deux points $o$ et $b$ en lesquels le plan Y coupe les courbes $\xi$ et $\xi_{1}$.

Remarquons encore que lorsque l'on se sera donné la surface $\Sigma$ par l'un de ces deux modes de génération, on pourra toujours passer à l'autre mode.

Cela posé:

La surface $\Delta$ engendrée par un plan $\Theta$ tangent à la fois et à la surface $\Sigma$ et au cercle C sera dans tous les cas une surface développable, dont il ne sera pas possible de construire les génératrices droites, par les méthodes de la géométrie descriptive (au moins avec ce que nous savons quant à présent), parce que pour qu'une droite soit déterminée, il faut deux points à distance finie et qu'en vertu du mode de génération de la surface $\Delta$, nous ne ne connaissons qu'un point de chaque génératrice droite, c'est le point de contact du plan $\Theta$ et de la surface $\Sigma$ qui est le même que celui de ce plan $\Theta$ et de la courbe C.

Mais si la surface $\Delta$ était conique ou cylindrique, nous pourrions toujours la construire; parce que toutes les génératrices droites de $\Delta$ seraient parallèles à une droite dont la position serait construite dans le cas où $\Delta$ serait un *cylindre*, ou passeraient toutes par un point fixe qui serait aussi construit facilement si $\Delta$ était un *cône*.

Cherchons donc en quel cas, ou, en d'autres termes, cherchons quelles modifications il faut faire subir au mode général de génération de la surface $\Sigma$ pour que la surface $\Delta$ soit un cône ou un cylindre; et d'abord supposons que la surface $\Delta$ soit un cône ou un cylindre de révolution.

Si l'enveloppe $\Delta$ est un cylindre de révolution ou un cône de révolution tangent à la surface $\Sigma$ suivant le cercle C; alors on pourra concevoir une sphère S tangente à la surface $\Delta$ et par suite à la surface $\Sigma$ suivant le cercle C.

Cette sphère S aura donc en commun avec la surface $\Sigma$, une *zone élémentaire* comprise entre deux cercles successifs.

La surface $\Sigma$ pourra donc être considérée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère S, invariable ou variable de rayon.

Or, deux sphères S et S′, *enveloppées* successives, se coupent suivant une *caractéristique* circulaire C dont le plan est perpendiculaire à l'élément rectiligne de la courbe $\lambda$ parcouruo par le centre de l'*enveloppée* sphérique et mobile.

Premier cas. *La surface $\Delta$ étant un cylindre.*

Ce qui précède nous démontre que si le cercle C ne change pas de rayon, la sphère S ne variera pas de rayon, et que dès lors la courbe $\lambda$ ne sera autre que la

courbe $\xi$; et qu'il faudra dès lors, dans ce cas particulier, que les plans osculateurs de la courbe $\gamma$ arête de rebroussement de la surface développable L, soient normaux à la courbe $\xi$.

Ce qui précède nous montre que la surface $\Sigma$ n'est autre qu'une *surface-canal*.

Dès lors, on peut dire qu'une surface-canal peut être engendrée de deux manières différentes, ou 1° par une sphère mobile, de rayon constant, dont le centre parcourt une courbe $\xi$, ou 2° par un cercle de rayon constant, dont le plan reste constamment *normal* à la courbe $\xi$ parcourue par le centre de ce cercle *générateur*.

Si maintenant nous faisons mouvoir un plan $\Theta$ tangent à la surface $\Sigma$, le point de contact parcourant le cercle C, on aura une surface développable $\Delta$.

Si le plan $\Theta$ se meut tangentiellement à la sphère S, le point de contact parcourant la caractéristique $C_1$, on aura la même surface développable $\Delta$, puisque l'enveloppe $\Sigma$ et l'enveloppée S sont tangentes l'une à l'autre suivant la caractéristique C.

Et comme le cercle C est un grand cercle de la sphère S, la surface $\Delta$ sera un cylindre de révolution ayant ce cercle C pour section droite et pour axe la tangente $\theta$ à la courbe $\xi$ parcourue par le centre $o$ du cercle C, cette tangente $\theta$ étant menée à la courbe $\xi$ pour le point $o$.

La *zone élémentaire* qui sera commune aux deux surfaces $\Delta$ et $\Sigma$ ne sera pas la même que celle qui est commune aux deux surfaces S et $\Sigma$.

$\Delta$ et S sont en contact par une zone élémentaire appartenant à un cylindre de révolution, par conséquent cette zone est comprise entre deux cercles parallèles et infiniment voisins C et $C_1$, tandis que $\Sigma$ et S sont en contact par une *zone élémentaire* comprise entre deux cercles infiniment voisins C et C′ dont les plans se coupent suivant une génératrice droite de la surface L.

Mais il n'y a rien là qui doive étonner, car en y réfléchissant on voit de suite que ces deux zones élémentaires ne sont en aucune manière liées l'une à l'autre géométriquement, car on ne passe pas et on ne peut passer de l'une à l'autre de ces zones élémentaires, en vertu d'une corrélation géométrique, puisque la zone (C, C′) existe en vertu de la loi du mouvement de la sphère S, qui détermine cette enveloppée S à décrire l'enveloppe $\Sigma$; et que la zone ($C$, $C_1$) existe en vertu de la loi de mouvement du plan $\Theta$ qui détermine cette enveloppée $\Theta$ à décrire l'enveloppe $\Delta$; et que les deux lois de mouvement sont indépendantes l'une de l'autre.

Deuxième cas. *La surface Δ étant un cône.*

Venons maintenant au cas où les cercles C, C′, C″,..... successifs et infiniment voisins ont des rayons différents, les plans de ces cercles étant normaux à la courbe ξ, lieu de leurs centres.

Nous avons déjà dit que deux sphères de rayons différents se coupent suivant un petit cercle et que cela a lieu que les centres de ces sphères soient à distance finie ou infiniment petite l'un de l'autre, et que, de plus, le plan du cercle d'intersection est perpendiculaire à la ligne droite qui unit les centres des deux sphères.

Cela posé :

Si la surface Δ est un cône de révolution tangent à la surface Σ suivant un cercle C, on pourra toujours construire une sphère S, tangente au cône Δ suivant le cercle C et dont le centre sera sur l'axe A de ce cône Δ, cet axe A passant par le centre *o* du cercle C et étant perpendiculaire au plan de ce cercle.

Et si le plan du cercle C est perpendiculaire à la courbe ξ, parcourue par son centre *o*, on voit de suite que l'axe A ne sera autre que la tangente θ menée à la courbe ξ au point *o*.

On voit aussi que dans ce cas la courbe λ, lieu des centres des sphères S, est une courbe différente de ξ.

La sphère S étant tangente au cône Δ suivant le cercle C et le cône Δ étant aussi supposé tangent à la surface Σ suivant le cercle C, les deux surfaces S et Σ seront tangentes l'une à l'autre suivant le cercle C.

Si l'on suppose maintenant que la sphère S se meut en variant de rayon suivant une loi telle qu'elle engendre (cette sphère S) comme surface enveloppe le cône Δ, le centre de cette sphère S décrira l'axe du cône Δ ou la droite θ.

La droite θ doit donc être tangente à la courbe λ parcourue par le centre de la sphère passant en diverses positions S, S′, S″,..... telles que deux positions successives se coupent suivant un cercle dont le plan sera perpendiculaire à la courbe ξ : or, la sphère en se mouvant ainsi décrira l'enveloppe Σ.

On voit donc que lorsque la surface Σ est engendrée par un cercle C dont le rayon varie suivant une certaine loi, cette surface Σ aura un cône Δ pour *surface enveloppe* de son plan tangent, ce plan tangent roulant sur le cercle C, lorsque les plans des cercles successifs C, C′, C″,..... seront normaux à la courbe ξ, lieu de leurs centres.

Et que dans ce cas la surface Σ pourra être considérée comme engendrée d'une seconde manière, savoir : par une sphère mobile, variable de rayon et dont le centre parcourra une courbe λ ayant successivement pour tangentes les tangentes de la courbe ξ.

Lorsqu'en géométrie descriptive on voudra écrire la loi suivant laquelle varie le rayon du cercle générateur C, on se donnera une courbe $\mu$ qui devra être parcourue par un point de ce cercle C.

Ainsi, pour écrire graphiquement la surface $\Sigma$ dans les deux cas, on procédera de la manière suivante :

Premier cas. *Le cercle générateur ayant un rayon constant.*

S'étant donné les projections de la courbe $\xi$, lieu des diverses positions que doit prendre dans l'espace le centre du cercle générateur, on construira la courbe $\gamma$, arête de rebroussement de la surface *enveloppe* L des divers plans normaux de la courbe $\xi$, et on tracera dans chacun de ces plans normaux un cercle avec le même rayon R.

Deuxième cas. *Le cercle générateur ayant un rayon variable.*

S'étant donné les projections de la courbe $\xi$, lieu des diverses positions du centre du cercle générateur, on construira la courbe $\gamma$, arête de rebroussement de la surface L *enveloppe* des divers plans normaux N de la courbe $\xi$.

On se donnera une courbe arbitraire $\mu$, on déterminera le point $n$ en lequel cette courbe $\mu$ est coupée par chacun des plans normaux N, et du point $o$ en lequel chaque plan N coupe la courbe $\xi$, pris pour centre, on décrira dans chacun de ces plans N, et avec le rayon $on$, un cercle.

Nous donnerons à la surface $\Sigma$ dans le premier cas le nom de *surface-canal à section normale constante*, et dans le deuxième cas le nom de *surface-canal à section normale variable*.

Parmi les surfaces des canaux, on doit remarquer celles pour lesquelles la courbe $\xi$ est une droite.

Dans le cas où la ligne $\xi$ est une droite, la surface-canal est évidemment une surface de révolution et comme la courbe $\mu$ est une courbe quelconque, les sections normales sont variables.

Ainsi, toutes les surfaces de révolution peuvent être considérées comme des surfaces des canaux à sections normales variables.

Les *parallèles* d'une surfaces $\Sigma$ considérée comme surface de révolution ne seront autres que les *caractéristiques* de cette surface $\Sigma$, lorsqu'on la considérera comme étant une surface-canal.

La courbe *méridienne* plane ou la courbe *génératrice* à double courbure considérée comme engendrant la surface $\Sigma$ dans le premier mode, celui où l'on considère cette surface $\Sigma$ comme étant de révolution, ne sera autre que la courbe $\mu$ indiquée dans le deuxième mode, savoir : celui où l'on considère cette même surface $\Sigma$ comme étant une surface-canal.

Si la courbe $\mu$ est aussi une droite, on aura la surface-canal la plus simple.

Or, la droite $\mu$ peut prendre trois positions par rapport à la droite $\xi$.

1° Les droites $\mu$ et $\xi$ peuvent être parallèles.

Dans ce cas la surface-canal $\Sigma$ est un cylindre de révolution.

2° Les droites $\mu$ et $\xi$ peuvent se couper.

Dans ce cas la surface-canal $\Sigma$ est un cône de révolution.

3° Les droites $\mu$ et $\xi$ peuvent ne pas être situées dans le même plan.

Dans ce cas la surface-canal $\Sigma$ est un hyperboloïde à une nappe et de révolution.

Dans le premier cas le cylindre est une surface-canal à sections normales constantes.

Dans les deux autres cas, le cône et l'hyperboloïde sont des surfaces des canaux à sections normales variables.

XXII. Supposons maintenant que la surface $\Delta$ soit un cône ou un cylindre non de révolution.

Toute surface du deuxième degré jouit de la propriété d'être touchée suivant une courbe plane par un cône qui lui est tangent quelle que soit la position dans l'espace du sommet de ce cône enveloppe.

Lorsque le cône devient un cylindre, la courbe de contact est une courbe diamétrale de la surface du second degré.

L'ellipsoïde à trois axes inégaux, le paraboloïde elliptique, et les deux hyperboloïdes à une nappe ou à deux nappes et ayant chacun trois axes inégaux, sont les surfaces du second degré qui jouissent de la propriété de pouvoir être coupées par un plan suivant des sections circulaires, ainsi que le cône du second degré et le cylindre elliptique.

On voit donc de suite que la surface $\Sigma$ devant être engendrée par un cercle C, pour que la surface enveloppe $\Delta$ de son plan tangent $\Theta$ (ce plan roulant sur le cercle C) soit un cône, il faudra que l'on puisse construire une surface du deuxième degré E tangente à la surface $\Sigma$ tout le long du cercle C, ce cercle C étant une section circulaire de la surface E.

Il faudra donc que la surface $\Sigma$ puisse être l'enveloppe d'une surface du second degré E, se mouvant dans l'espace de telle manière que ses positions successives et infiniment voisines E, E' E'',..... se coupent deux à deux et successivement suivant des cercles C, C', C'',..... et en généralisant ce qui précède, on peut dire que toutes les fois qu'une surface $\Sigma$ engendrée par une section conique C, sera reconnue pouvoir être engendrée par une surface du second degré E, telle que les *caractéristiques* de la surface $\Sigma$ soient planes, l'on pourra toujours avoir pour la surface $\Delta$ une surface conique.

Ou, en d'autres termes, il faudra pour que la surface $\Delta$ soit un cône que la section conique C *génératrice* de la surface $\Sigma$, ne soit autre qu'une *caractéristique*, lorsqu'on considère la surface $\Sigma$ comme surface enveloppe d'une surface *enveloppée* E du second degré.

*De l'osculation des courbes et des surfaces.*

XXIII. Lorsque deux courbes ont un élément rectiligne commun, nous dirons qu'elles ont entre elles un contact du premier ordre.

Deux courbes qui ont en un point, un contact du premier ordre, ont en ce point même tangente et même plan normal.

Lorsque deux courbes ont deux éléments rectilignes et successifs en commun, nous dirons qu'elles ont entre elles un contact du deuxième ordre.

Deux courbes qui ont en un point un contact du deuxième ordre, ont en ce point même cercle osculateur, même rayon de courbure, même plan osculateur.

Lorsque deux courbes ont 3, 4, 5, 6, *n* éléments rectilignes et successifs communs, nous dirons qu'elles ont entre elles un contact du 3^e^, 4^e^, 5^e^, 6^e^,... *n*^ième^ ordre.

Nous nous servirons de l'expression d'*osculation* toutes les fois que deux courbes auront un contact d'un ordre supérieur au contact du premier ordre.

Les courbes seront dites dans ce cas, *osculatrices* l'une à l'autre.

Deux surfaces en contact par un point, auront en ce point un contact du premier ordre, si en menant par ce point un plan sécant arbitraire, les deux courbes intersections des surfaces par ce plan n'ont qu'un contact du premier ordre; et si cela a lieu pour tous les plans sécants.

Les deux surfaces ont même plan tangent et même normale pour le point où elles ont un contact du premier ordre.

Deux surfaces en contact par un point auront tout autour de ce point un contact du deuxième ordre, si en menant par ce point un plan sécant arbitraire les deux courbes intersections des surfaces par ce plan ont un contact du deuxième ordre; et si cela a lieu pour tous les plans sécants.

Il en sera de même pour les contacts du 3^e^, 4^e^,..... *n*^ième^ ordre tout autour d'un point de tangence.

Nous dirons que deux surfaces sont *osculatrices* l'une à l'autre en un point, lorsqu'elles auront en ce point un contact d'un ordre supérieur au contact du premier ordre.

Deux surfaces seront en contact tout le long d'une courbe, si menant par un point arbitraire de la courbe, un plan sécant aussi arbitraire, les deux courbes de section ont un contact du premier ordre.

Deux surfaces en contact par une courbe, ont même surface développable tangente tout le long de cette courbe de contact.

Deux surfaces auront un contact du 2ᵉ, 3ᵉ,... $n^{ieme}$ ordre tout le long d'une courbe, lorsque menant par un point arbitraire de cette courbe un plan arbitraire, les deux courbes de section auront entre elles un contact du 2ᵉ, 3ᵉ,..... $n^{ieme}$ ordre.

Nous dirons que deux surfaces sont *osculatrices* l'une à l'autre tout le long d'une courbe, lorsqu'en chacun des points de cette courbe, elles auront un contact d'un ordre supérieur au contact du premier ordre.

Cela posé :

Toutes les fois qu'en géométrie descriptive nous aurons à résoudre des problèmes de contact du premier ordre, nous n'aurons à considérer que des *éléments rectilignes*.

Mais toutes les fois que nous aurons à résoudre des problèmes de contact du deuxième ordre, nous aurons à considérer des *éléments curvilignes*.

Lorsque nous considérerons un *élément rectiligne*, nous pourrons employer dans nos constructions, la droite prolongement de cet élément ou, en d'autres termes, la *tangente* à la courbe ou à la surface à laquelle l'élément rectiligne considéré appartient.

Lorsque nous considérerons un *élément curviligne*, nous pourrons employer dans nos constructions, le cercle prolongement de cet élément ou, en d'autres termes, le *cercle osculateur* à la courbe à laquelle l'élément curviligne considéré appartient.

Deux *lignes* courbes ou droites, une *ligne* et une *surface* se coupent en un point.

Deux *lignes* courbes ou droites, une *ligne* et une *surface* peuvent être en contact par un point, mais ce point n'a pas la même nature géométrique que le point d'intersection. Le point de contact de deux lignes est un élément rectiligne.

Deux *surfaces* peuvent être en contact par un point, mais ce point n'a pas la même nature géométrique que le point d'intersection, ni que le point de contact de deux lignes. Le point de contact de deux surfaces est une facette élémentaire de la surface.

De là, la nécessité de considérer trois espèces de points :

Le point d'intersection donné par une sécante qui sera dit : *point*.

Le point de contact d'une tangente qui sera dit : *point-ligne*.

Le point de contact d'un plan tangent qui sera dit : *point-plan*.

Toutes les fois que nous aurons en géométrie descriptive à considérer un *point*, nous pourrons employer deux *lignes* se coupant en ce point.

Toutes les fois que l'on aura à considérer un *point-ligne*, nous pourrons employer deux *lignes* tangentes l'une à l'autre en ce point.

Toutes les fois que l'on aura à considérer un *point-plan*, nous pourrons employer deux *surfaces* tangentes l'une à l'autre en ce point.

Et ainsi lorsque sur une courbe on aura à considérer un *point-ligne*, pour la solution d'un problème, on pourra remplacer pour ce point particulier la courbe par sa tangente.

Et ainsi lorsque sur une surface on aura à considérer un *point-plan* pour la solution d'un problème, on pourra remplacer pour ce point particulier la surface par son plan tangent.

Par la même raison lorsqu'il faudra en un point d'une courbe considérer un élément curviligne de cette courbe, on pourra remplacer la courbe par son cercle osculateur en ce point.

Par la même raison encore, lorsqu'il s'agira de considérer la courbe de contact de deux surfaces, on pourra remplacer ces deux surfaces par la surface développable qui leur est tangente à l'une et à l'autre et tout le long de cette courbe de contact.

Et l'on est ainsi conduit à concevoir que lorsqu'entre deux courbes ou deux surfaces, il s'agira de contact d'un ordre supérieur, du $n^{ième}$ ordre par exemple, on devra remplacer ces courbes ou ces surfaces par les courbes ou les surfaces les plus simples que l'on puisse connaître et qui jouissent de la propriété de pouvoir avoir entre elles un contact du même ordre, c'est-à-dire du $n^{ième}$ ordre.

D'après ce qui précède cherchons, quelle est la surface la plus simple qui aura un contact du deuxième ordre avec une *surface-canal* tout le long d'une *caractéristique* de cette surface-canal.

Premier cas. *Surface à sections normales constantes.*

Le cercle C du rayon R se meut dans l'espace, son centre $o$ parcourant une courbe $\xi$ et son plan étant normal à la courbe ou *directrice* $\xi$.

Considérons trois points successifs et infiniment voisins $o$, $o'$, $o''$ de la courbe $\xi$.

Nous aurons trois *caractéristiques* successives C, C′, C″ de la surface-canal $\Sigma$.

Par C et C′ passe la sphère S.

Par C′ et C″ passe la sphère S′.

Et les deux sphères S et S′ sont deux *enveloppées* successives de la surface *enveloppe* $\Sigma$.

La sphère S est tangente à la surface $\Sigma$ tout le long de la courbe C, c'est-à-dire que si l'on fait mouvoir le plan $\Theta$ tangentiellement à la surface $\Sigma$ le long de C, on aura un cylindre de révolution $\Delta$ qui sera tangent à la fois à la surface $\Sigma$ et à la sphère S.

La zone élémentaire de contact des surfaces $\Delta$ et S, $\Delta$ et $\Sigma$, ne sera pas comprise

entre C et C', tandis que la zone élémentaire de contact des surfaces Σ et S est comprise entre C et C'.

S touche Σ tout le long de la courbe C et coupe Σ tout le long de la courbe C'; c'est pour cela qu'il n'y a qu'un contact du premier ordre entre S et Σ tout le long de la zone élémentaire (C, C').

Le plan de la caractéristique C sera perpendiculaire en $o$ au premier élément rectiligne $\overline{oo'}$, le plan de C' sera perpendiculaire en $o'$ au second élément rectiligne $\overline{o'o''}$ et le plan C'' sera perpendiculaire en $o''$ à un troisième élément rectiligne $\overline{o''o'''}$ de la courbe $\xi$.

Cela posé :

Concevons le cercle $\delta$ osculateur de la courbe $\xi$, le cercle $\delta$ passera par les trois points $o$, $o'$, $o''$, et il aura pour éléments rectilignes successifs $\overline{oo'}$ et $\overline{o'o''}$, mais le troisième élément rectiligne $\overline{o''o'''}$ de la courbe $\xi$ n'appartiendra pas à ce cercle $\delta$.

Pour le point curviligne $\overline{oo'o''}$ de la courbe $\xi$, nous pourrons remplacer cette courbe par son cercle osculateur $\delta$.

Et la surface-canal Q qui aura $\delta$ pour directrice, et pour *caractéristique* le cercle C du rayon R, aura en commun avec la surface Σ, les cercles C et C', mais sera non-seulement tangente à Σ tout le long de C, mais encore tout le long de C'; elle aura donc un contact du second ordre avec la surface Σ tout le long de la zone élémentaire (C, C').

Ainsi la surface la plus simple qui puisse avoir un contact du second ordre tout le long d'une caractéristique d'une surface-canal à sections normales constantes, est un *tore* qui est la plus simple surface-canal à sections normales constantes que l'on puisse imaginer.

DEUXIÈME CAS. *Surface-canal à sections normales variables.*

Nous pourrons couper la surface Σ par le plan du cercle osculateur $\delta$, et nous aurons une courbe $\mu_1$.

Les trois caractéristiques successives C, C', C'' dont les centres $o$, $o'$, $o''$ appartiennent à la fois à la courbe $\xi$ et à son cercle osculateur $\delta$, couperont la courbe $\mu_1$ en trois points $p$, $p'$, $p''$, qui seront des points successifs et infiniment voisins de cette courbe $\mu_1$ puisque $o$, $o'$, $o''$, sont des points successifs et infiniment voisins de la courbe $\xi$.

Dès lors, les trois points $p$, $p'$, $p''$ appartiendront au cercle K osculateur de la courbe $\mu_1$.

La surface osculatrice du deuxième ordre tout le long de la caractéristique C à

la surface canal Σ, sera donc une surface-canal à sections normales variables et du même genre, par conséquent, que la surface proposée Σ.

Cette surface simple aura le cercle δ pour *directrice* et le cercle K exprimera graphiquement la loi suivant laquelle doivent varier les rayons des *caractéristiques circulaires* C.

*Théorème général relatif aux courbes et surfaces ayant une osculation entre elles.*

XXIV. De ce qui précède on peut conclure rigoureusement,

Que si l'on transforme deux courbes ou deux surfaces ayant un contact du $n^{ième}$ ordre en deux autres courbes ou deux autres surfaces, la transformation s'opérant par le même mode pour les deux courbes ou les deux surfaces, les courbes ou les surfaces transformées auront comme les courbes ou les surfaces primitives un contact du $n^{ième}$ ordre.

*Remarques sur la théorie précédente, des infiniment petits en géométrie descriptive.*

XXV. Les divers auteurs qui depuis Monge ont écrit des traités de géométrie descriptive, ont tous donné des démonstrations inexactes lorsqu'ils ont voulu recourir à l'emploi des infiniment petits.

Cela tient à ce qu'ils ont cru pouvoir transporter dans la *géométrie descriptive* ou la langue graphique, les infiniment petits tels qu'on les conçoit en *analyse* ou dans la langue algébrique.

Ainsi ils emploient tous cette expression, *en passant à la limite*, expression dont la valeur est parfaitement définie en analyse, mais qui n'a aucun sens en géométrie descriptive.

En passant *à la limite*, disent-ils, deux points situés à distance finie se superposent et une sécante devient une tangente et un plan sécant devient un plan tangent, etc. Toutes choses géométriques qui n'ont point été démontrées et qui ne sont énoncées que par analogie avec ce qui se fait en *analyse*...

Mais lorsqu'en *analyse*, on dit que l'on passe à la limite, on voit comment on arrive à la *limite*; il y a des théorèmes à ce sujet qui vous servent de guides et qui servent à vous redresser si vous ne vous conformez pas à leurs prescriptions.

Je vais parmi plusieurs inexactitudes en choisir trois, qui serviront à faire apprécier l'erreur des géomètres qui transportent par irréflexion dans la géométrie

descriptive les idées que l'on peut écrire en *analyse* ou langue *algébrique*, au sujet des infiniment petits.

1° *Démonstration de la propriété dont jouit le plan tangent en un point d'une surface, savoir, de contenir les tangentes à toutes les courbes qui tracées sur la surface se croisent en ce point.*

On dit : étant donnée une surface $\Sigma$ on peut la concevoir engendrée par une courbe C se mouvant suivant une certaine loi.

Concevons deux positions à distance finie, C et $C_1$, de cette courbe génératrice.

Prenons un point $m$ sur C, et par ce point faisons passer deux courbes arbitraires $\xi$ et $\xi'$. Les courbes $\xi$ et $\xi'$ couperont respectivement la courbe $C_1$ aux points $y$ et $y'$.

Les trois points $m$, $y$, $y'$ formeront un triangle.

Lorsque la courbe $C_1$ se mouvra dans l'espace pour reprendre la position C, les points $y$ et $y'$ se mouvront respectivement sur les courbes $\xi$ et $\xi'$ et enfin *à la limite*, les points $y$ et $y'$ se superposeront sur le point $m$, et dès lors *à la limite*, les sécantes $my$ et $my'$ deviendront les tangentes respectives en $m$ des courbes $\xi$ et $\xi'$. Et comme enfin la courbe $C_1$ en venant prendre la position de la courbe C, les deux points $y$ et $y'$ se rapprochent l'un de l'autre pour se confondre avec le point $m$, lorsque les deux courbes $C_1$ et C se confondent, on peut dire qu'à *la limite* la sécante $yy'$ devient la tangente en $m$ à la courbe C.

Et dès lors, les trois points $m$, $y$, $y'$ se confondant avec le point $m$, on peut dire : *à la limite*, les trois tangentes en $m$ aux courbes C, $\xi$ et $\xi'$ sont dans un même plan.

Mais n'est-il pas évident que l'on présuppose ce que l'on voulait démontrer ? N'est-il pas évident que si l'on considère trois courbes $\xi$, $\xi'$, $\xi''$ tracées sur la surface $\Sigma$ et se croisant au point $m$ situé sur la position primitive de la génératrice C, ces trois courbes coupant respectivement la position à distance finie $C_1$ de la génératrice C de la surface $\Sigma$ en les points $y$, $y'$, $y''$, les sécantes $my$, $my'$, $my''$ ne seront pas situées dans un même plan ? Et dès lors, qui nous démontre qu'à *la limite*, ces trois sécantes devenant les tangentes au point $m$ aux trois courbes $\xi$, $\xi'$, $\xi''$, ces trois tangentes seront dans un même plan ?

Par le mode de démonstration employé et adopté, on fait un cercle vicieux, car il est évident que l'on présuppose précisément ce que l'on veut démontrer.

Et en effet, ne pouvons-nous pas supposer que pour le point $m$ la surface $\Sigma$ est constituée de telle manière que les tangentes aux diverses courbes $\xi$, $\xi'$, $\xi''$,..... qui tracées sur cette surface $\Sigma$ se croisent au point $m$, ne sont point situées dans un même plan ; et cependant en appliquant à ce cas le mode de démonstration

précédent, on arriverait à démontrer que toutes ces tangentes, sont dans un même plan.

Mais, dira-t-on, dans le cas particulier que vous concevez le point $m$ est un point singulier de la surface $\Sigma$; il est à cette surface $\Sigma$ ce qu'est le sommet par rapport à la surface conique; c'est un point pour lequel la surface a une infinité de plans tangents.

Et qui nous dit que les points d'une surface ne sont pas tous dans le même cas ?

Ce ne peut être le mode de démonstration précédent, car précisément il conduit à considérer le point de contact d'un plan tangent et d'une surface, comme étant un *point mathématique* (ou un *point-point* comme je l'ai défini précédemment), ce qui est précisément la nature géométrique du point d'une surface lorsqu'il est tel que plusieurs plans tangents peuvent être menés par ce point à la surface.

Il nous semble que le mode de démonstration que nous avons donné de ce théorème important est à l'abri de toute objection, car il est fondé sur une loi de génération des surfaces, qui permet de reconnaître si le point $m$ considéré sur la surface $\Sigma$ est un point singulier ou non.

Et en effet, le plan qui passe par la tangente en $m$ à la courbe C, prenant diverses positions dans l'espace, coupera la surface $\Sigma$ suivant des courbes $C_1$, $C_2$, $C_3$,...., qui seront telles que leurs branches se croiseront au point $m$, ou qu'une seule branche passera par le point $m$, et on ne peut évidemment admettre que ces deux hypothèses, en supposant que par le point $m$ ne passe qu'une *nappe* de la surface $\Sigma$.

Dans le premier cas, il y aura évidemment une surface conique formée par les tangentes en $m$ aux diverses courbes $C_1$, $C_2$, $C_3$ et dont le sommet sera le point $m$.

Dans le deuxième cas, cette surface conique ne sera autre qu'un plan auquel on donne le nom de plan *tangent*.

*2° Deux génératrices successives et infiniment voisines d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution ne se coupent pas.*

Sur le cercle de gorge C d'un hyperboloïde de révolution, prenons deux points $m$ et $m'$ à distance finie l'un de l'autre, et en chacun d'eux menons les tangentes $\theta$ en $m$ et $\theta'$ en $m'$ au cercle de gorge.

La génératrice G passant par le point $m$ et la génératrice G' passant par le point $m'$ (ces deux génératrices appartenant au même système) se projetteront sur le plan du cercle de gorge et respectivement suivant les droites $\theta$ et $\theta'$.

Les plans passant par G et $\theta$, G′ et $\theta'$ seront perpendiculaires au plan du cercle de gorge C.

Les deux tangentes $\theta$ et $\theta'$ se couperont en un point $q$ et les deux plans (G, $\theta$) et (G′, $\theta'$) se couperont suivant une droite Q se projetant sur le plan du cercle C en le point $q$, puisque cette droite Q est perpendiculaire au plan du cercle C.

La droite Q coupera la génératrice G en un point $y$ et la génératrice G′ en un point $y'$.

Cela posé :

Si l'on suppose que le point $m'$ se rapproche du point $m$, quelque près que l'on suppose le point $m'$ du point $m$, les deux points $y$ et $y'$ seront toujours, l'un au-dessus et l'autre au-dessous du plan du cercle de gorge C, et les projections $\theta$ et $\theta'$ des droites G et G′ ne se confondront point, quelque rapprochés que l'on suppose les points $m$ et $m'$; et quelque rapprochés que l'on suppose les points $m$ et $m'$, le point $q$ sera toujours hors du cercle C; dès lors, les deux droites G et G′ ne se rencontreront point, quelque rapprochés que soient les points $m$ et $m'$, donc deux génératrices successives ne se coupent pas.

Par ce mode de démonstration, on considère deux génératrices que l'on dit être successives et qui ne le sont point.

Et en effet, si nous concevons que la droite G, en se mouvant dans l'espace pour décrire l'hyperboloïde, passe en les positions successives G, G′, G″, G‴,..... on prend pour génératrices successives G et G″, et non G et G′.

Or, dans les surfaces réglées (soit gauches, soit développables), la première et la troisième génératrices successives ne se coupent pas; tandis que la première et la deuxième génératrices successives se coupent pour la surface développable et ne se coupent pas pour la surface gauche.

Ainsi, par le mode de démonstration employé, on ne démontre rien.

La démonstration rigoureuse est, à ce que je crois, la suivante :

Concevons sur le cercle de gorge C les points successifs et infiniment voisins $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,..... par chacun de ces points passera une génératrice droite de la surface hyperboloïde.

On aura donc les génératrices successives et infiniment voisines G, G′, G″, G‴,...

Les éléments rectilignes $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$, $\overline{m''m'''}$,..... du cercle C étant prolongés seront respetivement les projections, sur le plan de ce cercle de gorge C, des droites G, G′, G″,.....

Les plans (G, $\overline{mm'}$) et (G′, $\overline{m'm''}$) se couperont suivant une droite Q, laquelle coupera G en un point $y$ et G′ en un point qui ne sera autre que $m'$.

Et le point $y$ ne se superposera avec le point $m'$ qu'autant que l'angle $\alpha$ que

G ou G' fait avec le plan du cercle C sera nul. Lorsque l'angle $\alpha$ sera droit les droites Q et G' se confondront; dès lors G et G' seront parallèles, et dès lors la droite Q et aussi la droite G' couperont toutes les deux la droite G à l'infini.

Ainsi, tant que l'angle $\alpha$ n'est pas nul ou droit, les deux génératrices successives et infiniment voisines G et G' ne se coupent pas et la surface est gauche.

Lorsque l'angle $\alpha$ est nul, la surface n'est autre que le plan du cercle C, c'est-à-dire une surface développable.

Lorsque l'angle $\alpha$ est droit, la surface est un cylindre, et ainsi elle est encore une surface développable.

3° *Construire le point culminant de la courbe-intersection d'un plan et d'une surface définie par des sections horizontales.*

Étant donnée une surface ou un *terrain* $\Sigma$ par les projections sur le plan horizontal d'une suite de sections horizontales équidistantes et un plan P par son *échelle de pente*, ayant déterminé les points de la courbe C, section de la surface par le plan P, il arrive que la courbe de section C se prolonge entre deux courbes horizontales $\delta$ et $\delta'$ de la surface $\Sigma$; on demande de déterminer le point $\rho$ de la courbe C compris entre les courbes de niveau $\delta$ et $\delta'$ et pour lequel la tangente $\theta$ est horizontale et se projette suivant une droite perpendiculaire à la projection E de la ligne de plus grande pente du plan P.

Le problème ainsi énoncé, on dit :

Si les deux courbes $\delta$ et $\delta'$ étaient infiniment voisines, on pourrait toujours leur mener une droite qui, perpendiculaire à l'une des courbes $\delta$ et parallèle à E, serait *sensiblement* perpendiculaire à l'autre courbe $\delta'$.

Nous cherchons donc à mener à $\delta$ et $\delta'$ quoique ces courbes soient situées à distance finie l'une de l'autre, mais en les supposant, toutefois, assez rapprochées, une droite N normale en même temps à l'une et à l'autre de ces courbes $\delta$ et $\delta'$ et parallèle à E.

N coupera $\delta$ au point $m$ et $\delta'$ au point $m'$.

Les tangentes $t$ et $t'$ menées respectivement aux points $m$ et $m'$ pour les courbes $\delta$ et $\delta'$, seront parallèles entre elles et perpendiculaires à E.

Nous pourrons donc chercher l'intersection du plan P et du plan $(t, t')$, ses deux plans se couperont suivant une droite $\theta$ qui sera la tangente demandée, laquelle coupera la droite G qui unit les points $m$ et $m'$ en un point $o$ qui sera le point culminant de la courbe C.

Examinons cette démonstration :

1° Étant donnés sur un plan deux courbes $\delta$ et $\delta'$ et une droite E, quelque rapprochées qu'on suppose les courbes, on ne pourra pas leur mener une normale

commune parallèle à la droite E quelle que soit la direction de cette droite E.

Et en effet :

Concevons deux cercles D et D'; on ne pourra leur mener une normale commune qu'autant qu'elle passera par les centres *o* et *o'*, et cela aura lieu que les centres soient à distance finie ou infiniment petite.

On dit bien *sensiblement* perpendiculaire à l'une et à l'autre des courbes, mais en géométrie on ne peut admettre des approximations de ce genre ; toute approximation doit être soumise à une loi géométrique et ne doit violer aucune loi géométrique.

Ainsi, *comme exemple*, on peut construire une suite de tangentes à une courbe de l'espace et projeter ces tangentes sur un plan, et dire les tangentes de l'espace sont à distance finie les unes des autres et ne se coupent point deux à deux, ce qui aurait lieu si elles étaient successives et infiniment voisines, on ne peut donc *rigoureusement* construire un polygone fini et enveloppe de la courbe de l'espace ; mais comme les projections des tangentes se coupent deux à deux et donnent un polygone fini, enveloppe de la projection de la courbe, en construisant une courbe tangente à ce polygone, on aura *approximativement* la projection de la courbe de l'espace.

L'erreur commise dans la démonstration vient de ce que, en considérant deux courbes de niveau, on aurait dû considérer une trajectoire coupant ces courbes et les coupant à angle droit.

Lorsque les deux courbes de niveau sont infiniment voisines, c'est l'élément *curviligne* de la trajectoire, ou, en d'autres termes, c'est le cercle osculateur de cette trajectoire que coupent rectangulairement ces deux courbes de niveau successives et non l'*élément rectiligne* de cette trajectoire.

2° En examinant de plus près la démonstration on voit que l'on a voulu remplacer la zone de surface $\Sigma$ ou du terrain qui est comprise entre les deux courbes de niveau $\delta$ et $\delta'$ par une surface *géométrique* gauche.

Mais trois conditions suffisent pour déterminer le mouvement d'une droite. On ne peut donc dire : remplaçons la zone du terrain par une zone de surface réglée telle qu'elle soit engendrée par une droite s'appuyant sur les courbes $\delta$ et $\delta'$ et restant pendant son mouvement normale à $\delta$ et normale aussi à $\delta'$ ; car on se donnerait quatre *conditions*.

La solution du problème doit être donnée ainsi qu'il suit :

Faisons rouler sur les courbes $\delta$ et $\delta'$ un plan Q, ce plan engendrera une surface développable $\psi$ ; c'est la zone de la surface $\psi$ comprise entre les courbes de niveau $\delta$ et $\delta'$ que l'on substituera à la zone de la surface $\Sigma$.

On mènera dès lors deux droites $t$ et $t'$ tangentes aux courbes $\delta$ et $\delta'$ et parallèlement à l'échelle de pente E et tangentes à $\delta$ et $\delta'$ aux points $m$ et $m'$.

Le plan Q passant par $t$ et $t'$ coupera le plan P suivant la droite $\theta$ horizontale et dont la projection sera perpendiculaire à E, et cette droite $\theta$ coupera la droite $mm'$ au point culminant $o$ de la section C.

Revenons sur la différence qui doit nécessairement exister entre les manières de concevoir les infiniment petits en *géométrie descriptive* et en *analyse*, et de les exprimer dans le langage *géométrique* et dans la langue *algébrique*.

Lorsque l'on se sert de l'*analyse* de Descartes, on dit que la tangente est la limite des sécantes et l'on arrive à la tangente en un point $m$ d'une courbe C, par la marche suivante ; on prend l'équation $y - y' = m(x - x')$ d'une droite B passant par le point $m$ dont les coordonnées sont $x'$ et $y'$ ; on cherche les coordonnées des points de rencontre de cette droite B avec la courbe C dont l'équation qui est $y = f(x)$ se trouve satisfaite par les coordonnées $x'$ et $y'$ ; ensuite on élimine $x$ entre les deux équations de B et de C et l'on a une équation $\varphi(y) = 0$.

Les racines de cette équation $\varphi(y) = 0$ sont les valeurs des coordonnées $y$ des divers points en lesquels la droite B coupe la courbe C.

L'une de ces racines est évidemment $y'$.

Pour que la droite B devienne une tangente au point $m$, il faut que l'on ait plusieurs racines égales entre elles et à $y'$.

Alors on dit que les points de sécance pour lesquels les ordonnées sont égales à $y'$, se sont superposés sur le point $m$.

C'est dans ce sens que l'on dit passer à la *limite ;* ainsi lorsque l'on passe à la *limite* en employant l'*analyse* de Descartes, on suppose rigoureusement que les points se superposent, mais il n'y a aucune considération d'infiniment petits.

Plus tard on introduisit l'idée des infiniment petits dans l'*algèbre* et l'on obtint l'*analyse infinitésimale* en écrivant les infiniment petits en langue *algébrique* et en se conformant à l'esprit de l'algorithme algébrique.

Alors on fut conduit à considérer la tangente $\theta$ comme une droite qui passant par un point $m$ d'une courbe C, était telle que si l'on considérait un point $m'$ situé sur la courbe C et voisin du point $m$, l'ordonnée de la courbe C pour ce point $m'$ coupant la droite $\theta$ en un point $n$, le point $m'$ pouvait toujours être rapproché du point $m$ (tout en restant sur la courbe C) de manière à ce que la différence $m'n$ fût plus petite que toute quantité donnée, et l'on peut dire alors que la tangente $\theta$ en $m$ à la courbe C n'est que le prolongement de l'*élément rectiligne* de cette courbe C au point $m$.

Pourquoi ne pas employer les *éléments rectilignes* auxquels nous sommes conduits par une analyse rendue supérieure par l'introduction des infiniment petits

et employer toujours la *superposition des points*, à laquelle on a été conduit par une *analyse* restreinte? En résumé : dans la langue algébrique de Descartes on dit : *l'équation* $\varphi(y)=0$ *a des racines égales*, et l'on exprime en langage géométrique ce résultat en disant : *plusieurs points se superposent*.

Dans la langue algébrique supérieure, on dit : *la différence entre deux ordonnées peut devenir plus petite que toute quantité donnée*, et le résultat obtenu s'exprime en langage géométrique, en disant : *il existe un élément rectiligne commun*.

Il me semble que la manière dont j'ai défini les points successifs et infiniment voisins et les courbes successives et infiniment voisines, est conforme à l'esprit de la géométrie et exprime nettement la loi de continuité qui existe dans les courbes et les surfaces et que les *infiniment petits* se trouvent introduits dans la *géométrie descriptive*, avec autant de rigueur qu'ils l'ont été dans l'*analyse*.

Mais on doit remarquer que l'introduction des infiniment petits dans la géométrie descriptive, tout en perfectionnant cette science, ne pourra jamais lui donner la puissance qui appartient à l'*analyse infinitésimale*.

L'*analyse* sera toujours l'instrument le plus puissant pour la recherche des vérités mathématiques ; toutefois on ne doit pas dédaigner la *géométrie descriptive* qui rend de grands services aux ingénieurs, et qui est appelée à leur rendre de nouveaux services et très-importants, *pour peu* qu'ils l'étudient avec soin et qu'ils s'intéressent à ses progrès.

N'oublions pas que MONGE a dit : *La géométrie descriptive est la langue écrite de l'ingénieur*.

### § II.

*Des divers points singuliers qu'une courbe plane peut présenter dans son cours* (*).

**C'est en vertu de la théorie des infiniment petits, telle que nous l'avons appliquée à la géométrie descriptive, que, sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*, nous allons parvenir à reconnaître qu'une courbe plane C peut présenter dans *son cours* des *inflexions* particulières, et que nous allons démontrer, *rigoureusement*, que pour ces points (auxquels on donne le nom de *points singuliers*) la courbe C a nécessairement un rayon de courbure nul ou infini.**

**Et nous parviendrons même à reconnaître, et d'une manière certaine, non-seu-**

(*) Cette section du chapitre VII a été communiquée à la Société philomatique dans sa séance du 8 février 1840.

lement si la développée $\delta$ de la courbe C, mais encore si la développée $\delta_1$ de la développée $\delta$ a, en son point correspondant au point singulier de la courbe C, un rayon de courbe fini, nul ou infini.

Nous avons précédemment établi, ce qui suit :

1° Lorsque deux courbes C et C' à simple ou à double courbure ont deux points successifs $m$ et $m'$ communs, ou, en d'autres termes, un *élément rectiligne* $\overline{mm'}$ commun, elles sont tangentes l'une à l'autre; ces deux courbes C et C' ont même tangente $\theta$, cette tangente $\theta$ n'étant autre que l'élément rectiligne $\overline{mm'}$ prolongé.

Et on dit que les deux courbes ont dans ce cas un contact du premier ordre.

2° Lorsque deux courbes C et C', à simple ou à double courbure, ont trois points successifs, $m$, $m'$, $m''$ communs, ou, en d'autres termes deux éléments rectilignes successifs $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$ communs, ces deux courbes ont un contact du deuxième ordre, ou ont un *élément curviligne* commun, ou en d'autres termes ont même *cercle osculateur* ou même *rayon de courbure*.

3° Lorsque deux courbes C et C' à simple ou à double courbure, ont quatre points successifs $m$, $m'$, $m''$, $m'''$ en commun, ou, en d'autres termes, trois éléments rectilignes successifs communs $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$, $\overline{m''m'''}$, on dit que ces deux courbes ont un contact du troisième ordre.

Les deux courbes ont dans ce cas deux cercles osculateurs successifs communs et deux plans osculateurs successifs communs.

Il peut arriver que les quatre points successifs $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, déterminent un seul cercle, alors dans ce cas les deux cercles osculateurs successifs se superposent et les deux plans osculateurs se superposent.

Lorsque l'on a une courbe C (plane) telle que pour un de ses points $m$, son cercle osculateur a un contact du troisième ordre avec elle, on dit que le point $m$ est un *sommet* de la courbe C.

4° Lorsque deux courbes C et C', à simple ou à double courbure, auront $(n+1)$ points successifs communs, ou, en d'autres termes, $n$ éléments rectilignes successifs communs, on dit que ces deux courbes ont un contact du $n^{ième}$ ordre.

Cela posé, venons aux *points singuliers* qu'une courbe plane peut présenter dans son cours.

Les *points singuliers* qu'une courbe plane peut présenter dans son cours sont au nombre de quinze.

L'existence de onze de ces points se démontre en considérant la courbe plane

comme la projection d'une courbe à double courbure ; l'existence des quatre derniers se démontre au moyen de la développée de la courbe plane.

*Les quinze points singuliers* se divisent en cinq séries :

1re. SÉRIE.

1° Les points en lesquels plusieurs branches viennent se croiser :
*Points multiples* de première et de deuxième espèce.

2e SÉRIE.

2° Les points pour lesquels le rayon de courbure est nul :
*Points de rebroussement* de première et de deuxième espèce.
*Point aigu*, point d'*inflexion simple* et point *d'arrêt*.

3e SÉRIE.

3° Les points pour lesquels le rayon de courbure est infini :
Point *méplat* et point d'*inflexion double*.
Points de *rebroussement* de première et de deuxième espèce pour lesquels le rayon de courbure est *infini*.
Point d'*arrêt* pour lequel le rayon de courbure est *infini*.

4e SÉRIE.

4° Le point de *rebroussement* de seconde espèce pour lequel le rayon de courbure est *fini*.

5e SÉRIE.

5° Point *isolé*. — Point *asymptote*.

DES POINTS MULTIPLES.

1. *Du point multiple de première espèce.*

1° Une courbe à double courbure C peut toujours être considérée comme étant située sur deux cylindres, et l'on peut prendre ceux qui projettent horizontalement et verticalement cette courbe C.

On peut donc considérer une courbe C située dans l'espace comme étant l'intersection des deux cylindres projetants et ayant dès lors pour section droite, le premier la courbe $C^h$ et le second la courbe $C^v$; $C^h$ et $C^v$ étant les projections horizontale et verticale de la courbe C.

2° Une courbe C située dans l'espace peut toujours être considérée comme

étant l'intersection de deux cônes qui auraient l'un et l'autre pour *directrice* commune cette courbe C, les sommets de ces cônes étant, d'ailleurs, arbitrairement placés dans l'espace.

3° Deux cônes peuvent se couper suivant des courbes ayant des branches infinies, ces branches ayant chacune ou non une asymptote. (On sait, en géométrie descriptive, reconnaître si la courbe intersection de deux cônes, a ou non des branches infinies, et si chaque branche infinie a ou non une asymptote).

Cela posé :

L'on sait, par la construction même de l'*épure*, que deux cylindres $\Sigma$ et $\Sigma_r$ qui ont un plan tangent $\Theta$ commun, se coupent suivant une courbe à double courbure S formée de deux branches au moins et se croisant au point $m$ en lequel se coupent les génératrices G et $G_r$ de contact du plan $\Theta$ et des surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_r$.

Ainsi l'on sait qu'une courbe à double courbure peut présenter un point *multiple*, c'est-à-dire un point en lequel plusieurs branches de la courbe viennent se croiser.

Pour ce point chaque branche aura une tangente distincte, puisque pour ce point les éléments rectilignes des branches de la courbe ne se confondent point, mais s'entrecoupent.

Si l'on projette la courbe C sur le plan $\Theta$, on aura une courbe plane $C_r$ formée d'autant de branches que la courbe C et dont les branches se croiseront au point $m$.

Ainsi une courbe plane peut présenter un point *multiple*.

On donne au point multiple qui est tel que les branches qui passent par ce point, s'y croisent, et que dès lors on a pour ce point autant de tangentes que de branches de courbe, on donne, dis-je, à ce point, le nom de *point multiple de première espèce* (*fig.* 131).

II. *Du point multiple de deuxième espèce.*

Traçons sur un cône $\Sigma$, ayant pour courbe directrice une courbe fermée, une spirale C; cette courbe C coupera chacune des génératrices droites du cône en une infinité de points.

Désignons par $n$, $n'$, $n''$, $n'''$,..... les points en lesquels une génératrice droite G du cône $\Sigma$ est coupée par la spirale C.

Construisons le plan $\Theta$ tangent au cône $\Sigma$ le long de la génératrice G.

Menons un plan N perpendiculaire à G et coupant cette droite en un point $p$.

Projetons la spirale C sur le plan N, suivant une courbe C".

Cela posé :

Tous les points $n$, $n'$, $n''$,.... se projetteront sur le plan N en un seul et même point qui ne sera autre que le point $p$.

Et la courbe C" sera évidemment formée d'une infinité de *spires* passant toutes par le point $p$, et les diverses tangentes en $n$, $n'$, $n''$,..... à la courbe C se projetteront en une seule et même droite $t$ qui sera la tangente commune en $p$ à toutes les *spires* de la courbe plane C".

Une courbe plane peut donc offrir un point *multiple* tel que toutes les branches dont cette courbe se compose aient en ce point même tangente.

On donne à ce point le nom de *point multiple de deuxième espèce* (*fig.* 132).

On peut parvenir à une courbe plane offrant un point multiple, par une autre considération :

1° Concevons deux cylindres ayant chacun pour section droite une courbe fermée, et se coupant suivant une courbe C *d'arrachement*. On pourra faire rouler sur cette courbe C un plan tangent P à cette courbe et ayant avec elle deux points de contact $p$ et $q$ situés à distance finie l'un de l'autre.

La droite G qui unira les points $p$ et $q$ sera une des génératrices droites de la surface développable engendrée par le plan P.

Si l'on projette la courbe C sur un plan N perpendiculaire à G, on aura une courbe C", et les deux points $p$ et $q$ se projetteront en un seul et même point $r$ sur la courbe C", et les tangentes en $p$ et $q$ à la courbe C se projetteront en une seule et même droite $\theta$ tangente à C" au point $r$. On obtiendra ainsi une courbe plane ayant un *point multiple de deuxième espèce*.

2° Au lieu de faire rouler un plan P sur la courbe C, on peut prendre deux points arbitraires $m$ et $n$ sur la courbe C, et tels que la tangente en $n$ et la tangente en $m$ ne soient pas situées dans un même plan.

Projetant la courbe C sur un plan N perpendiculaire à la droite D qui unit les points $m$ et $n$, on aura une courbe plane C"; les deux points $m$ et $n$ se projetteront en un seul et même point $r$, et les tangentes en $m$ et $n$ se projetteront suivant deux droites $\theta$ et $\theta'$ qui se croiseront au point $r$ et seront respectivement tangentes aux deux branches de la courbe C" qui se croisent au point $r$. On obtiendra ainsi une courbe plane ayant un *point multiple de première espèce*.

Lorsque l'on construit l'*épure* de ces projections, on donne ordinairement à ces points le nom de *nœuds de deuxième ou de première espèce*.

*Des points pour lesquels le rayon de courbure peut être nul ou infini.*

Étant donnée une courbe C à double courbure, construisons pour un de ses points $m$ le plan osculateur O, et traçons dans ce plan O le cercle osculateur Γ en $m$ à la courbe C.

Désignons par $\rho$ le rayon du cercle $\Gamma$ et par $\theta$ la tangente en $m$ à la courbe C. Cela posé :

Menons par $\rho$ un plan M perpendiculaire à la tangente $\theta$ et par $\theta$ un plan T perpendiculaire au rayon de courbure $\rho$.

Projetons orthogonalement la courbe C sur les trois plans O, N et T, et désignons ces projections par $C^o$, $C^n$ et $C^t$.

Examinons maintenant ce que doivent être les rayons de courbure des trois courbes planes $C^o$, $C^n$, $C^t$ au point $m$.

Il est évident que pour le point $m$ le rayon de courbure de la courbe $C^o$ n'est autre que $\rho$, puisque le cercle $\Gamma$ et cette courbe $C^o$ ont en commun avec la courbe C trois points successifs $m$, $m'$, $m''$.

Mais pour les courbes planes $C^n$ et $C^t$ le rayon de courbure au point $m$ n'aura pas une valeur *finie*, il sera toujours *infini* pour la courbe $C^n$, et pour la courbe $C^t$ il pourra être *nul*, *fini* ou *infini*.

Et en effet :

Concevons dans l'espace un cercle $\Gamma$ du rayon $\rho$, et tel que son plan oblique, par rapport à un plan P, fasse avec ce plan P un angle $\alpha$.

Le cercle $\Gamma$ se projettera sur le plan P suivant une ellipse E, dont le demi-grand axe sera égal à $\rho$ et dont le demi-petit axe sera égal à : $\rho \cos \alpha$.

L'expression analytique du rayon de courbure $\delta$ pour le sommet de l'ellipse E qui est à l'extrémité de son grand axe sera (*) :

$$\delta = \rho \cos^2 \alpha$$

Et l'expression analytique du rayon de courbure $\delta'$ pour le sommet de l'ellipse E qui est à l'extrémité du petit axe sera :

$$\delta' = \frac{\rho}{\cos \alpha}$$

Si l'angle $\alpha$ est nul, on aura : $\cos \alpha = 1$ ; et dès lors on aura :

$$\delta = \delta' = \rho$$

(*) *Voyez* mon mémoire de géométrie descriptive qui a pour titre : *Sur la construction du rayon de courbure en un point d'une section conique*, dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, publié par M. Liouville ; avril 1839. *Voyez* aussi le Bulletin de la *Société philomatique de Paris*, séance du 5 mai 1838.

Si l'angle $\alpha$ est droit, on aura : $\cos\alpha = 0$ ; et dès lors on aura :

$$\delta' = \frac{1}{0} \quad \text{et} \quad \delta = 0$$

Par conséquent, si l'on considère, en même temps, un point $m$ sur le cercle $\Gamma$ et le diamètre $2\rho$ de ce cercle $\Gamma$ passant par le point $m$ et la tangente $\theta$ au point $m$ de ce cercle $\Gamma$, on voit :

1° Que le cercle $\Gamma$ se projettera sur le plan N ( passant par $\rho$ et perpendiculaire à $\theta$) sur le rayon de courbure $\rho$ prolongé ;

2° Que le cercle $\Gamma$ se projettera sur le plan T ( passant par $\theta$ et perpendiculaire à $\rho$) sur la tangente $\theta$ prolongée.

Et en vertu de ce qui précède, le rayon de courbure $\delta'$ au point $m$ de la projection $\theta$ du cercle $\Gamma$ sera *infini* pour cette projection.

Et le rayon de courbure $\delta$ au point $m$ de la projection $2\rho$ du cercle $\Gamma$ sera *nul* pour cette projection, si le rayon de courbure $\rho$ est la normale en $m$, à la projection $C^n$.

Plus loin nous démontrerons que si la courbe à double courbure C est projetée sur le plan normal N suivant une courbe $C^n$ ayant le rayon de courbure $\rho$ pour tangente et non pour normale, alors au point $m$ la courbe $C^n$ peut avoir un rayon de courbure *nul* ou *fini* ou *infini*.

Ainsi, nous verrons plus loin que le rayon de courbure peut être *nul* au point $m$ de la courbe $C^n$, mais il est démontré qu'il est *infini* au point $m$ de la courbe $C^t$.

Il existe donc des courbes planes qui peuvent présenter dan leurs cours, des points *singuliers* tels que pour les uns le rayon de courbure est *nul* et que pour les autres le rayon de courbure est *infini*.

Il nous reste à examiner, quelle relation de position il doit exister avant et après le point singulier, entre la courbe et sa tangente en ce point, ou entre la courbe et sa normale en ce même point.

III. *Du point d'inflexion double.*

Imaginons un cylindre ayant pour section droite une courbe telle qu'en chacun de ses points le rayon de courbure a une longueur *finie ;* en d'autres termes telle qu'en aucun de ses points le rayon de courbure ne soit *nul* ou *infini*.

Traçons sur ce cylindre une hélice C et en un point $m$ de cette courbe C construisons le plan osculateur O, le plan normal N et le plan T perpendiculaire à la fois aux deux plans O et N, et passant par la tangente en $m$ à la courbe C.

En construisant la projection de la courbe C sur le plan T, on reconnaît que la courbe $C^t$ est divisée au point $m$ en deux arcs, tel que l'un est à droite au-des-

sous de la tangente $\theta$ et que l'autre est à gauche au-dessus de la tangente $\theta$, ou *vise versâ* suivant le sens du *rampant* de l'hélice C.

Et en vertu de ce qui a été dit, ci-dessus, la courbe plane C$^{r}$ a au point *m* un rayon de courbure infini.

On donne au point *m*, dans ce cas, le nom de point d'*inflexion double*.

Ainsi, une courbe plane peut présenter dans son cours un point d'*inflexion double* (*fig.* 133).

IV. *Du point méplat.*

On sait qu'une surface de révolution a pour lignes de courbure ses parallèles et ses méridiens.

On sait que si par la normale en un point *m* d'une surface de révolution, on mène deux plans rectangulaires entre eux, l'un étant le plan méridien, les rayons de courbure maximum et minimum de la surface en ce point *m* sont le rayon de courbure de la courbe méridienne pour le point *m* et la partie de la normale, à la surface de révolution, comprise entre l'axe de rotation et le point *m*.

Et ces rayons de courbure sont ceux des sections principales données dans la surface par ces deux plans normaux et rectangulaires entre eux.

On peut toujours prendre une courbe méridienne telle qu'en un de ses points *m*, la normale soit parallèle à l'axe de révolution; le plan normal qui passera par cette normale et sera perpendiculaire au plan de cette courbe méridienne, coupera dès lors la surface de révolution suivant une courbe C qui aura pour le point *m* un rayon de courbure *infini*; et il est évident que cette courbe C sera située, avant et après le point *m*, au-dessus ou au-dessous de sa tangente $\theta$ en ce point *m*, en un mot du même côté de cette tangente $\theta$. On donne, dans ce cas, au point *m*, le nom de point *méplat*.

Ainsi, d'après ce qui précède, une courbe plane peut présenter dans son cours un point *méplat* (*fig.* 134).

V. *Point de rebroussement de première espèce.*

1° Traçons dans le plan O une courbe C$^{o}$ ayant pour tangente au point *m* la droite $\theta$ et un rayon de courbure égal à $\rho$ pour ce point *m*.

Traçons dans le plan T une courbe C$^{r}$ ayant $\theta$ pour tangente au point *m* et ayant en ce point *m* un point d'*inflexion double*.

Supposons que la courbe C$^{o}$ n'offre aucun point singulier et qu'elle est avant et après le point *m* située d'un même côté par rapport à sa tangente $\theta$ (*fig.* 135, 136 et 137).

Rappelons-nous que les trois plans O, N et T se coupent deux à deux, O et N

suivant le rayon de courbure $\rho$, O et T suivant la tangente $\theta$, et N et T suivant une droite Z.

Prenons la droite $\theta$ pour axe des $x$, le rayon $\rho$ pour axe des $y$ et la droite Z pour axe des $z$.

Les courbes C' et C° auront pour axe des $x$ la droite $\theta$, et alors il pourra arriver deux cas, car les $z$ de la courbe C' peuvent être supposés, croître plus vite ou moins vite que les $y$ de la courbe C°.

Concevons deux cylindres ayant respectivement pour section droite les courbes C° et C', ces deux cylindres se couperont suivant une courbe à double courbure C qui pour le point $m$ aura un rayon de courbure *fini*, en d'autres termes le rayon de courbure de la courbe C ne sera ni *nul* ni *infini* pour le point $m$, puisque le plan O sera osculateur en $m$ à la courbe C et que le rayon de cette courbe C sera égal à $\rho$, puisque cette courbe C a deux éléments rectilignes successifs en commun avec la courbe C°; en projetant cette courbe C sur le plan N, nous aurons une courbe plane C".

Maintenant si les $z$ de la courbe C' croissent plus vite que les $y$ de la courbe C°, les $z$ de la courbe C" croîtront plus vite que les $y$ de cette courbe C"; dès lors la courbe C" tournera sa *convexité* vers la droite $\rho$ ou axe des $y$.

Cette courbe C" sera donc composée de deux branches placées l'une en dessus et l'autre en dessous de $\rho$, ainsi que l'indique la (*fig.* 135). On donne à ce point le nom de point de *rebroussement de première espèce.*

Ainsi, d'après ce qui a été dit ci-dessus, une courbe plane peut présenter dans son cours un *point de rebroussement de première espèce.*

Si les $z$ de la courbe C' croissent moins vite que les $y$ de la courbe C°, les $z$ de la courbe C" croîtront moins vite que les $y$ de cette courbe C"; dès lors, la courbe C" tournera sa *concavité* vers la droite $\rho$ ou axe des $y$.

Cette courbe C" sera donc composée de deux branches placées l'une en dessus et l'autre au-dessous de $\rho$, ainsi que l'indique la (*fig.* 138).

Mais dans ce cas comme dans le précédent, la normale $\rho$ à la courbe à double courbure C, se projette sur le plan N suivant une tangente à la courbe C" pour le point $m$, puisque la courbe C a deux éléments rectilignes successifs situés dans le plan osculateur O et que le plan N est perpendiculaire au premier de ces deux éléments rectilignes.

Le rôle de la droite $\rho$ est donc interverti quand on considère alternativement les courbes C° et C", puisque la droite $\rho$ est normale au point $m$ à la courbe C° et qu'elle est tangente au point $m$ à la courbe C".

Tandis que la droite Z est toujours normale au point $m$, soit à la courbe C° soit à la courbe C".

Le rayon de courbure pour une courbe plane doit toujours être compté sur sa normale; le rayon de courbure pour le point $m$ de la courbe $C^{n}$ devra donc être compté sur la droite Z et non sur la droite $\rho$.

En sorte que dans ce cas la méthode des projections est en défaut.

D'après ce qui vient d'être dit, la valeur du rayon de courbure pour le point $m$ de la courbe $C^{n}$, dépendra donc de la manière d'être, ou, en d'autres termes, de la relation de position qui existera entre les points successifs de la courbe C après le point $m''$ et les points successifs de la courbe C avant le point $m$, désignant par $m$, $m'$, $m''$, les points successifs de la courbe C situés dans son plan osculateur O.

Ainsi pour le point de *rebroussement de première espèce* la courbe plane $C^{n}$ peut présenter deux formes: 1° elle peut tourner sa *convexité* vers la tangente $\rho$ au point $m$, et continuer à tourner sa *convexité* après le point $m$, ou 2° elle peut, peu après le point $m$, tourner sa *concavité* du côté de la tangente $\rho$ au point $m$, de telle sorte qu'en passant du point $m$ à un point situé à distance finie, la courbe $C^{n}$ aura plus ou moins près du point $m$ changé de direction et se sera infléchie, de manière à tourner sa *concavité* vers la droite $\rho$ après avoir pendant un trajet plus ou moins court tourné sa *convexité* vers cette droite $\rho$ (puisque cette droite $\rho$ est la tangente au point $m$ de cette courbe $C^{n}$).

VI. *Point de rebroussement de deuxième espèce.*

2° Traçons dans le plan O une courbe $C^{o}$ ayant pour tangente au point $m$ la droite $\theta$ et un rayon de courbure égal à $\rho$.

Traçons dans le plan T une courbe $C^{t}$ ayant $\theta$ pour tangente au point $m$ et ayant en ce point un point *méplat*.

Supposons que la courbe $C^{o}$ n'offre aucun point singulier dans son cours et qu'elle est avant et après le point $m$ située d'un même côté par rapport à sa tangente $\theta$ (*fig.* 136 et 137).

Concevons deux cylindres ayant respectivement pour section droite les courbes $C^{o}$ et $C^{t}$; ces deux cylindres se couperont suivant une courbe C à double courbure et qui n'offrira aucune particularité au point $m$; cette courbe C aura évidemment le plan O pour plan osculateur au point $m$, et son rayon de courbure en $m$ sera égal à $\rho$.

Projetons cette courbe C sur le plan N, nous aurons une courbe $C^{n}$, qui, en vertu de ce qui a été ci-dessus, aura pour tangente au point $m$ la droite $\rho$ et pour normale la droite Z.

De plus, il est évident que la courbe $C^{n}$ sera composée de deux branches

réunies en $m$ et toutes deux situées d'un même côté par rapport à la droite $\rho$ (*fig.* 136 et 137.).

Il pourra arriver deux cas.

Les $z$ de la courbe C'' pourront croître plus vite que les $y$ de la courbe C°, ou bien croître moins vite.

Dans le premier cas, la courbe C'' tournera sa *convexité* vers la droite $\rho$ (*fig.* 137).

Dans le deuxième cas, la courbe C'' tournera d'abord sa *convexité* vers la droite $\rho$, pour très-peu après le point $m$ tourner sa *concavité* vers cette droite $\rho$; il y aura donc après le point $m$ un changement de direction.

Dans les deux cas on donne au point $m$ le nom de point de *rebroussement de deuxième espèce*.

Ainsi, d'après ce qui vient d'être dit, une courbe plane peut présenter dans son cours un *point de rebroussement de deuxième espèce*.

VII. *Point d'inflexion simple.*

3° Traçons dans le plan O une courbe C° ayant au point $m$, la droite $\theta$ pour tangente et ayant en ce point $m$ un point d'*inflexion double*.

Traçons dans le plan T une courbe C'' ayant au point $m$ la droite $\theta$ pour tangente et ayant en ce point $m$ un point d'*inflexion double*.

Concevons deux cylindres ayant respectivement pour section droite les courbes C° et C''; ces deux cylindres se couperont suivant une courbe à double courbure C qui aura au point $m$ un rayon de courbure *infini*.

Car il est évident que la droite $\theta$ est tangente commune au point $m$ aux trois courbes C, C°, C'', et qu'en ce point $m$ cette tangente $\theta$ a un contact du deuxième ordre avec chacune de ces trois courbes.

Projetons cette courbe C sur le plan N, on aura une courbe C'' qui aura au point $m$ un rayon de courbure nul et qui sera située avant le point $m$ au-dessus ou au-dessous de la droite $\rho$ et après le point $m$ au-dessous ou au-dessus de cette droite $\rho$.

Si pour la courbe C'' les $z$ croissent plus vite que les $y$, cette courbe C'' tournera sa *convexité* vers $\rho$.

Si pour la courbe C'', les $z$ croissent moins vite que les $y$, cette courbe C'' tournera sa *concavité* vers $\rho$, et cela très-peu après le point $m$.

Dans le premier cas, la droite $\rho$ sera la tangente de C'' au point $m$ (*fig.* 139).

Dans le deuxième cas, la droite $\rho$ sera encore la tangente de C'' au point $m$ (*fig.* 140).

Dans l'un et l'autre cas, le point $m$ sera dit : point d'*inflexion simple*.

D'après ce qui précède une courbe plane peut présenter dans son cours, un point d'*inflexion simple*.

VIII. *Point aigu.*

4° Traçons dans le plan O une courbe C° ayant au point *m* la droite θ pour tangente et ayant en ce point un point *méplat.*

Traçons dans le plan T une courbe C' ayant au point *m* la droite θ pour tangente et ayant en ce point *m* un point d'*inflexion double.*

Concevons deux cylindres ayant respectivement pour section droite les courbes C° et C', ces deux cylindres se couperont suivant une courbe à double courbure C qui aura au point *m* un rayon de courbure *infini*, puisqu'elle aura en *m* un contact du second ordre avec sa tangente θ.

Projetons cette courbe C sur le plan N, on aura une courbe C" qui sera située avant le point *m* au-dessus ou au-dessous de la droite ρ et après le point *m* au-dessous ou au-dessus de cette droite ρ, ainsi que l'indiquent les (*fig.* 141 et 142).

La courbe C" présentera en *m* un point auquel on a donné le nom de point *aigu* (*fig.* 142), lorsque la courbe C" tourne sa *concavité* vers la droite ρ; et l'on retombe sur le point de *rebroussement de première espèce* si la courbe C" tourne sa *convexité* vers la droite ρ (*fig.* 141).

Et il est évident que l'on aura l'une ou l'autre des formes 141 et 142, suivant que les *z* de la courbe C' croîtront plus ou moins vite que les *y* de la courbe C°.

D'après ce qui précède une courbe plane peut présenter dans son cours un point *aigu*.

Mais en prenant pour les courbes C° et C' des courbes qui au point *m* ont un contact du second ordre, comme ces courbes sont au nombre de deux, quant à la forme, il sera possible de faire trois combinaisons.

*Première combinaison :*

La courbe C° ayant un point *d'inflexion simple.*
— C' ayant un point *d'inflexion double.*
— C" aura un point *d'inflexion simple.*

*Deuxième combinaison :*

La courbe C° ayant un point *méplat.*
— C' ayant un point *d'inflexion double.*
— C" aura un point *aigu* ou un point de *rebroussement de première espèce.*

*Troisième combinaison :*

La courbe C° ayant un point *méplat.*
— C' ayant un point *méplat.*
— C" aura un point de *rebroussement de seconde espèce.*

Par la combinaison des courbes qui ont un contact du second ordre avec leur tangente, on peut avoir quatre espèces de points singuliers.

Et remarquons que pour le point $m$ le cercle osculateur à la courbe $C^v$ comme à la courbe $C^r$ a un rayon de courbure infini, ou, en d'autres termes, que ce cercle osculateur n'est autre que la tangente $\theta$.

Or, cette droite $\theta$ se projette en entier sur le plan N en le point $m$, de sorte qu'*à la première vue* on ne peut dire si les droites $\rho$ et Z sont forcément la première tangente et la seconde normale en $m$ à la courbe $C^v$, car pour le point $m$, la courbe $C^v$, tout comme la courbe $C^r$, tout comme la courbe à double courbure C, ont une infinité de plans R osculateurs (puisque tout plan passant par la tangente $\theta$, peut être considéré et rigoureusement, comme un plan osculateur des courbes $C^v$, $C^r$, et C); mais si l'on prend le plan $O_v$ passant par les quatre points successifs $m$, $m'$, $m''$, $m'''$ de la courbe C, ce plan $O_v$ sera le véritable plan osculateur et l'on voit que la droite $\rho$ sera la tangente à la courbe $C^v$ pour le point $m$; le plan $O^v$ sera, entre tous les plans R, celui qui approche le plus près de la courbe C.

Par conséquent, le point $m$ étant complètement la projection du cercle osculateur $\theta$ et ce cercle (ou droite $\theta$) ayant une infinité de rayons de courbure, et tous infinis et dirigés suivant les diverses normales à cette droite $\theta$, il s'ensuivra que pour le point $m$ le rayon de courbure de la courbe $C^v$ sera *nul*.

Ainsi, pour le point d'*inflexion simple* et pour le point *aigu*, existant sur une courbe plane, le rayon de courbure de cette courbe est *nul*.

Et pour certains points de *rebroussement* de première et de deuxième espèce, le rayon de courbure peut être *nul*.

En combinant maintenant deux à deux les quatre espèces de courbes $C^v$, et $C^r$ qui ont un rayon de courbure *nul* à leur point singulier $m$, on retombera sur des courbes $C^v$ qui seront du même genre et auront aussi un rayon de courbure *nul* au point $m$.

IX. *Du point d'arrêt.*

Nous avons vu que lorsque l'on projetait une courbe à double courbure C sur un plan N perpendiculaire à l'une de ses tangentes $\theta$, la courbe $C^v$ passait par le point en lequel le plan N coupait la droite $\theta$, et que la courbe $C^v$ ne s'arrêtait pas brusquement en ce point, mais cheminait après être arrivée en ce point, ou en présentant une *inflexion* ou en présentant un *rebroussement*, ou en présentant un point *aigu*.

Si l'on conçoit une courbe à double courbure C formée d'une seule branche infinie et ayant une asymptote A, et que l'on projette cette courbe C sur un plan N perpendiculaire à la droite A, sa projection $C^v$ passera par le point $r$ en lequel

le plan N coupe l'asymptote A, et il est évident que la courbe $C^v$ ne pourra pas aller au delà du point $r$, puisque ce point $r$ est la projection du point de la courbe C situé à l'infini et sur cette courbe C et son asymptote A.

A la première vue, il semblerait que la courbe $C^v$ a en effet un point d'arrêt au point $r$.

Pour que le point d'arrêt existe réellement au point $r$, il faut que la courbe C soit telle que la supposant divisée en deux arcs infinis à droite et à gauche d'un point $x$, son asymptote A ne soit asymptote qu'à l'un de ces deux arcs et non à tous les deux.

Or, la géométrie descriptive ne peut nous conduire à trouver des courbes à double courbure jouissant de cette propriété par rapport à son asymptote, à moins que nous ne présupposions l'existence du point d'arrêt.

Et en effet : concevons deux cônes Δ et $Δ_1$ ayant pour sommet, le premier un point $s$ et le second un point $s_1$ et pour base sur le plan horizontal de projection, le premier une courbe B et le second une courbe $B_1$.

Nous pouvons toujours prendre pour B et $B_1$, une courbe composée d'une seule branche infinie, et ainsi une parabole par exemple.

Lorsque l'on transportera le cône $Δ_1$ parallèlement à lui-même pour superposer les sommets $s$ et $s_1$, et que ce cône aura pris la position $Δ_2$ en laquelle il a même sommet avec le cône Δ resté immobile, ce cône $Δ_2$ sera coupé par le plan horizontal suivant une courbe $B_2$ semblable et semblablement placée par rapport à la courbe $B_1$, le pôle de similitude étant le point $p$ en lequel la droite $\overline{ss_1}$ coupe le plan horizontal.

Évidemment on pourra toujours s'arranger de manière à ce que les deux courbes B et $B_2$ ne se coupent qu'en un seul point $x$ qui, lorsque le cône $Δ_2$ reprendra la position $Δ_1$, viendra se placer en $x_1$ sur la base $B_1$.

Dès lors les génératrices $\overline{sx}$ et $\overline{s_1x_1}$ seront parallèles, et les deux plans tangents menés aux cônes Δ et $Δ_1$ suivant ces génératrices se couperont suivant une droite A qui sera l'asymptote de la courbe à double courbure C intersection des deux cônes, et cette courbe C sera composée d'une seule branche infinie.

Or, en construisant l'*épure* des projections de la courbe C sur un plan perpendiculaire à l'asymptote A, on voit que cette courbe C doit affecter et ne peut affecter que les deux formes indiquées (*fig.* 143 et 144), c'est-à-dire que la droite A est toujours asymptote aux deux arcs infinis qui composent la branche infinie et qu'elle ne peut pas être asymptote à l'un des arcs seulement.

Pour que la droite A pût n'être asymptote qu'à l'un des arcs infinis de la courbe C, il faudrait que l'une des bases B ou $B_1$ eût un point *d'arrêt* précisément au point $x$ ou $x_1$.

Nous ne pouvons donc pas, par la *géométrie descriptive*, rendre compte de l'existence ou de la non-existence du point *d'arrêt* dans les courbes planes, l'*analyse* peut seule apprendre s'il existe en effet des courbes qui jouissent de la propriété d'avoir un point *d'arrêt.*

Mais si l'*analyse* le dit, on peut par la *géométrie descriptive* conclure qu'il existe des courbes composées d'une seule branche infinie qui ont une asymptote qui n'est asymptote qu'à l'un des deux arcs infinis qui forment la branche infinie et unique de cette courbe.

Et *vice versâ* si l'*analyse* nous apprend qu'il existe des courbes composées d'une seule branche infinie pour lesquelles l'asymptote n'est asymptote que d'un seul côté, la *géométrie descriptive* nous permet de conclure aussitôt qu'il existe dès lors des courbes planes qui ont un point *d'arrêt.*

La courbe à double courbure $C$, formée d'une seule branche infinie et ayant une asymptote $A$ à cette branche infinie, a pour chacun de ses deux points situés à l'infini un plan osculateur passant par l'asymptote $A$, le rayon de courbure pour chacun de ces deux points sera perpendiculaire à l'asymptote $A$.

Le cercle osculateur pour chacun de ces deux points se projettera dès lors sur le plan $N$, perpendiculaire à la droite $A$, suivant une droite.

Or, chaque plan osculateur se projettera sur le plan $N$ suivant une droite $\theta$, tangente à la courbe $C^n$ au point $r$ qui est le point en lequel le plan $N$ coupe l'asymptote $A$ de la courbe à double courbure $C$.

On aura donc en ce point $r$ deux tangentes successives $\theta$ et $\theta'$ à la courbe $C^n$.

Or, le rayon de courbure ne pouvant être porté sur la tangente, mais devant l'être sur la normale à la courbe, la méthode des projections se trouve en défaut. Ainsi jusqu'à présent nous ne pouvons dire autre chose sinon que la courbe $C$ se projette sur le plan $N$ suivant une courbe fermée $C^n$, ou, *en d'autres termes*, suivant une courbe $C^n$ qui vient se fermer au point $r$ (*).

X. *Des points isolés.*

Concevons deux surfaces gauches, l'une $\Sigma$ engendrée par une droite $G$ se mouvant dans l'espace en s'appuyant sur deux courbes $C$ et $B$ et sur une droite $K$, l'autre $\Sigma_1$ engendrée par une droite $G_1$ se mouvant dans l'espace sur deux courbes $C_1$ et $B_1$ et sur la même droite $K$.

---

(*) Nous démontrerons à la fin du § IV de ce chapitre VII que la courbe $C^n$ a pour le point $r$ un rayon de courbe qui est *nul*; la courbe $C^n$ présentant en ce point ou un point *aigu* ou un point d'*inflexion simple* ou un point de *rebroussement*.

Ces deux surfaces se couperont suivant une courbe D et leur intersection se trouvera dès lors composée de la droite K et de la courbe D.

Si l'on projette le système (D, K) sur un plan N perpendiculaire à la droite K, l'on aura une courbe D" et un point *a* section de la droite K par le plan N.

Le point *a* sera lié à la courbe D", comme la droite K l'était à la courbe D, et l'on dira que le point *a* est un point *isolé*.

La géométrie descriptive ne peut pas concevoir autrement l'existence du point *isolé*.

Les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ pourraient tout en restant des surfaces gauches avoir deux directrices droites communes K et K' et une troisième directrice différente C pour la surface $\Sigma$ et $C_1$ pour la surface $\Sigma_1$. Mais, tant que les surfaces $\Sigma$ et $\Sigma_1$ seront des surfaces réglées, les deux directrices droites K et K' ne pourront pas être parallèles.

Mais on peut concevoir deux surfaces courbes $\Sigma$ et $\Sigma_1$ engendrées par une courbe mobile et variable de forme et se mouvant sur plusieurs droites parallèles K, K', K",..... et sur des courbes C, C', C".

Si les droites sont des *directrices* communes à l'une et à l'autre surface, les *directrices* courbes étant différentes pour chacune de ces surfaces, on aura une intersection composée des directrices droites et d'une courbe D.

Et dès lors en projetant la courbe D sur un plan perpendiculaire aux droites parallèles K, K', K",..... on aura autant de points *isolés* qu'il y avait de directrices droites parallèles entre elles.

XI. *Du point asymptote.*

Concevons un cylindre $\Sigma$ ayant pour section droite une courbe fermée, traçons sur ce cylindre $\Sigma$ une hélice E; prenons dans l'espace un point arbitraire *s* et regardons ce point *s* comme le sommet d'un cône $\Delta$ ayant la courbe E pour *directrice*.

Il est évident que le cône $\Delta$ aura une de ses génératrices parallèles aux génératrices droites du cylindre $\Sigma$, et cette génératrice G passera par les points de la courbe E qui sont situés à l'infini; coupons le cône $\Delta$ par un plan N perpendiculaire à G; ce plan N donnera pour section dans le cône une courbe C et coupera la droite G en un point *o*.

Et il est évident que la courbe C circulera autour du point *o* en s'en rapprochant sans cesse, pour ne l'atteindre qu'après avoir fait un nombre infini de circonvolutions.

Le point *o* est dit point *asymptote* de la courbe plane C.

Une courbe plane peut au lieu d'un *point-asymptote* avoir une *courbe-asymptote*, qui sera une courbe fermée.

Et en effet :

Prenons un axe A et un cylindre Σ à section droite fermée et ayant ses génératrices parallèles à l'axe A.

Traçons sur le cylindre Σ une hélice E.

Concevons dans l'espace une surface quelconque Δ, mais telle que le cylindre J, qui lui sera tangent et dont les génératrices seront parallèles à l'axe A, ait pour section droite une courbe fermée.

Cela posé :

Menons par l'axe A un plan M, ce plan coupera la surface Δ suivant une courbe C, et le cylindre Σ suivant un nombre fini de génératrices droites G, G′, G″,.... chacune de ces génératrices G, G′,.... coupera l'hélice en un nombre infini de points, et chacune d'elles contiendra deux points de l'hélice situés à l'infini; car on conçoit que l'hélice E coupe à l'infini toutes les génératrices du cylindre Σ.

Dès lors, si l'on conçoit une surface réglée B engendrée par une droite D se mouvant dans l'espace en s'appuyant sur l'axe A, sur l'hélice E et tangentiellement à la surface Δ, on voit que dans le plan M on aura une infinité de génératrices droites D de la surface B, lesquelles seront tangentes à la courbe C et passeront respectivement par les points de l'hélice E situés dans le plan M.

Parmi toutes ces génératrices droites D, il y en aura une qui sera parallèle aux génératrices droites du cylindre Σ, et ce sera celle qui passera par les points situés à l'infini sur l'hélice E.

On voit donc que si l'on conçoit un cylindre J tangent à la surface Δ et dont les génératrices soient parallèles à l'axe A, un plan N perpendiculaire à l'axe A coupera ce cylindre J suivant une courbe δ et la surface réglée B suivant une courbe X qui sera telle qu'elle tournera indéfiniment autour de la courbe δ pour lui devenir tangente.

La courbe δ est dite *courbe asymptote* de la courbe X.

La géométrie descriptive peut encore nous faire concevoir d'une autre manière l'existence des courbes asymptotes.

Et en effet :

Concevons un cône Δ tel que la sphère Z, qui aura pour centre le sommet *s* de ce cône Δ, coupe ce cône suivant une courbe à double courbure et fermée δ.

Traçons sur ce cône Δ une hélice ou une courbe rampante E; prenons dans l'intérieur du cône Δ un point arbitraire *m*, et regardons ce point comme le sommet d'un cône $\Delta_1$ parallèle au cône Δ.

Les deux cônes Δ et $\Delta_1$ se couperont suivant deux courbes, l'une située à

distance finie et l'autre située à l'infini, et sur laquelle sera placé le point de la courbe E situé à l'infini.

Dès lors, si l'on regarde le point $m$ comme le sommet d'un cône $\Sigma$ ayant la courbe E pour *directrice*, la sphère Z coupera le cône $\Delta$, suivant une courbe fermée $\delta$, et le cône $\Sigma$ suivant une courbe à double courbure X; et les deux courbes X et $\delta$, seront telles l'une par rapport à l'autre que la courbe X tournera sur la sphère Z autour de la courbe $\delta$, en l'enveloppant par un nombre infini de circumvolutions sans pouvoir atteindre cette courbe $\delta$, qui sera alors dite : *asymptote* de la courbe X.

## § III.

### *Des points singuliers de la développée d'une courbe plane.*

Lorsque l'on a une courbe C à simple ou à double courbure, on part toujours d'un point $m$ de cette courbe en marchant sur la courbe dans le même sens, et ainsi sur l'arc $m\delta$ par exemple (*fig.* 145).

Ainsi, on dit les points successifs et infiniment voisins $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,..... et les éléments rectilignes successifs $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$, $\overline{m''m'''}$,..... d'une courbe C. Mais on est souvent obligé de marcher sur cette courbe C et à partir d'un point $m'$ donné, d'abord sur l'arc $m\delta$ et ensuite en sens inverse, et dès lors sur l'arc $m\delta'$.

Si l'on ne considère que des *points* successifs sur la courbe C, on dira (en marchant dans un sens) : le point $m'$ de l'arc $\delta$ est le successif et infiniment voisin du point $m$, et l'on dira (en marchant en sens inverse) : le point $n'$ de l'arc $\delta'$ est le successif et infiniment voisin du point $m$.

Mais lorsque l'on considérera des tangentes ou des normales successives de la courbe C, on sera obligé de considérer non plus un point $m$ mais un élément rectiligne de cette courbe C et alors on devra dire : l'élément rectiligne de l'arc $\delta$ successif de l'élément rectiligne $\overline{mm'}$, qui sert de point de départ, est $\overline{m'm''}$; et l'élément rectiligne de l'arc $\delta'$ successif de l'élément rectiligne $\overline{mm'}$ est $\overline{mn'}$.

Par la même raison lorsque l'on considérera un plan osculateur ou le cercle osculateur, d'une courbe C, on devra considérer deux éléments rectilignes successifs ou un *élément curviligne* et alors on devra dire : l'élément *curviligne* de l'arc $\delta$ successif de l'élément *curviligne* $\overline{mm'm''}$ qui sert de point de départ est $\overline{m'm''m'''}$; et l'élément *curviligne* de l'arc $\delta'$ successif de l'élément curviligne $\overline{mm'm''}$ est $\overline{m'mn'}$.

Toutes fois on se rapèllera qu'on est convenu de dire, pour abréger le discours, *construire* : la tangente, la normale, le plan osculateur, le cercle osculateur, le rayon de courbure en un point $m$ d'une courbe C et que ce point $m$ est le premier

des points successifs et infiniment voisins que l'on doit considérer sur la courbe C, quel que soit le *sens* (ou la *direction*) suivant lequel on suppose que l'on marche sur cette courbe C à partir de ce point *m*. Et ce sera à partir de ce premier point *m* que nous considérerons les points successifs et infiniment voisins, que la théorie nous amène à employer dans la solution des problèmes que nous venons d'énoncer.

Cela posé :

Examinons les points singuliers que la développée d'une courbe plane peut présenter.

Et d'abord, d'après la théorie des infiniment petits précédemment exposée, établissons les relations qui existent entre la développée D d'une courbe plane C et cette courbe C.

*De la développée d'une courbe plane.*

Étant donnée une courbe plane C (*fig.* 145), imaginons ses normales successives et infiniment voisines N, N', N'', N''',.....

N et N' se couperont en un point $o$
N' et N'' . . . . . . . . . . . . . . . $o'$
N'' et N''' . . . . . . . . . . . . . . $o''$

Et ainsi de suite.

Puisque les normales sont successives, les points $o$, $o'$, $o''$,..... seront des points successifs et infiniment voisins qui détermineront une courbe D, pour laquelle les éléments rectilignes et successifs seront $\overline{oo'}$, $\overline{o'o''}$,.....

On doit donc conclure de là que les tangentes à la courbe D sont normales à la courbe C, et *vice versâ*.

On donne à la courbe D le nom de *développée* et à la courbe C le nom de *développante*.

On a donné, comme on le sait, le nom de développée à la courbe D, parce qu'en enroulant un fil sur cette courbe D et en le tendant suivant une tangente à cette courbe, un point du fil tendu décrit, pendant qu'on déroule le fil de dessus la courbe D, une courbe B qui coupe sous l'angle droit toutes les tangentes à cette courbe D.

C'est ce qui prouve qu'une développée plane peut avoir une infinité de développantes planes et tracées dans son plan.

La courbe D étant l'enveloppe des normales à la courbe C, et de plus la courbe D devant servir à tracer, à décrire la courbe C au moyen du fil enroulé sur elle, on voit de suite que les relations de *forme* et de *position* que C et D doivent avoir entre elles, sont celles indiquées par les (*fig.* 146 et 147).

Toutefois on doit remarquer, que si les rayons de courbure de la courbe C vont en grandissant pour les points successifs $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,..... on aura la forme indiquée (*fig.* 146).

Et que si au contraire les rayons de courbure vont en diminuant, on aura la forme indiquée (*fig.* 147).

En sorte que c'est toujours la même forme que l'on obtient en supposant qu'à partir d'un point $m$ de la courbe C, on marche sur cette courbe C à droite, auquel cas les rayons de courbure vont en diminuant ; ou à gauche, auquel cas les rayons de courbure vont en grandissant.

Cela posé :

Il est évident que lorsque l'on considérera sur la développante C une suite de points $m$, $m'$, $m''$,..... qui n'offriront aucune particularité, les points $o$, $o'$, $o''$,..... en lesquels la développée D sera touchée par les normales menées aux points $m$, $m'$, $m''$,..... à la courbe C, n'offriront aussi aucune particularité.

Mais, si en un point $m$, la courbe C offre un point singulier, la courbe D offrira-t-elle aussi un point singulier et en son point $o$ qui est le correspondant du point $m$?

Nous allons résoudre en détail cette question et ainsi qu'il suit :

1° *Le point* m *étant un sommet sur la courbe* C, *le point* o *sera sur la courbe* D *un point de rebroussement de première espèce.*

Le point $m$ étant un sommet sur la courbe C, les éléments rectilignes successifs $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$, $\overline{m''m'''}$, (*fig.* 150) de cette courbe appartiendront à son cercle osculateur T construit pour le point $m$.

En ce point $m$, et dans ce cas particulier (comme on l'a dit ci-dessus) le cercle osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe C.

Les trois normales successives N, N', N'' à la courbe C se coupent donc en un même point $o$ centre du cercle osculateur T.

La courbe C a donc en $m$ ses deux rayons de courbure, successifs et infiniment voisins, égaux.

La courbe C devant être décrite au moyen de sa développée D, cette développée D ne pourra évidemment offrir que les deux formes indiquées par les (*fig.* 148 et 149).

Si les rayons de courbure de la courbe C vont en diminuant de $m$ en $p$ et de $m$ en $p'$, on aura la forme donnée par la (*fig.* 149). Les arcs $oq$ et $oq'$ de la développée D serviront à décrire respectivement les arcs $mp$ et $mp'$ de la développante C.

Si les rayons de courbure de la courbe C vont en augmentant de $m$ en $p$ et de $m$ en $p'$, on aura la forme donnée par la (*fig.* 148), les arcs $oq$ et $oq'$ de la déve-

loppée serviront à décrire respectivement les arcs $mp$ et $mp'$ de la développante.

La développée D offrira donc en $o$ un point de *rebroussement de première espèce*.

2° *Le point* m *étant un point multiple de deuxième espèce sur la courbe* C, *la normale au point* m *de la courbe* C *aura autant de points de contact* (*séparés entre eux*) *avec la courbe* D, *qu'il y aura de branches de la courbe* C *passant par ce point* m.

Il suffit de jeter les yeux sur la (*fig.* 151).

3° *Lorsque le rayon de courbure de la courbe* C *est infini pour le point* m, *le point* o *de la courbe* D *est situé à l'infini et de plus cette courbe* D *a une asymptote en ce point* o *et qui n'est autre que la normale à la courbe* C *pour le point* m.

Puisqu'un point de la développée est l'intersection de deux normales successives de la développante, la développée aura un point situé à l'infini toutes les fois que deux normales successives de la développante seront parallèles.

Lors donc que la développante C (*fig.* 152) aura au point $m$ un rayon de courbure infini, auquel cas le cercle osculateur ne sera autre pour le point $m$ que la tangente $\theta$ en ce point $m$, les deux éléments rectilignes successifs $mm'$ et $m'm''$ seront en ligne droite et dès lors les deux normales successives N et N' seront parallèles.

Le point $o$ de la développée D correspondant au point $m$ de la développante C, sera donc dans ce cas situé à l'infini.

Et comme les normales à la développante sont tangentes à la développée, il s'en suit que la normale au point $m$ de la développante C sera une asymptote à la développée D.

Ainsi : 1° lorsque la courbe C aura un point *méplat* au point $m$, la développée D aura la forme indiquée (*fig.* 153).

Et 2° lorsque la courbe C aura un point d'*inflexion double* au point $m$, la développée D aura la forme indiquée (*fig.* 154).

Dans le premier cas, la courbe D sera composée de deux branches infinies ayant même asymptote N, et le point situé à l'infini sur l'une et l'autre branche qui composent la développée D sera le même.

Dans le deuxième cas, les deux branches de la courbe D auront leur point situé à l'infini, placé l'un à droite et l'autre à gauche de la tangente $\theta$.

Toutes les fois qu'une courbe C offrira un point singulier $m$ pour lequel le rayon de courbure sera nul, il est évident que la développée D, de cette courbe C, passera par le point $m$.

Dès lors,

4° *Lorsque la courbe* C *a un point de rebroussement de première espèce en un point* m, *la courbe* D *offre en ce point* m *une forme convexe*.

5° *Lorsque la courbe* C *a un point de rebroussement de deuxième espèce en un point* m, *la courbe* D *offre en ce point* m, *un point de rebroussement de deuxième espèce.*

6° *Lorsque la courbe* C *a un point d'inflexion simple en un point* m, *la courbe* D *offre en ce point* m, *un point d'inflexion simple.*

Il suffit de jeter les yeux sur les (*fig.* 155, 156, 157).

Lorsqu'une courbe C est telle qu'elle a quatre sommets comme l'ellipse par exemple (*fig.* 158), alors la développée C offrira quatre points de rebroussement de première espèce.

Cette développée D, ayant une infinité de développantes, on peut (*fig.* 159) enrouler un fil sur la branche *om*, ce fil étant fixé au point *o* et en le déroulant le point *m* décrira la courbe *mc*; en enroulant le fil sur la branche *o m*, ce fil étant fixé au point *o'*, le point *m* en déroulant le fil décrira la courbe *mc'*.

Les deux arcs *mc* et *mc'* forment une même courbe CC' qui a pour développée la courbe BD', et l'on reproduit ainsi une courbe qui a au point *m* un point *aigu*.

Ainsi :

7° *Lorsque la courbe* C *a un point aigu en un point* m, *sa développée* D *passe par ce point* m *et offre en ce point* m *un point de rebroussement de première espèce.*

Il est évident d'après la construction de la développée et la manière dont la développée peut reproduire la développante, que si la développante a un point asymptote *m*, à ce point *m* correspondra sur la développée un point *o* situé à l'infini et lequel sera un point asymptote de la développée.

Ainsi :

8° *la développante* C *ayant un point asymptote situé à distance finie, la développée* D *a un point asymptote situé à l'infini.*

Nous avons vu précédemment que l'*analyse* seule pouvait démontrer l'existence pour certaines courbes planes, d'un point *d'arrêt*, et qu'on pouvait par la *géométrie descriptive* conclure de l'existence du point d'arrêt, l'existence de certaines courbes composée d'une branche infinie, ayant une asymptote à l'un des arcs seulement de cette branche. Or, l'on sait que l'*analyse* démontre que pour certaines courbes, il existe en effet un point *d'arrêt.*

En ce point d'*arrêt* la courbe pourra avoir un rayon de courbure *nul.* C'est ce que l'on peut démontrer par la méthode des projections.

Et en effet :

Concevons sur le plan horizontal deux courbes C et $C_1$ ayant un point d'arrêt, la première au point *m* et la seconde au point $m_1$, prenons dans l'espace deux points *s* et $s_1$ pour sommets de deux cônes ayant respectivement pour bases les courbes C et $C_1$.

Nous pourrons toujours prendre les points $s$ et $s_1$ dans une position telle que la droite qui les unit perce le plan horizontal en un point $p$ situé sur la droite qui unit les points $m$ et $m_1$.

Et telle encore qu'ayant transporté le cône $(s_1, C_1)$ parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son sommet $s_1$ coïncide avec le sommet $s$, la courbe intersection de la nouvelle position du cône $(s_1, C_1)$ par le plan horizontal soit une courbe $C_1$ passant par le point $m$ et ayant en ce point $m$ un point d'*arrêt*.

Dès lors, la courbe intersection des deux cônes $(s, C)$ et $(s, C_1)$ sera formée d'une seule branche B qui sera infini et qui aura une asymptote A, laquelle droite A ne sera asymptote qu'à l'un des deux arcs seulement qui forment la branche infinie B.

En projetant la courbe B sur un plan P perpendiculaire à l'asymptote A, on aura une courbe plane B' qui aura un point d'*arrêt*, et ce point sera celui en lequel le plan P coupe la droite A, et en ce point la courbe B' aura un rayon de courbure *nul* (*).

Dès lors :

9° *la développée* D, *d'une courbe plane* C *qui a un point d'arrêt* m *et qui a en ce point* m *un rayon de courbure nul, passe aussi par ce point* m *et a aussi en ce point* m *un point d'arrêt (fig. 160).*

Passons maintenant à la démonstration de l'existence, sur une courbe plane, des trois points singuliers, savoir : points 1° d'*arrêt*, 2° de *rebroussement de première espèce*, 3° de *rebroussement de deuxième espèce*, pour lesquels le rayon de courbure est *infini*.

XII. *Une courbe plane* C *peut avoir un point d'arrêt pour lequel le rayon de courbure est infini.*

D'après ce que nous avons dit ci-dessus, il existe des courbes D (*fig.* 161), formées d'une seule branche infinie et ayant une asymptote N, qui n'est asymptote qu'en un seul point $o$ (situé à l'infini) de la branche infinie D.

Dès lors, considérant cette courbe D comme une développée, nous trouverons pour développante une courbe C ayant un point d'*arrêt* en $m$, et ayant en ce point $m$ un rayon de courbure *infini*.

XIII. *Une courbe plane* C *peut avoir un point de rebroussement de première espèce pour lequel le rayon de courbure est infini.*

(*) *Voir* ce qui a été dit au sujet du point *aigu*, page 413 de ce chapitre.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, on sait que l'on peut obtenir une courbe D (*fig.* 162) composée d'une seule branche infinie dont les deux arcs ont une même asymptote N, les points *o* situés à l'infini étant à une distance infinie l'un de l'autre (cette distance étant comptée sur la droite N).

Si l'on considère cette courbe D comme une développée, on obtiendra pour sa développante une courbe C offrant un point *m* de *rebroussement* et de *première espèce;* ce point *m* sera situé sur l'asymptote N, et en ce point *m* la courbe C aura un rayon de courbure *infini*.

XIV. *Une courbe plane* C *peut avoir un point de rebroussement de deuxième espèce pour lequel le rayon de courbure est infini.*

On sait que l'on peut obtenir (*fig.* 163) une courbe D composée d'une seule branche infinie, ayant une seule asymptote N, et les points *o* situés à l'infini étant superposés.

Dès lors, regardant la courbe D comme une développée, on obtiendra pour sa développante une courbe C offrant un point de *rebroussement* de *deuxième espèce;* ce point *m* sera situé sur l'asymptote N et en ce point *m* la courbe C aura un rayon de courbure *infini*.

XV. *Une courbe plane peut avoir un point de rebroussement de seconde espèce pour lequel le rayon de courbure a une valeur finie.*

Concevons une courbe (D, D') ayant au point *o* un rebroussement de seconde espèce et ayant la droite N pour tangente en *m* (*fig.* 164).

Si l'on considère la courbe (D, D') comme une développée, on pourra toujours, en considérant un fil tendu suivant la droite N et fixé en *o* sur la courbe (D, D'), enrouler ce fil sur l'une et l'autre branche D et D', et un point *m* de ce fil décrira une courbe (C, C') qui offrira en *m* un point de *rebroussement de seconde espèce*.

Dans ce qui précède nous avons démontré l'existence des onze premiers points *singuliers* pour une courbe plane, en considérant cette courbe plane comme la projection d'une courbe à double courbure; et la seule hypothèse que nous ayons faite et dont nous avons démontré la réalité, ou, en d'autres termes, l'exactitude, c'est qu'une courbe à double courbure pouvait avoir, en un de ses points *m*, un rayon de courbure infini, ou, en d'autres termes, avoir en ce point *m* deux éléments rectilignes successifs en ligne droite, ou, en d'autres termes encore, avoir en ce point *m* un contact du second ordre avec sa tangente.

Et l'existence des quatre derniers points *singuliers* pour une courbe plane a été démontrée, en se servant de la développée de cette courbe plane.

Voyons, maintenant, en passant de ce qui est sur le *plan* à ce qui peut être

dans l'*espace*, et ainsi de la courbe plane $C^h$ à la courbe à double courbure C dont la courbe $C^h$ peut toujours être supposée la projection, quel genre d'inflexion la courbe à double courbure doit présenter en un point, lorsque ce point se projette sur la courbe plane en l'un des quatre derniers points *singuliers* que nous avons examinés ci-dessus, nos XII, XIII, XIV et XV.

## § IV.

D'après la théorie des *infiniment petits* exposée ci-dessus, on peut dire :

1° Étant donnée une courbe C à double courbure, si l'on projette orthogonalement cette courbe sur un plan horizontal H, on aura une courbe plane $C^h$.

Les points successifs et infiniment voisins $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,..... de la courbe C se projetteront sur la courbe $C^h$ en des points $m^h$, $m'^h$, $m''^h$, $m'''^h$,..... qui seront aussi des points successifs et infiniment voisins de la courbe plane $C^h$.

2° Les tangentes de la courbe C se projetteront sur le plan H suivant des tangentes à la courbe $C^h$; et les projections des tangentes successives de la courbe C seront des tangentes successives pour la courbe $C^h$.

3° Deux tangentes successives $\theta$ et $\theta'$ de la courbe C se coupent en un point $m$ de cette courbe C, dès lors les projections $\theta^h$ et $\theta'^h$ de ces tangentes $\theta$ et $\theta'$ se couperont en un point $m^h$ qui appartiendra à la courbe plane $C^h$, et ce point $m^h$ sera la projection du point $m$ de la courbe à double courbure C.

Cela posé :

Les tangentes $\theta^h$ et $\theta'^h$ comprendront entre elles un angle qui ne sera nul qu'autant ou 1° que ces deux droites $\theta^h$ et $\theta'^h$ seront superposées, qu'autant dès lors que les tangentes $\theta$ et $\theta'$ à la courbe C seront situées dans un plan O perpendiculaire au plan H de projection, ou 2° que ces deux droites $\theta^h$ et $\theta'^h$ seront parallèles.

Dans le premier cas : la courbe $C^h$ aura au point $m^h$ un contact du second ordre avec sa tangente.

Dans le deuxième cas : la courbe $C^h$ aura le point $m^h$ situé à l'infini et la tangente $\theta^h$ sera une asymptote de cette courbe $C^h$.

Le plan O passant par deux tangentes successives de la courbe C, ne sera autre que le plan osculateur au point $m$ à cette courbe C.

Mais il faut distinguer deux cas de superposition pour les droites $\theta^h$ et $\theta'^h$.

D'abord, celui où l'on ne considère que les parties des tangentes $\theta$ et $\theta'$ qui appartiennent à une des deux nappes ou *supérieure* ou *inférieure* de la surface développable $\Sigma$ dont la courbe C est l'arête de rebroussement.

Alors ces parties des tangentes $\theta$ et $\theta'$ se superposent réellement, elles ne se placent pas bout à bout sur une même ligne droite.

Ensuite, le cas où l'on considère pour la tangente $\theta$ sa partie appartenant à l'une des nappes, la *supérieure* (par exemple) de la surface $\Sigma$ et pour la tangente $\theta'$, sa partie appartenant à la nappe *inférieure* de la surface $\Sigma$, alors les projections sur le plan H de ces parties considérées sur les tangentes $\theta$ et $\theta'$, se placeront bout à bout sur une même ligne droite.

4° Lorsque l'on donne une courbe à double courbure C et qu'on la regarde comme engendrée par le mouvement de translation d'un point, on peut toujours supposer que le point mobile s'est mû sur cette courbe C, dans un sens ou en sens contraire.

De sorte, que si l'on prend deux points successifs et infiniment voisins $m$ et $m'$ sur la courbe C et que l'on mène perpendiculairement à l'élément rectiligne $\overline{mm'}$ le plan normal N, ce plan divisera la courbe C en deux arcs $\delta$ et $\delta'$ qui se souderont l'un à l'autre par l'élément $\overline{mm'}$, et l'on pourra supposer que la courbe C est engendrée par deux mobiles placés l'un en $m$ et l'autre en $m'$ et marchant en sens inverse l'un de l'autre, pour parcourir le premier l'arc $\delta$ et le second l'arc $\delta'$.

Et imaginant les points successifs $m'$, $m''$, $m'''$,..... de l'arc $\delta'$ et les points successifs $m$, $m_{,}'$, $m_{,}''$,..... de l'arc $\delta$, lorsque nous mènerons une tangente au point $m''$ de $\delta'$, nous considérerons seulement la partie de cette tangente qui est le prolongement de l'élément rectiligne $\overline{m'm''}$ du côté du point $m''$, prolongement qui appartient à la nappe *supérieure* de la surface développable $\Sigma$ dont la courbe C est l'arête de rebroussement; et lorsque nous mènerons une tangente au point $m_{,}'$ de la courbe $\delta$, nous considérerons seulement la partie de cette tangente qui est le prolongement de l'élément rectiligne $\overline{m_{,}'m_{,}''}$ du côté du point $m''$, prolongement qui appartient à la nappe *inférieure* de la surface $\Sigma$.

5° Si l'on a une surface gauche $\Phi$ et que l'on mène un cylindre K tangent à cette surface $\Phi$ suivant une courbe $\lambda$; si l'on coupe ce cylindre K par un plan H perpendiculaire à ses génératrices droites, on aura une courbe $\lambda^h$ qui sera sur le plan H la projection orthogonale de la courbe $\lambda$.

Les génératrices droites successives et infiniment voisines G, G', G'', G''',..... de la surface réglée $\Phi$ se projetteront sur le plan H suivant des droites $G^h$, $G'^h$, $G''^h$, $G'''^h$,..... qui seront les tangentes successives et infiniment voisines de la courbe $\lambda^h$.

Les droites $G^h$, $G'^h$, $G''^h$, $G'''^h$,..... se couperont deux à deux et successivement

en des points qui seront les points successifs et infiniment voisins de la courbe $\lambda^h$.

Ainsi $G^h$ coupera $G'^h$ en un point $m'^h$
$G'^h$ — $G''^h$ — $m''^h$
$G''^h$ — $G'''^h$ — $m'''^h$
Et ainsi de suite.

Et les points $m'^h$, $m''^h$, $m'''^h$,..... seront les points successifs et infiniment voisins de la courbe $\lambda^h$.

Lors donc 1° que deux génératrices successives G et G′ de la surface réglée Φ se projetteront sur le plan H suivant deux droites $G^h$ et $G'^h$ parallèles entre elles, ces deux droites $G^h$ et $G'^h$ seront successives et infiniment voisines et se couperont en un point situé à l'infini et qui appartiendra à la courbe $\lambda^h$.

La courbe $\lambda^h$ aura donc une branche infinie et aura pour asymptote la droite $G^h$.

Étant donnée une surface gauche Φ on peut toujours donner au plan H et par suite au cylindre K des positions telles que ce que nous venons de dire puisse avoir lieu et en effet :

Une surface gauche étant une surface réglée telle que deux génératrices droites successives ne se coupent pas, on pourra toujours, étant données deux génératrices droites successives G et G′ de la surface Φ, faire passer par G un plan L et par G′ un plan L′, de telle manière que ces deux plans soient parallèles entre eux ; ensuite menant un plan H perpendiculaire à ces deux plans L et L′, le cylindre K aura ses génératrices perpendiculaires au plan H.

Dès lors, le cylindre K, ainsi construit, touchera la surface Φ suivant une courbe λ dont la projection $\lambda^h$ sur le plan H aura pour asymptote la droite $G^h$ projection de la droite G sur le même plan H.

Lors donc 2° que deux génératrices successives G et G′ de la surface réglée Φ se projetteront sur le plan H suivant deux droites $G^h$ et $G'^h$ superposées et ne faisant alors qu'une seule et même droite $G^h$, alors il est évident que les trois points successifs $m$, $m'$, $m''$ de la courbe C se projetteront sur le plan H suivant trois points $m^h$, $m'^h$, $m''^h$ en ligne droite.

Dans ce cas la courbe $\lambda^h$ offrira au point $m^h$ un rayon de courbure *infini*.

Mais dans ce cas, on peut se demander : *comment la surface gauche Φ devra-t-elle être constituée tout le long de la génératrice G ?* C'est ce que nous allons examiner.

Les deux génératrices droites successives d'une surface gauche ne pouvant être situées dans un même plan, ce qui a été dit précédemment ne pourra avoir lieu, qu'autant que la surface Φ sera développable tout le long de la génératrice G, car les deux droites successives G et G′ ne pourront se projeter sur le plan H

suivant une seule et même droite qu'autant qu'elles seront dans un même plan, qu'autant dès lors qu'elles se couperont, ce qui est le caractère *distinctif* de la surface développable.

Remarquons que le plan T passant par G et l'élément rectiligne $\overline{mm'}$ est tangent au cylindre K; que le plan T' passant par G' et l'élément rectiligne $\overline{m'm''}$ est tangent au cylindre K et que ces deux plans T et T' sont deux plans tangents successifs du cylindre K. Il faudra donc, pour que les projections des droites G et G' se confondent, que les deux plans T et T' se confondent aussi; par conséquent il faudra que les trois points successifs $m, m', m''$ de la courbe $\lambda$ soient dans un même plan T, lequel sera le plan osculateur de la courbe $\lambda$ au point $m$.

6° Étant donnée une courbe à double courbure C, on peut en chacun de ses points successifs et infiniment voisins : $m, m', m'', m''', \ldots\ldots$ mener un plan osculateur.

On aura donc les plans osculateurs successifs.

| | | |
|---|---|---|
| O | passant par les points | $m, m', m''$ |
| O' | — | $m', m'', m'''$ |
| O'' | — | $m'', m''', m^{4}$ |

Et ainsi de suite.

On peut en chacun des points successifs de la courbe C mener un plan tangent perpendiculaire au plan qui est osculateur au même point; on aura donc les plans tangents successifs.

| | | |
|---|---|---|
| T | passant par les points | $m$ et $m'$ |
| T' | — | $m'$ et $m''$ |
| T'' | — | $m''$ et $m'''$ |

Et ainsi de suite.

On peut en chacun des points successifs de la courbe C mener un plan normal; on aura donc les plans normaux successifs.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N | perpendiculaire au point | $m$ | à l'élément rectiligne | $\overline{mm'}$ |
| N' | — | $m'$ | — | $\overline{m'm''}$ |
| N'' | — | $m''$ | — | $\overline{m''m'''}$ |

Et ainsi de suite.

Les plans O, T et N se couperont deux à deux suivant trois droites rectangulaires entre elles.

Savoir :

1° O et T suivant une droite $\theta$ tangente en $m$ à la courbe C; O' et T' suivant une droite $\theta'$ tangente en $m'$ à la courbe C;

Et ainsi de suite.

Les droites $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,..... seront les tangentes successives de la courbe C.

2° O et N suivant une droite $\rho$ sur laquelle sera compté le rayon de courbure de la courbe C au point $m$.

O' et N' suivant une droite $\rho'$, etc.;

Et ainsi de suite.

Les droites $\rho$, $\rho'$, $\rho''$,..... seront les directions des rayons de courbure successifs de la courbe C.

3° T et N suivant une droite Z passant par le point $m$

T' et N' suivant une droite Z' passant par le point $m'$;

Et ainsi de suite.

Cela posé :

Toutes les tangentes $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,..... formeront une surface gauche $\Delta_1$; et toutes les droites Z, Z', Z'',..... formeront une surface gauche $\Delta$.

Les deux surfaces $\Delta_1$ et $\Delta$ se couperont rectangulairement entre elles suivant la courbe à double courbure C.

Cela posé :

Imaginons dans l'espace une courbe à double courbure $\lambda$.

Considérons les points successifs $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,..... de cette courbe $\lambda$, et au point $m$ construisons le plan osculateur O de cette courbe $\lambda$, le plan normal N et le plan tangent T perpendiculaire au rayon de courbure $\rho$ de cette courbe $\lambda$ pour ce même point $m$.

Les deux plans N et O se couperont suivant le rayon de courbure $\rho$.

N et T suivant la tangente $\theta$ en $m$ à la courbe $\lambda$.

O et T suivant la droite Z qui sera une des normales de la courbe $\lambda$ pour le point $m$.

Cela dit :

Projetons la courbe $\lambda$ sur le plan N (pris pour plan horizontal de projection) nous aurons la courbe $\lambda^h$.

Concevons ensuite pour la courbe $\lambda$, les plans osculateurs successifs O, O', O'',..... et les plans normaux successifs N, N', N'',..... et les plans tangents successifs T, T', T''.

Nous aurons les rayons de courbure successifs $\rho$, $\rho'$, $\rho''$,..... les normales successives Z, Z', Z'',..... et les tangentes successives $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,..... à la courbe $\lambda$.

Par chacune des tangentes successives $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,..... de la courbe $\lambda$, menons un plan P perpendiculaire au plan N sur lequel la courbe $\lambda$ se projette en la courbe $\lambda^h$.

Nous aurons une suite de plans P, P', P'', P''',..... et nous supposerons que le premier plan P qui passe par la tangente $\theta$ menée au premier point $m$ de la courbe $\lambda$, se confond avec le plan T ; hypothèse que rien n'empêche d'admettre.

Ces plans P, P′, P″,..... seront les plans tangents successifs du cylindre K qui projette sur le plan N la courbe $\lambda$ en la courbe $\lambda^h$.

Le plan P étant un plan tangent à la courbe $\lambda$ au point $m$, si par ce point $m$ on mène une droite G perpendiculaire à ce plan P, cette droite G sera normale à la courbe $\lambda$ et sera dès lors située dans le plan N normal au point $m$ à cette courbe $\lambda$.

Concevons une suite de droites G, G′, G″; G‴,..... menées respectivement perpendiculaires aux plans P, P′, P″, P‴,..... et en les points respectifs, $m$, $m'$, $m''$, $m'''$,..... de la courbe $\lambda$.

Ces droites G, G′, G″,..... étant perpendiculaires aux plans P, P′, P″,..... se projetteront sur le plan N en des droites $G^h$, $G'^h$, $G''^h$, qui seront perpendiculaires aux traces sur le plan N des plans P, P′, P″,..... mais comme ces plans P, P′, P″,..... projettent orthogonalement sur le plan N, les tangentes $\theta$, $\theta'$, $\theta''$,..... de la courbe $\lambda$, il s'ensuit :

Que les droites $G^h$ et $\theta^h$, $G'^h$ et $\theta'^h$, $G''^h$ et $\theta''^h$ seront perpendiculaires entre elles.

Par conséquent les droites $G^h$, $G'^h$, $G''^h$,..... seront des normales à la courbe $\lambda^h$, elles envelopperont donc comme tangentes la développée D de la courbe $\lambda^h$.

Les droites G, G′, G″, G‴,..... formeront une surface gauche $\psi$, et comme les droites G, G′, G″,..... sont parallèles au plan N, ce plan N sera le plan directeur de la surface $\psi$.

Avant d'aller plus loin nous devons faire remarquer que nous avons dit, lorsque nous avons examiné les points *singuliers* d'une courbe plane, que la courbe $\lambda$ pouvait se projeter sur un plan H (passant par son rayon de courbure $\rho$) suivant une courbe $\lambda^h$ ayant au point $m$ (par lequel on a mené ce plan H), ou 1° la droite Z, (intersection du plan H et du plan T tangent à la courbe et perpendiculaire à $\rho$) pour tangente et la droite $\rho$ pour normale, ou 2° la droite Z (intersection du plan H, qui n'est autre dans ce cas que le plan normal N, et du plan T) pour normale et la droite $\rho$ pour tangente.

Dans le premier cas, le rayon de courbure au point $m$ de la courbe $\lambda^h$ est *fini*, parce qu'alors la méthode des projections n'est pas en défaut, puisque lorsque l'on considère les projections de la courbe $\lambda$ et de son cercle osculateur $\Gamma$ au point $m$, ce cercle $\Gamma$ se projette sur le plan H (qui est oblique dans ce cas au plan osculateur O) suivant une ellipse.

Mais dans le deuxième cas, la méthode des projections est en défaut, puisque la droite $\rho$ n'est plus normale, mais tangente en $m$ à la courbe $\lambda^h$, le plan H étant dans ce cas supposé être le plan N normal au point $m$ à la courbe $\lambda$.

Dans ce second cas, que nous supposerons exister pour la courbe $\lambda^h$, en vertu d'une certaine manière d'être de cette courbe $\lambda$, nous devrons, puisque les rôles (pour

le point $m$) sont intervertis entre la *normale* et la *tangente*, prendre pour les deux premiers plans successifs P et P', le plan osculateur O et pour les deux premières droites successives G et G' nous devrons prendre, savoir : pour G passant par le point $m$ la droite Z et pour G' passant par le point $m'$ une droite Z' parallèle à Z, et la projection de la droite Z' sur le plan N se confondra avec la droite Z.

En sorte que les normales successives de la courbe $\lambda^h$, seront les droites Z, $G''^h$, $G'''^h$,..... en remarquant que les deux premiers points successifs $m$ et $m'$ de la courbe $\lambda$ se projettent sur le plan N en un seul et même point qui n'est autre que le point $m$.

Cela posé :

Concevons une courbe à double courbure C et désignons par $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, ses points successifs et infiniment voisins.

Prenons le plan N normal à la courbe C au point $m$.

Nous avons en $m$ la droite Z
en $m'$ la droite G'
en $m''$ la droite G''
en $m'''$ la droite G'''

Et ainsi de suite.

Et toutes ces droites seront parallèles au plan N.

Cela posé :

1° Concevons le plan O osculateur en $m$ à la courbe C, ce plan contenant dès lors les trois points successifs $m$, $m'$, $m''$ de la courbe C.

La droite G' sera perpendiculaire à l'élément rectiligne $\overline{m'm''}$

La droite G'' sera perpendiculaire à l'élément rectiligne $\overline{m''m'''}$

La droite G''' sera perpendiculaire à l'élément rectiligne $\overline{m'''m^{iv}}$

Dès lors la droite G' sera la seule qui sera perpendiculaire au plan O, les deux autres droites G'' et G''' seront obliques à ce plan O.

Nous pourrons donc en faisant mouvoir sur les trois droites G', G'', G''' une droite Y, engendrer un paraboloïde hyperbolique $\Sigma_1$ osculateur à la surface gauche $\Sigma$ tout le long de G'.

Dès lors, en construisant un cylindre K, tangent au paraboloïde $\Sigma_1$, les génératrices de K, étant perpendiculaires au plan N, ce cylindre K touchera ce paraboloïde $\Sigma_1$ suivant une parabole $\lambda_1$, qui aura un contact du second ordre avec la courbe $\lambda$, contact de la surface réglée $\Sigma$ et du cylindre K.

Or, les courbes $\lambda$ et $\lambda_1$ se projetteront sur le plan N suivant deux courbes $\lambda^h$ et $\lambda_1^h$ qui auront nécessairement au point $m$ un contact du second ordre.

Ces deux courbes $\lambda^h$ et $\lambda_1^h$ auront donc au point $m$ même rayon de courbure ;

or, le rayon de courbure de $\lambda_1^h$ a une valeur *finie* pour le point $m$, donc la courbe $\lambda^h$ aura au point $m$ un rayon de courbure qu' sera *fini*, ou en d'autres termes qui ne sera ni *nul* ni *infini*.

2° Pour que la droite $G''$ soit parallèle à la droite $G'$, il faudra que l'élément rectiligne $\overline{m''m'''}$ soit dans le plan O; il faudra donc dans ce cas que le plan O ait un contact du troisième ordre avec la courbe à double courbure C et au point $m$.

Si $G'$ et $G''$ sont parallèles, elles se projetteront sur le plan N suivant deux droites Z et $G'''^h$ qui seront parallèles et qui se coupant dès lors à l'infini nous indiquent que la droite Z sera *asymptote* à la développée de la courbe $\lambda^h$; dans ce cas la courbe $\lambda^h$ aura donc un rayon de courbure *infini* pour le point $m$.

Dans ce que nous venons de dire, nous avons eu égard à la relation de position qui pouvait exister au point $m$ entre la courbe à double courbure C et son plan osculateur O en ce point $m$.

Or, il est évident que cette relation doit avoir une influence sur les *résultats géométriques*, en effet :

Nous savons que la courbe C ne peut affecter que deux manières d'être par rapport à son plan osculateur O en le point $m$.

1° Cette courbe C peut être située (avant et après le point $m$) d'un même côté du plan O.

2° Cette courbe C peut être située, avant le point $m$, au-dessus du plan O et après le point $m$ au-dessous du plan O, ou *vice versâ*.

Dans le premier cas, nous avons vu précédemment que la courbe C se projetait, sur son plan normal N mené au point $m$, suivant une courbe offrant au point $m$ un point de *rebroussement de seconde espèce*.

Dans le deuxième cas, nous avons aussi vu précédemment que la courbe C se projetait, sur son plan normal N mené au point $m$, suivant une courbe offrant au point $m$ un point de *rebroussement de première espèce*.

Et nous avons aussi vu que ces points de *rebroussement* ne pouvaient exister qu'autant que la courbe à double courbure C était située avant et après le point $m$ d'un même côté par rapport au plan T, qui passant par la tangente $\theta$ à cette courbe C pour le point $m$, était (ce plan T) perpendiculaire au plan osculateur O.

Et nous avons encore vu que si la courbe à double courbure C était, avant le point $m$, située à droite du plan T et après le point $m$ située à gauche de ce plan T (ou *vice versâ*), la courbe C$^n$ projection de la courbe C sur son plan normal N, offrait au point $m$ un point d'*inflexion* si la courbe C était avant le point $m$ au-dessus de son plan osculateur O (en ce point $m$) et après ce point $m$ au-dessous de ce plan O; et que la courbe C$^n$ offrait au point $m$ un point *aigu*, si la courbe C

était avant et après le point $m$ au-dessus ou au-dessous de son plan osculateur O en ce point $m$.

Rappelons-nous, aussi, que par la considération de la *développée* D d'une courbe plane $\lambda$, nous avons reconnu que :

1° Si la courbe $\lambda$ a en un de ses points $m$ un point de *rebroussement de première espèce*, elle pout avoir en ce point $m$ un rayon de courbure *nul* ou *infini*, mais jamais *fini*.

2° Si la courbe $\lambda$ a en un de ses points $m$, un point de *rebroussement de seconde espèce*, elle peut avoir en ce point $m$ un rayon de courbure *nul* ou *fini* ou *infini*.

3° Si la courbe $\lambda$ a en un de ses points $m$ un point d'*inflexion simple*, elle aura toujours en ce point $m$ un rayon de courbure *nul*.

4° Si la cuurbe $\lambda$ a en un de ses points $m$ un point d'*inflexion double*, elle aura *toujours* en ce point $m$ un rayon de courbure *infini*.

Nous devons donc conclure que la courbe $C^n$ projection de la courbe à double courbure C sur son plan normal N, ne pourra avoir au point $m$ un rayon de courbure *fini*, qu'autant que cette courbe $C^n$ offrira en ce point $m$ un point de *rebroussement de seconde espèce*, et que la courbe $C^n$ en ce point $m$ de *rebroussement* aura un rayon de courbure *fini*, toutes les fois que la courbe à double courbure C aura en ce même point $m$ un rayon de courbure *fini*.

Dans les *considérations géométriques* précédemment développées, nous avons supposé qu'une courbe à double courbure C pouvait avoir en un de ses points $m$ un contact du troisième ordre avec son plan osculateur O en ce point $m$ ; nous allons justifier l'exactitude de cette hypothèse et de la manière suivante :

Nous avons vu en considérant la développée D d'une courbe plane $C^n$ que cette courbe plane pouvait avoir en un de ses points un point de *rebroussement de première et de deuxième espèce*, et pour ce point un rayon de courbure *infini*, et nous venons de démontrer ci-dessus que pour que le rayon de courbure soit *infini* la courbe à double courbure C ayant $C^n$ pour projection, doit avoir au point $m$ un contact du troisième ordre avec son plan osculateur ; nous pouvons donc affirmer qu'une courbe à double courbure peut en un de ses points avoir un contact du troisième ordre avec son plan osculateur, et par suite et dans ce cas avoir un contact du troisième ordre avec une section conique.

Nous avons vu qu'une courbe à double courbure C pouvait avoir un rayon de courbure *infini* en un de ses points $m$, ou en d'autres avoir un contact du second ordre avec sa tangente en ce point $m$.

Nous avons vu aussi qu'une courbe à double courbure C pouvait avoir un rayon

de courbure *nul* en un de ses points *m*, et que cela avait lieu lorsque ses projections C" et C' avaient l'une et l'autre un rayon de courbure *nul* en ce point *m*.

De ce qui précède on doit conclure : qu'on ne peut pas prendre deux courbes C" et C' ayant l'une un rayon de courbure *nul* et l'autre un rayon de courbure *fini* pour projections d'une courbe à double courbure C, parce que ces conditions sont incompatibles en *projections*.

Nous pouvons, *en nous résumant*, énoncer ce qui suit :

1° Toutes les fois qu'une courbe à double courbure C a un rayon de courbure *nul* ou *infini* en un de ses points *m*, sa projection C" sur son plan normal au point *m*, aura en ce point *m* un rayon de courbure *nul*.

2° Toutes les fois qu'une courbe à double courbure C a un rayon de courbure *fini* en un de ses points *m*, sa projection C" sur son plan normal au point *m*, aura en ce point *m* un rayon de courbure *fini* si cette courbe C" offre au point *m* un *rebroussement de seconde espèce*.

3° Toutes les fois qu'une courbe à double courbure C a en un de ses points *m* un plan osculateur qui a avec elle et en ce point *m* un contact du troisième ordre, ou en d'autres termes, toutes les fois qu'en un point *m* d'une courbe à double courbure C on pourra construire une section conique ayant en ce point *m* un contact du troisième ordre avec cette courbe C, la projection C" de la courbe C sur son plan normal en *m*, aura en ce point *m* un rayon de courbure *infini*.

Nous avons vu que lorsque l'on avait une courbe à double coubure C composée d'une branche infinie et ayant une asymptote A aux deux arcs composant cette branche infinie, si l'on projetait cette courbe C sur un plan N perpendiculaire à l'asymptote A et coupant cette droite A en un point *r*, on avait une courbe fermée C" passant par le point *r*.

Ce qui précède nous permet de démontrer que la courbe C" a toujours au point *r* un rayon de courbure *nul*.

Et en effet :

Désignant par *m* le point situé à l'infini sur la courbe C, il est évident que pour ce point *m* le rayon de courbure de la courbe C est *infini*; l'asymptote A peut donc être considérée comme étant le cercle osculateur en *m* à la courbe C.

Cette courbe C sera projetée sur tout plan passant par la droite A suivant une courbe ayant A pour asymptote, ayant dès lors un rayon de courbure *infini* pour son point *m* situé à l'infini.

L'asymptote A se projetant en entier en le point *r* et sur le plan N, le rayon de courbure de C" sera *nul* en ce point *m*.

§ V.

*La surface du filet de vis carré est la seule surface gauche qui jouisse de la propriété remarquable d'avoir en chacun de ses points des rayons de courbure égaux.*

Désignons par $\Sigma$ une surface gauche ; par G, G', G'', G''', ses génératrices droites successives et infiniment voisines.

Trois droites à distance finie ou à distance infiniment petite les unes des autres déterminent le mouvement d'une génératrice droite.

Ainsi, en faisant mouvoir une droite $\theta$ sur les trois génératrices successives G, G', G'' de la surface $\Sigma$, on engendrera une surface gauche et du second ordre S laquelle sera osculatrice à la surface $\Sigma$ tout le long de la génératrice G, puisqu'elle aura en commun avec cette surface deux éléments superficiels successifs qui seront compris, le premier entre G et G' et le second entre G' et G''.

On sait que :

1° Si les trois droites G, G', G'' sont parallèles à un plan P, la surface S sera un *paraboloïde hyperbolique*.

2° Si les trois droites G, G', G'' ne sont pas parallèles à un même plan, la surface S sera un *hyperboloïde à une nappe*.

L'on sait encore que si l'on veut construire la surface S du second ordre osculatrice tout le long d'une génératrice G d'une surface réglée $\Sigma$, il faut mener en trois points arbitraires $m$, $m_1$, $m_2$ de G les plans T, $T_1$, $T_2$ tangents à la surface $\Sigma$; chacun de ces plans coupera la surface $\Sigma$ suivant une courbe, savoir :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Le plan | T suivant une courbe | $\gamma$ ayant en | $m$ une tangente | $\theta$ |
| — | $T_1$ —— | $\gamma_1$ — | $m_1$ — | $\theta_1$ |
| — | $T_2$ —— | $\gamma_2$ — | $m_2$ — | $\theta_2$ |

Et en faisant mouvoir la droite G sur les trois tangentes $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, on engendrera la surface osculatrice demandée S.

Cela posé :

1° Si l'on considère un paraboloïde hyperbolique, on remarque que les diverses génératrices du système $\theta$, ne coupent point toutes sous l'angle droit une génératrice quelconque du système G, à moins que le paraboloïde ne soit rectangulaire, c'est-à-dire n'ait ses deux plans directeurs perpendiculaires entre eux et que, de plus, la génératrice G considérée ne soit celle qui passe par le sommet de cette surface.

Ainsi, lorsque l'on a un paraboloïde hyperbolique rectangulaire S, si l'on construit le plan tangent T en son sommet $m$, ce plan T coupe cette surface S

suivant deux génératrices droites G et $\theta$ qui se coupent en ce point $m$ sous l'angle droit et toutes les génératrices $\theta_{,}$, $\theta_{,,}$, $\theta_{,,}$ etc. du système $\theta$ coupent la droite G sous l'angle droit.

2° Si l'on considère un hyperboloïde à une nappe S, on sait que toutes les génératrices droites du système $\theta$ ne coupent pas sous l'angle droit une génératrice quelconque du système G.

Et en effet :

Concevons l'hyperboloïde à une nappe et non de révolution S ; désignons son axe non transverse par A et son cône asymptote par C.

Menons un plan P perpendiculaire à l'axe A, il coupera le cône C suivant une ellipse E.

Désignons par $o$ le centre de la surface S ; ce point $o$ sera le sommet du cône C.

Considérons une génératrice droite G de la surface S, cette génératrice aura pour *parallèle* sur le cône C une droite K.

Menons par le point $o$ un plan Q perpendiculaire à la droite K, ce plan Q pourra avoir trois positions spéciales par rapport au cône C.

1° Il pourra le couper suivant deux génératrices droites I et I'.

2° Il pourra lui être tangent suivant une génératrice J.

3° Il pourra ne le couper qu'en son sommet $o$.

Dans le premier cas, il existera sur la surface S deux génératrices du système $\theta$, savoir : $\theta$ et $\theta'$ respectivement parallèles aux droites I et I'.

Dans le deuxième cas, il existera sur la surface S une seule génératrice $\theta_{,}$ du système $\theta$ parallèle à la droite J.

Dans le premier cas, les droites $\theta$ et $\theta'$ couperont la droite G sous l'angle droit.

Dans le deuxième cas, la droite $\theta_{,}$ coupera la génératrice G sous l'angle droit.

Et dans le troisième cas, il n'existera sur la surface S aucune génératrice du système $\theta$, coupant la génératrice G sous l'angle droit.

Cela posé :

On sait que pour un point $m$ d'une génératrice droite G d'une surface réglée $\Sigma$, on peut toujours construire un *paraboloïde hyperbolique* O, osculateur par son sommet à la surface $\Sigma$.

Ainsi donc, pour que la surface O se trouve avoir au point $m$ des rayons de courbure maximum et minimum égaux, il faudra que ce paraboloïde O soit rectangulaire.

Et pour que la surface réglée $\Sigma$ ait en tous les points $m$, $m_{,}$, $m_{,}$, etc. de sa génératrice droite G des rayons de courbure maximum et minimum égaux, il faudra que les paraboloïdes O, $O_{,}$, $O_{,}$, etc. (respectivement osculateurs par leur sommet à la surface $\Sigma$ et aux points $m$, $m_{,}$, $m_{,}$, etc.) soient tous rectangulaires.

Dès lors il faudra que les plans tangents T, $T_1$, $T_2$, etc., menés à la surface $\Sigma$ et aux points $m$, $m_1$, $m_2$, etc., de la génératrice G coupent respectivement cette surface $\Sigma$ suivant des courbes $\gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, etc., telles que leurs tangentes $\theta$ en $m$, $\theta_1$ en $m_1$, $\theta_2$ en $m_2$, etc., coupent sous un angle droit la génératrice G.

Et comme $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, seront les génératrices du second système de la surface réglée et du second ordre S, laquelle est osculatrice à $\Sigma$ tout le long de G, on voit que ces droites $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, etc., étant toutes parallèles à un même plan, formeront un paraboloïde hyperbolique S qui sera rectangulaire.

Ainsi la surface réglée $\Sigma$ qui jouira de la propriété d'avoir en chacun de ses points des rayons de courbure égaux, aura nécessairement un plan directeur.

Ainsi toutes les génératrices G, G', G'', etc., de la surface $\Sigma$ seront parallèles à un plan X.

Cela posé :

Le paraboloïde osculateur S ayant en commun avec la surface réglée $\Sigma$, les trois génératrices G, G', G'', aura pour plan directeur un plan X.

Dès lors, il existera parmi les génératrices du système $\theta$ de ce paraboloïde S une certaine génératrice qui sera perpendiculaire au plan X ; désignons cette droite par $\theta_0$.

Si après avoir considéré le paraboloïde S osculateur tout le long de G, je considère le paraboloïde S' osculateur tout le long de G' génératrice successive de G, je vois que les paraboloïdes S et S' auront en commun les génératrices G' et G'', par conséquent la droite $\theta_0$ s'appuiera en même temps sur les génératrices successives G, G', G'', G'''.

Et en poursuivant le même raisonnement, on voit que la surface $\Sigma$ doit avoir *nécessairement* pour *directrice* du mouvement de sa génératrice droite G, une droite $\theta_0$ perpendiculaire à son plan *directeur* X.

Ainsi la surface $\Sigma$ sera un *conoïde*.

Cela posé :

Lorsqu'on a deux surfaces réglées S et $\Sigma$ ayant une osculation du second ordre suivant une génératrice droite G, si l'on mène par un point $m$ de G un plan quelconque R, ce plan coupera la surface S suivant une courbe $\delta$ et la surface $\Sigma$ suivant une courbe $\varepsilon$, et ces deux courbes $\delta$ et $\varepsilon$ auront au moins, et *nécessairement*, un contact du premier ordre au point $m$.

Par conséquent, si je mène au point $m$ le plan T tangent à la surface $\Sigma$, ce plan coupera la surface $\Sigma$ suivant une courbe $\gamma$ et la surface paraboloïde S suivant une génératrice droite et du second système $\theta$, et la droite $\theta$ sera tangente à la courbe $\gamma$ au point $m$.

Or, si l'on prend une surface *de filet de vis carré* (que je désigne par M) ayant

un plan X pour plan directeur et une droite $\theta_0$ perpendiculaire au plan X pour *directrice*, on sait que si l'on coupe cette surface M par un cylindre de revolution Y ayant $\theta_0$ pour axe, la courbe $\lambda$ que l'on obtiendra sera une hélice.

Considérant une génératrice droite G de la surface M, cette droite G coupera la courbe $\lambda$ en un point $m$, et si en ce point $m$ on mène un plan T tangent à la surface M, on sait que ce plan T sera le plan osculateur de l'hélice $\lambda$; et de plus l'hélice $\lambda$ a pour tangente en $m$ une droite $\theta$ coupant rectangulairement la droite G.

Il est donc évident, par ce qui précède, que le paraboloïde S osculateur à la surface M tout le long de la génératrice droite G sera rectangulaire.

Et dès lors il est démontré que la surface *du filet de vis carré* jouit de la propriété d'avoir en chacun de ses points des rayons de courbure égaux (*).

Démontrons maintenant que cette surface est la seule entre toutes les surfaces réglées qui jouisse de cette propriété remarquable.

Nous avons vu que la surface réglée $\Sigma$, pour jouir de la propriété énoncée, devait avoir un plan *directeur* X et une droite *directrice* $\theta^0$ perpendiculaire au plan X.

Si donc nous pouvons construire un filet de vis carré M osculateur tout le long de la génératrice G à la surface donnée $\Sigma$, nous serons assuré que la surface $\Sigma$ a des rayons de courbure égaux en chacun des points de sa génératrice droite G.

Or, pour que cela ait lieu, il faut que le cylindre de révolution Y coupe la surface $\Sigma$ suivant une courbe $\gamma$ et la surface M suivant une hélice $\lambda$ et la droite G en un point $m$, de telle sorte que les courbes $\gamma$ et $\lambda$ aient au point $m$ une osculation du second ordre.

Il faudra donc, en considérant trois génératrices successives $G, G', G''$ de la surface $\Sigma$, lesquelles couperont la courbe $\gamma$, et respectivement, en les points $m$, $m'$, $m''$, il faudra donc, dis-je, que les éléments rectilignes successifs $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$ de la courbe $\gamma$ fassent des angles égaux avec la droite $\theta_0$; désignons cet angle par $\alpha$.

Lorsque nous considérerons la génératrice G' successive de G et appartenant à la surface $\Sigma$, il faudra que nous puissions construire un filet de vis carré M' osculateur à $\Sigma$ tout le long de G'.

Et l'on voit que les courbes $\gamma$ et $\lambda'$ (cette courbe $\lambda'$ étant l'hélice intersection du cylindre Y et de la surface M') devront être osculatrices l'une à l'autre; mais comme $\gamma$ et $\lambda'$ seront en effet osculatrices l'une à l'autre au point $m'$, et comme

(*) Voir le *Bulletin de la Société philomatique*, séance du 22 juin 1833.

aussi les surfaces M et M′ auront en commun les génératrices successives G′ et G″, il s'ensuit que l'élément rectiligne $\overline{m''m'''}$ successif de l'élément rectiligne $\overline{m'm''}$ de la courbe $\gamma$ devra faire avec la droite $\theta_o$ un angle qui sera encore égal à $\alpha$.

Par conséquent, la courbe $\gamma$ ne sera autre qu'une hélice tracée sur le cylindre Y, puisque ses éléments rectilignes succesifs $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$, $\overline{m''m'''}$, etc. feront tous le même angle $\alpha$ avec l'axe $\theta_o$ du cylindre Y.

Et dès lors il se trouve démontré, savoir : *que la surface du filet de vis carré est la seule surface gauche qui jouisse de la propriété d'avoir en chacun de ses points, des rayons de courbure maximum et minimum qui soient égaux.*

Monge essaya de résoudre la question précédente, lorsqu'il professait à l'École polytechnique (on peut voir les feuilles qui à cette époque furent distribuées aux élèves); alors il ne parvint pas à la solution du problème; plus tard, dans un mémoire publié dans les actes de l'Académie des sciences, il démontra que la surface du filet de vis carré jouissait de la propriété énoncée, mais il ne démontra point que cette surface était la seule entre les surfaces réglées qui pût jouir de cette propriété remarquable.

Monge, dans ses diverses recherches, employa l'*analyse;* depuis on a démontré par la *géométrie descriptive* que la surface du filet de vis carré jouissait, en effet, de la propriété d'avoir ses rayons de courbure maximum et minimum égaux (*).

M. Catalan, dans ces derniers temps, a publié dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, la démonstration complète du théorème, et cela en se servant de l'*analyse;* ayant lu la démonstration de M. Catalan, il me sembla aussitôt que la *géométrie descriptive* pouvait avoir assez de puissance pour résoudre aussi et complétement la question; et je crois que la démonstration que je viens d'exposer est en effet à l'abri de toute objection.

Ceux qui cultivent l'*analyse* regardent la *géométrie descriptive* comme étant une science bornée, et avec raison, puisque la *langue graphique* ne comporte pas et ne peut comporter la même puissance que la *langue algébrique;* mais si l'on cultivait de nos jours la *géométrie descriptive* ou *graphique* avec autant d'ardeur qu'on cultive l'*analyse*, très-certainement on serait surpris des résultats utiles et nouveaux que l'on obtiendrait.

Sans doute, la *géométrie descriptive* ne comporte pas la généralité de l'*analyse*,

(*) Voir le *Bulletin de la Société Philomatique*, séance du 22 juin 1833.

en ce sens qu'elle ne peut pas dire en toutes circonstances comme cette dernière, il n'y a que tant de *courbes* ou tant de *surfaces* qui jouissent de telles propriétés; car si dans certains cas l'*analyse* ne peut pas répondre aujourd'hui, ce n'est pas qu'il y ait en elle *impuissance réelle*, c'est qu'elle n'a pas encore atteint la perfection qui lui permettra de répondre un jour; mais très-certainement elle sera en état de répondre un jour, parce qu'en elle existe *virtuellement la faculté* de répondre, et que si elle ne le peut en ce moment, c'est que les *formules* au moyen desquelles elle le pourra, ne sont point encore trouvées.

Et toutefois, la *géométrie descriptive*, comme on vient de le voir, a pu, dans la question précédente, atteindre à la puissance de l'*analyse*, et très-certainement dans beaucoup d'autres questions, la *géométrie descriptive* atteindra à la puissance de l'*analyse*, mais ce ne pourra être, *en général*, que dans les questions où il s'agira de *la forme*, ce ne pourra être que dans les problèmes *de relation de position*; et je serai bien trompé, si pour ces problèmes elle n'avait presque toujours un avantage sur l'*analyse*, en ce sens que ses démonstrations seront plus promptes et plus simples, et que les résultats seront obtenus dans des termes et sous des formes plus immédiatement applicables par les ingénieurs aux travaux d'art.

La *géométrie descriptive* est réellement *bornée*, puisqu'elle ne peut atteindre, *en général*, à la solution des problèmes de *relation métrique*, problèmes bien plus nombreux et plus importants sous le point de vue scientifique et des *applications* que les problèmes de *relation de position*; mais la géométrie descriptive peut acquérir *toute puissance* lorsqu'il s'agira des problèmes de relation de position, et en ce sens elle n'est point bornée, et les efforts qu'elle fera dans cette direction seront toujours utiles.

Terminons ce chapitre par les considérations suivantes :

Les anciens géomètres ne purent, en vertu des méthodes qu'ils avaient inventées, démontrer qu'un cône ayant pour base une section conique était coupé par un plan et, quelle que fût sa direction, suivant une section conique.

Cette question ne fut résolue que lorsque Descartes eut exposé sa nouvelle méthode, qui consistait dans l'application de l'algèbre à la géométrie.

La méthode de Descartes conduisit aux propriétés des surfaces dites du second degré ou du second ordre, mais ce ne fut que lorsque l'algèbre eut été perfectionnée et transformée en *algèbre infinitésimale* que l'on démontra le théorème relatif au plan tangent en un point d'une surface, savoir : *que toutes les courbes tracées sur une surface* (quelle que soit cette surface) *et se croisant en un même point ont leurs tangentes en ce point situées dans un plan unique.*

Plus tard, les propriétés relatives à la courbure des courbes et des surfaces furent découvertes au moyen de l'*analyse infinitésimale*, etc., etc.

Et cependant, si la méthode de Descartes était encore ignorée, mais si la méthode des projections qui constitue la *géométrie descriptive* que nous devons à Monge était connue, nous pourrions résoudre complétement la plupart des questions dons nous venons de parler.

Et en effet : en ne me servant que de la *géométrie descriptive*, j'ai démontré qu'un cône ayant pour base une section conique était coupé par tout plan suivant une section conique, et j'ai établi presque toutes les propriétés des sections coniques sans avoir recours à l'*analyse* (*).

Et c'est aussi en ne me servant que de la géométrie descriptive que dans le chapitre VII de cet ouvrage, je suis ci-dessus parvenu à démontrer le *théorème relatif au plan tangent*.

J'espère pouvoir, l'an prochain, publier mon cours complet de géométrie descriptive, et j'y démontrerai en ne me servant que des méthodes de la *géométrie descriptive*, qu'il ne peut exister que cinq surfaces (en mettant en dehors les surfaces coniques et cylindriques) qui puissent être coupées par un plan, et quelle que soit sa direction, suivant une section conique.

En sorte que les propriétés des surfaces dites du second ordre seront reconnues et démontrées sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*.

Ce qui vient d'être dit nous doit donner à penser que dans beaucoup de cas, la *géométrie descriptive* peut être aussi puissante que l'*analyse*, et ces cas sont ceux où les problèmes proposés étant examinés de près seront reconnus être des problèmes de relation de position, ou seront reconnus pouvoir être ramenés à des problèmes de forme et de position.

Et on doit le reconnaître, la question du plan tangent, celle des sections planes d'un cône ayant pour base une *section conique*, celle des surfaces du second ordre, quand il s'agit de leur mode de génération, de leurs sections planes, de leurs cônes et cylindres enveloppes, etc., etc., et aussi la question résolue dans ce § V, au sujet de la surface *du filet de vis carré*, ne sont en définitive que des questions de *forme* et de *position*, la *géométrie descriptive* doit donc pouvoir les résoudre et elle les résout en effet.

---

(*) Voir mon *Cours de géométrie descriptive*, lithographié pour l'usage des élèves de l'École centrale des arts et manufactures.

FIN.

# TABLE DES MATIÈRES.



## CHAPITRE PREMIER.

DES SURFACES HÉLICOÏDALES CYLINDRIQUES ET CONIQUES ; DES DÉVELOPPANTES PLANES ET SPHÉRIQUES, RALLONGÉES ET RACCOURCIES.

## CHAPITRE II.

SPIRALE LOGARITHMIQUE. — SPIRALE HYPERBOLIQUE. — SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

## CHAPITRE III.

## CHAPITRE IV.

### PROBLÈMES D'OMBRES DU GENRE DES ÉCLIPSES.



## CHAPITRE V.

### DES ÉPICYCLOÏDES ANNULAIRES

## CHAPITRE VI.

DE LA SPHÈRE SATISFAISANT A QUATRE CONDITIONS.

---

## CHAPITRE VII.

### THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INFINIMENT PETITS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

## ERRATA.

Page 2, ligne 24. faisant avec $C$, *lisez :* faisant avec $G$.
Page 9, avant-dernière ligne. les deux hélices $E$ et $E$, *lisez :* les deux hélices $E$ et $E'$.
Page 35, dernière ligne. aux cercles $C$ et $C$, *lisez :* aux cercles $C$ et $C'$.
Page 41, 4e ligne de la note. le centre de ce centre $C$, *lisez :* le centre de ce cercle $C$.
Page 48, ligne 10. le plan $T$ au cône $B$, *lisez :* le plan $T$ tangent au cône $B$.
Page 99, ligne 32. du cylindre $H$, *lisez :* du cylindre $A$.
Page 100, ligne 11. *dans la spirale d'Archimède la sous-tangente est constante*, *lisez :* *dans la spirale d'Archimède la sous-normale est constante.*
Page 100, ligne 17. la sous-tangente $s^2q$, *lisez :* la sous-normale $s^2q$.
Page 148, ligne 29. une droite $X$, *lisez :* une droite $Z$.
Page 160, ligne 18. parallèles à celui de la surface, *lisez :* parallèles à celles de la surface.
Page 208, ligne 2. $(\cos^2\varphi', \sin^2\varphi', y'', x'', y', x)$, *lisez :* $(\cos^2\varphi', \sin^2\varphi', y'', x'', y', x')$.
Page 208, ligne 28. dit dessus, *lisez :* dit ci-dessus.
Page 214. Le dénominateur de l'équation (1) doit être écrit ainsi :

$$\sqrt{D^2 + r^2 - 2(y'Y + x'X + z'Z)} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(yY + xX + zZ) + r^2}$$

Page 232, ligne 7. la tangente $mq$, *lisez :* la tangente $mq'$.
Page 232, ligne 8. on a $mq = mp'$, *lisez :* on a $mq' = mp'$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
RUE RACINE, 28, PRÈS DE L'ODÉON.



